Soluții – clasa a VII-a

1. a)Evident, $n \neq 0$ si $n \neq 3$

   Pentru orice $n \in \mathbf{Z}$, numitorul raportului este număr par, iar numărătorul este impar, deci $\frac{2n^2-4n+3}{n^2-3n} \notin \mathbf{Z}$.

   b)Din $\frac{2n^2-4n+4}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ => $\frac{2n^2-6n+2n+4}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ =>$\frac{2(n^2-3n)}{n^2-3n} + \frac{2n+4}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ => $\frac{2n+4}{n^2-3} \in \mathbf{Z}$ (1)

   =>$\frac{n(2n+4)}{n^2-3} \in \mathbf{Z}$ =>$\frac{2n^2-6n+10n}{n^2-3} \in \mathbf{Z}$=>2+$\frac{10n}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ =>$\frac{10n}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ (2)

   Din (1) => $\frac{5(2n+4)}{n^2-3} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{10n+20}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ (3)

   şi , ținând seama de (2) => $\frac{20}{n^2-3n} \in \mathbf{Z}$ => $n^2-3n \in D_{20}$

   Obținem $n \in \{1,2,4\}$

2. a) E(1)+E(2)+…+ $\frac{E(2006)}{2006}$ =(-1+2)+…+ $\frac{(-2005)+2006}{2006}=\frac{1003}{2006}=\frac{1}{2}$

   b) n=2t, E(1)+…+E(2t)=t => 2007a, $a \in N$

   ⇨ N=4014a, $a \in N$, $a \in N^*$

   n=2t+1, E(1)+…+E(2t+1)=-t-1=-(t+1).

   t+1=2007a, $a \in N$

   ⇨ n=4014a-1, $a \in N^*$

   $n \leq 10000$ => $n \in \{4013,4014,8027,8028\}$

   c)k^2+E(n)=1 => E(n)=1-k^2<0 => n m impar

   n=2t+1 => -t-1=1-k^2 => t=k^2-2

Pentru k impar => $n \in \varnothing$

Pentru k par => n = 2 k^2 – 3

3. a) Din ΔCEB~ΔCMN => $\frac{EB}{MN}=\frac{CB}{CN}$ şi din ΔDAF~ΔDMN, => $\frac{AF}{MN}=\frac{DA}{DM}$. Dar $\frac{CB}{CN}=\frac{DA}{DM}$, => $\frac{EB}{MN}=\frac{AF}{MN}$ => EB=AF => EA=BF

b) Din ΔEBC~ΔMNC, => $\frac{EB}{MN}=\frac{CB}{CN}=\frac{CN+NB}{CN}$=1+$\frac{NB}{CN}$=1+$\frac{MN}{b}$ => $\frac{MN+a}{MN}=1+\frac{MN}{b}$.

$\frac{MN+a}{MN}=\frac{b+MN}{b}$ => $\frac{MN+a-MN}{MN}=\frac{b+MN-b}{b}$ => $\frac{a}{MN}=\frac{MN}{b}$ => MN^2=ab

4. a) ΔARC~ΔADB => $\frac{RC}{DB}=\frac{AC}{AB}$ => RC*AB=DB*AC.

   b) $DD_1 \perp AC$ şi $DD_2 \perp AB$ => $DD_1=DD_2$

$\left.\begin{array}{l} DD_2 \perp AB \\ ADB=90^0;\ AD=DD \end{array}\right\} \Rightarrow DD_2=\frac{1}{2}AB.$

$S_{ADC}=\frac{1}{2}\ AC*DD_2=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*AC*AB=\frac{1}{2}S_{ABC}=S_{ABR}$

c) (AB bisectoare => $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

$\frac{EA}{EB}*\frac{MB}{MC}*\frac{FC}{FA}=S_{ADC}/S_{BDC}*AB/AC*S_{RCB}/S_{RAB}=S_{RCB}/S_{BDC}*AB/AC$

$=\frac{1}{2}RC*DR/4*DB*DR*AB/AC=RC*AB/DB*AC=1$ => AM,CD,BR coliniare

Soluții – clasa a VIII-a

1.Fie $n \in \mathbb{N}^*$, astfel incat n=n(x+7)=y(y+3), unde $n, y \in \mathbb{N}^*$ => $x^2 + 7x = y^2 + 3y$ $|\cdot 4$ ⇔ $4x^2+28x+7^2-7^2=4y^2+12y+3^2-3^2$ ⇔ $(2x+7)^2-7^2=(2y+3)^2-3^2$ ⇔ $(2x+7)^2-(2y+3)^2=7^2-3^2$ ⇔(2x+7+2y+3)(2x+7-2y-3)=40 ⇔ (x+y+5)(x-y+2)=10, unde x+y+5>x-y+2

=> $\begin{cases} x+y+5=10 \\ x-y+2=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x+y+5=5 \\ x-y+2=2 \end{cases}$

Primul sistem este echivalent cu $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$, pentru care care n=18

Al doilea sistem este echivalent cu $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, care nu convine.

2. i)$E(-1)=(3+k)^2+2^4/3^{2n}=E(3)$ şi $E(-3)=(15+k)^2+4^4/15^{2n}=E(5)$

ii)Fie $k \in \mathbf{Z}$ şi x_0 rădăcina întreagă a ecuației ⇔ $(x_0^2-2x_0+k)^2+(x_0-1)^4/(x_0^2-2x_0)^{2n}=k+1$ ⇔ $(x_0-1)^4/(x_0^2-2x_0)^2 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $(x_0-1)^4/(x_0-2x_0)^{2n} * (x_0^2-2x_0)^{2n-2} \in \mathbf{Z}$ ⇔ $(x_0-1)^4/(x_0^2-2x_0)^2 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $(x_0^2-2x_0+1/x_0^2-2x_0)^2 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $x_0^2-2x_0+1/x_0^2-2x_0 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $1+1/x_0^2-2x_0 \in \mathbf{Z}$ ⇔ $x_0^2-2x_0 \in \{-1,1\}$. Dacă $x_0^2-2x_0=-1$ ⇔ $(x_0-1)^2=0$ ⇔ $x_0=1 \in \mathbf{Z}$.

Dacă $x_0^2-2x_0=1$ ⇔ $(x_0-1)^2=2$ ⇔ $x_0=1\pm\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$.

Deci $x_0=1$ şi înlocuind în ecuație, obținem $(k-1)^2=k+1$ ⇔ $k^2-2k+1=k+1$ ⇔ $k^2-3k=0$ ⇔ $k(k-3)=0$ ⇔ $k \in \{0,3\}$.

iii)$E(2-x)=(4-4x+x^2-4+2x+k)^2+(2-x-1)^4/(4-4x+x^2-4+2x)^{2n}=(x^2-2x+k)^2+(1-x)^4/(x^2-2x)^{2n}=E(x)$. Deci, dacă x_0 este soluție a ecuației E(x)=k+1. Cum ecuația are soluție unică, rezultă $x_0=2-x_0$ ⇔ $x_0=1$ şi înlocuind în ecuație obținem $k \in \{0,3\}$. Dar $k \in \mathbf{R}^*$ ⇔ k=3 …….

Reciproc, pentru k=3, ecuația devine $(x^2-2x+3)^2+(x-1)^4/(x^2-2x)^{2n}=4$ ⇔ $(x^2-2x+3)^2=4-(x-1)^4/(x^2-2x)^{2n}$ ⇔ $(x^2-2x+1+2)^2 \leq 4$ ⇔ $[(x-1)^2+2]^2 \leq 4$ ⇔ $(x-1)^4+4(x-1)^2+4 \leq 4$ ⇔ $(x-1)^4+4(x-1)^2 \leq 0$ ⇔ x-1=0 ⇔ x=1

Deci k=3

3. a) Fie E simetricul lui S fata de D ⇒

DE||CT si DE ≡ *CT* ⇒

DETC paralelogram ⇒

TE||CD||AB SI AB ⊥ (SAD) ⇒ TE ⊥ (SAD)

D(T,(SAD))=TE=CD=a

Fie EO ⊥ SA si TE ⊥ (SAD) ⇒

TO ⊥ SA ⇒ d(T, SA)=TO

EO=2AD=2a

ΔTEO($\prec$E=90^0) $\Rightarrow$ TO=$\sqrt{TE^2+EO^2}=a\sqrt{5}$

b) Fie R mijl (CD)

SD||CT si SD||CT $\Rightarrow$ SDTC paralelogram $\Rightarrow$ R$\in$TS $\Rightarrow$R$\in$(SBT)

APBR paralelogram $\Rightarrow$ AP||BR si BR$\subset$(SBT) $\Rightarrow$ AP||(SBT)

4.

a) $\left.\begin{array}{l}\widehat{OAB}=\widehat{ODC}\\ \widehat{AOB}=\widehat{COD}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta OAB \sim \Delta ODC \Leftrightarrow \frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC} \Leftrightarrow$

VA$\perp$VC $\Leftrightarrow$ VO^2=OA*OC $\Leftrightarrow$ VO^2=OD*OB $\Leftrightarrow$ VB$\perp$VD

b) Fie d$\perp$(ABCD), R$\in$d.

BC$\cap$(VOE)=BC$\cap$EO={M}

$\left.\begin{array}{l}\text{RS}\parallel\text{VO}\\ \text{R}\in(\text{VOE})\end{array}\right\}$ $\Leftrightarrow$ RS$\subset$(VOE) $\Leftrightarrow$ S$\in$(VOE) ……

B$\cap$(VOE)=BC$\cap$VS={M_1}={M} $\Leftrightarrow$ M_1=M $\Leftrightarrow$ VS$\cap$OR$\cap$BC={M}

EV$\cap$d={T} $\Leftrightarrow$ d$\cap$(VAD)={T}.

$\left.\begin{array}{l}RS\parallel VO \Leftrightarrow \frac{RS}{VO}=\frac{RM}{OM}\\ TR\parallel VO \Leftrightarrow \frac{TR}{VO}=\frac{ER}{EO}\end{array}\right\}$ $\frac{RS+TR}{VO}=\frac{RM}{OM}+\frac{ER}{EO}=\frac{RM+ER}{OM}=\frac{EM}{OM}=\frac{2OM}{EM}=2 \Leftrightarrow$ RS+RT=2VO.

Soluții – clasa a IX-a

1

Notam A', B', C' mijloacele laturilor; D, E, F picioarele inaltimilor

AH=2OA' 3p

AH$\cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ 4p

2

a) Vectorii se aduna dupa regula triunghilui. 1p

Avem |OA-OB|$\le$OM $\le$|OA+OB|, egalitatile revenind cand punctele devin coliniare 2p

Locul geometric este coroana centrelor in O cu raze 5r-2r=3r, respectiv 5r+2r=7r

Verificare reciproca 1p

Total 4p

b) Renotam $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{ON}$ si avem $\vec{OM}=\vec{ON}+\vec{OC}$. Acelasi rationament 1p

coroane concentrice : cea interioara cu raze 4r=11r-7r si 8r=11r-8r, 1p

cea exterioara cu raze 14r=11r+3r, 18r=11r+7r 1p

Total 3p

3

Avem

$$\frac{a^2}{a^3+b}+\frac{b^2}{b^3+a}\ge\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3+a+b}=\frac{a+b}{a^2-ab+b^2+1}=\frac{a+b}{a^2+b^2}\ge\frac{2\sqrt{ab}}{a^2+b^2}=\frac{2}{a^2+b^2}$$

4

Consideram cel mai restrans patrulater MNPQ care contine pe D in interiorul sau si are laturi paralele la axele sistemului ortonormant. Atunci este clar ca

MN+NP=1

Notam cu A=aria$_D$. Atunci este trivial ca

$$A<\text{aria}_{MNPQ}=MN\cdot NP\le\left(\frac{MN+NP}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Din faptul ca pr$_{(oX}$D si pr$_{(oY}$D sunt segmente deducem ca

$$\sum d_i \geq MN,\ \sum d_i \geq NP \Rightarrow \sum r_i \geq \frac{MN+NP}{4} = \frac{1}{4}$$

unde d_i si r_i sunt respectiv diametrul si raza discului D_i. Din (I.M.) avem ca

$$\sum r_i^2 \geq \frac{1}{30}\left(\sum r_i\right)^2$$

De unde rezulta ca

$$A = -\ \pi \sum r_i^2 \geq \frac{\pi}{30}\left(\sum r_i\right)^2 \geq \frac{\pi}{3}\frac{1}{160} > \frac{1}{160}$$

Soluții – clasa a X-a

1. Avem: $a_{1+1} \geq 2\sqrt{a_1}, \ldots\ldots, a_n + 1 \geq 2\sqrt{a_n}$,

de unde $a_{1+}a_2 + \ldots\ldots + a_n + n \geq 2(\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_2})$

Daca am avea si

$\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} \geq n$,

prin adunare rezulta inegalitatea ceruta.

Se presupune deci ca

$\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} < n$

Avem 1=$\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_1 a_2 \ldots a_n}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{(a_1 \ldots a_n)^2}$,

de unde $a_{1+}a_2 + \ldots\ldots + a_n \leq 1$.

Dar cum $a_1 + \cdots + a_n + a_1 a_2 \ldots a_n = n + 1$,

Rezulta $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$ si daca

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n > \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}$

2. Avem că f(xyz)=f(xy)*f(z)+k=f(x)*f(y)*f(z) + kf(z)+k.
Simultan, avem însă f(xzy)=f(xz)*f(y)+k=f(x)*f(z)*f(y)+kf(y)+k.
Deci, cum f injectivă, obținem k=0.
Observăm că $f(1)=f^2(1)=f^2(-1)$.
Dacă f(1)=0, atunci f(x)=0 pentru orice x contradicție cu injectivitatea.
Dacă f(1)=-1, atunci f(x)=-f(x) deci f(x)=0 pentru orice x contradicție.
Deci f(1)=1, atunci cum |f(-1)|=1 şi f(1)=1 şi $1 \neq -1$ atunci f(-1)=-1, deci f(-x)=-f(x) contradicție

3. Funcție f:**R**→**R**, $f(x)=x^3+\frac{1}{2}$ este strict crescătoare.
Se observă că ecuația se poate scrie f(f(x))=x şi se arată ce aceasta este echivalentă cu f(x)=x, care are soluțiile $x_1=1$, $x_{2,3}=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.

1	Luăm $z_O = 0$ şi $z_A = R(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$, $z_B = R(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$, $z_C = R(\cos\gamma + i\cdot\sin\gamma)$.	
	Avem $a^2 = \lvert z_B - z_C\rvert^2 = R^2\left[(\cos\beta - \cos\gamma)^2 + (\sin\beta - \sin\gamma)^2\right] =$ $= 2R^2\left[1 - \cos(\beta - \gamma)\right]$ (1). Permutări ciclice.	0,5p
	$2\cdot z_{A'} = z_B + z_C = R\left[(\cos\beta + \cos\gamma) + i\cdot(\sin\beta + \sin\gamma)\right]$ etc	0,25 p
	Căutăm $D \in BC$, încât $AD \perp BC$, adică $t \in \mathbb{R}$, astfel ca $z_D = t\cdot z_B +$	1p

	$+(1-t)\cdot z_C$. Găsim $2a^2\cdot t=a^2+b^2-c^2$ şi apoi $2a^2\cdot z_D=\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdot z_B$ $+\left(a^2-b^2+c^2\right)\cdot z_C$.	
	Urmează $4a^2\cdot z_{D'}=2a^2\cdot z_A+\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdot z_B+\left(a^2-b^2+c^2\right)\cdot z_C$	0,25 p
	Tota	
2	Un punct K al dreptei $A'D'$ este dat de $k\in\mathbb{R}$, astfel încât $z_K=k\cdot z_{D'}+$ $+(1-k)\cdot z_{A'}$, adică $4a^2\cdot z_K=2a^2k\cdot z_A+\left[2a^2+k\cdot\left(b^2-a^2-c^2\right)\right]\cdot z_B+$ $+\left[2a^2+k\cdot\left(c^2-a^2-b^2\right)\right]\cdot z_C$ (2)	1p
	Variante. Se poate impune coliniaritatea punctelor B',E',K, eventual exprimând aria triunghiului $B'E'K$. Se poate raţiona sintetic: concurenţă în triunghiul $A'B'C'$ a izotomicelor înălţimilor.	
	O exprimare similară este dată de $h\in\mathbb{R}$, astfel ca $4a^2\cdot z_K=2a^2h\cdot z_B+$ $+\left[2b^2+h\cdot\left(a^2-b^2-c^2\right)\right]\cdot z_A+\left[2b^2+k\cdot\left(c^2-a^2-b^2\right)\right]\cdot z_C$. Cele două exprimări coincid dacă $h\left(-a^2+b^2+c^2\right)+2kb^2=2b^2$, $2ha^2+k\left(a^2-b^2+c^2\right)=2a^2$.	1p
	Se poate evidenţia consecinţa $(h+k)\left(a^2+b^2+c^2\right)=2\left(a^2+b^2\right)$.	
	Eliminând h găsim $k\left(a^2+b^2+c^2\right)=2a^2$ (3) şi urmează $\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot z_K$ $=a^2\cdot z_A+b^2\cdot z_B+c^2\cdot z_C$ (4). Simetria relaţiei asigură şi celelalte coliniar	
	Se observă că punctul K este al lui Lemoine. Această observare poate substitui oricare dintre cele 3 etape dar nu poate fi notată decât cu 1 punct.	
	3p	
3	Folosind (3) avem $K\in(A'D'\Leftrightarrow k>0$, evidentă şi $K\in(D'A'\Leftrightarrow k<1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$.	1p
4	Cu $OK=\lvert z_K\rvert$ relaţia (4) dă $OK^2=\left(a^2\cos\alpha+b^2\cos\beta+c^2\cos\gamma\right)^2+$ $+\left(a^2\sin\alpha+b^2\sin\beta+c^2\sin\gamma\right)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2\cos(\alpha-\beta)+$ $+2a^2c^2\cos(\alpha-\gamma)+2b^2c^2\cos(\beta-\gamma)$. Folosind (1) deducem relaţia din enun	1 p

Soluții – clasa a XI-a

3. (1) Dezvoltand determinantul dat dupa elementele primei coloanei se obtine

(*) $D_n(x)=(x+2a)D_{n-1}(x)-a(x+a)D_{n-2}(x)$

(2) In (*) avem o …. liniara de ordin 2 in ecuatie caracteristica

$t^2-(x+2a)t+a(x+a)=0$ de radacini

$t_{1,2}=\dfrac{x+2a\pm x}{2}$, deci $t_1=x+a$, $t_2=a$

Determinam $\alpha,\beta\in\Re$ a.i

$D_n(x)=\alpha(x+a)^n+\beta a^n$

Pentru n=1 si n=2 se obtine sistemul liniar in α,β

(**) $\begin{cases}\alpha(x+a)+\beta a=x+2a\\ \alpha(x+a)^2+\beta a^2=x^2+3ax+3a^2\end{cases}$ de det $\Delta=-ax\,(x+a)$. Cand $\Delta\neq 0$, … $x\neq 0$ si $x\neq -a$ se obtine $\alpha=\dfrac{x+a}{x}$, $\beta=-\dfrac{a}{x}$. Asadar din $x\neq 0$ si $x\neq -a$ avem

$D_n(x)=\dfrac{(x+a)^{n+1}-a^{n+1}}{x}=(x+a)^n+(x+a)^{n-1}a+\ldots+(x+a)a^{n-1}+a^n$

4. (1) Fie $p, q\in N^*$ a.i. $A^p=0=B^q$ si fie $m=p+q-1$. Cum $AB=BA$, avem

$(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^{m-k}B^k=0$

pentru ca $m-k\geq p$ sau $k\geq q$ oricare ar fi $k=0, 1, 2, \ldots, m$

Avem

$$e^Ae^B=\left(\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{j!}B^j\right)=\sum_{k=0}^{p+q-2}\left(\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!\,j!}A^jB^j\right)=\sum_{k=0}^{p+q-2}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}C_k^jA^{k-j}B^j\right)=$$

$$\sum_{k=0}^{p+q-2}\frac{1}{k!}(A+B)^K=e^{A+B}$$

(2) Daca $A^p=0\Rightarrow(-A)^p=0$ si cum $A(-A)=(-A)A$ rezulta ca $e^Ae^{-A}=e^{A+(-A)}=e^0=I_n$

Soluții – clasa a XII-a

1. Fie f(x)= $\left|\frac{1}{2}+cosx\right|$, x$\in(0,2\pi)$

Avem

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\cos x & ,0<x<\frac{2\pi}{3} \\ -\frac{1}{2}-cosx & ,\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{2}+cosx & ,\frac{4\pi}{3}<x\le 2\pi \end{cases}$$

Fie F(x)$:(0,2\pi)\to\boldsymbol{R}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+sinx+C_1 & 0<x<\frac{2\pi}{3} \\ -\frac{1}{2}x-sinx+C_2 & \frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{2}x+xsinx+C_3 & \frac{4\pi}{3}<x<2\pi \end{cases}$$

Continuitatea in x=$\frac{2\pi}{3}$ si x=$\frac{4\pi}{3}$ pentru F(x) impune ca C_2=$\frac{2\pi}{3}$+$\sqrt{3}$+C_1 si C_3=$-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}+C_2$

de unde

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+sinx+C \\ -\frac{1}{2}\mathrm{x}-\sin\mathrm{x}+\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}+C \\ \frac{1}{2}x+sinx\frac{-2\pi}{3}+2\sqrt{3+C} \end{cases}$$

cu C$\in\boldsymbol{R}$

Verificarea derivabilitatii in x=$\frac{2\pi}{3}$ si x=$\frac{4\pi}{3}$

2. Sa presupunem, prin reducere la absurd, ca exista $l\in\boldsymbol{R}$ astfel incat

$$\lim_{x\to\infty}(F\circ F)(x)=l.$$

Inegalitatea din ipoteza se rescrie sub forma

$$(\ln(F\circ F)(x)-\ln x)'\ge 0,$$

pentru orice x$\in(0,\infty)$, ceea ce arata ca functia h: $(0,\infty)\to$**R**,data de

$$h(x)=\ln(F\circ F)(x)-\ln x,$$

pentru orice x$\in(0,\infty)$,este crescatoare.

Prin urmare functia g$:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$**,**data de

$$g(x)=\frac{(F\circ F)(x)}{x}.$$

pe orice x$\in(0,\infty)$, este crescatoare.

Atunci, pesntru orice x$\in[1\infty)$, avem

$$(F\circ F)(x)\ge F(F(1))x$$

De unde, folosinf ipoteza,

$$F(F(x))f(x)\ge F(F(1)),$$

deci

$$\lim_{x\to\infty}f(F(x))f(x)\ge F(F(1))>0.$$

Folosind regula lui l'Hospital, obtinem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(F\circ F)(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f\big(F(x)\big)f(x) \geq F\big(F(1)\big) > 0.$$

Pe de alta parte insa,avand in vedere presupunerea facuta,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(F\circ F)(x)}{x}=0,$$

Contradictie care incheie demonstratia.

3.

(1) Avem a=aba=ab·aba=a· $ab^2 \cdot a = aca$

Cum pentru orice x∈M avem

(ab)x=bxa=bxaba=abxba=aba·xb=a·xb=xab rezulta ca

cx=ab^2x=ab·bx=bx·ab=baxb=ab·xb=x· ab^2=xc

(2) Fie B=$\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{z} & u\end{pmatrix}$.Avem ABA=$A^2$B=$\hat{4}I_2$B=$\begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{x} & \hat{4} & \hat{y}\\ \hat{4} & \hat{z} & \hat{4} & \hat{u}\end{pmatrix}$, de unde $\hat{4}\hat{x} = \hat{4}$, $\ddot{4}\hat{y} = \ddot{0}$,

$\hat{4}\hat{z} = \hat{0}$ si $\hat{u}\hat{w} = \hat{4}$

Dar $\hat{4}\hat{x} = \hat{u}$ pentru $\hat{x} \in \{\dot{1}, \ddot{4}, \hat{7}, \widehat{10}\}$

$\ddot{4}\hat{y}$ = $\hat{0}$ pentru $\hat{y} \in \{\ddot{0}, \dot{3}, \ddot{6}, \bar{9}\}$

Analog rezulta ca $\hat{z} \in \{\ddot{0}, \bar{3}, \dot{6}, \dot{9}\}$ si $\hat{w} \in \{\dot{1}, \ddot{4}, \ddot{7}, \bar{1}\bar{0}\}$.

Asadar avem 4x4x4x4=256 matrice B∈ $M_2(\boldsymbol{Z}_{12})$ a.i. A=ABA.

4.

(1) Dacă x∈G, atunci a, ax, a^2x sunt elemente distincte ale lui G şi fie M_x={x,ax,a^2x}. Avem M_x=M_{ax}=M_{a^2x}. Dacă y∈G şi y∉M_y={y,ay,a^2y} atunci M_x∩M_y=∅.

Fie $x_1,x_2,\ldots,x_m$∈A cu un maxim posibil astfel încât x_j∉M_{xi}, ∀ i≠j. Avem A=Mx_1 ∪Mx_2 ∪…∪Mx_m de unde n=3m. Întradevăr, în caz contrar există x_{m+1}∈A astfel încât x_{m+1}∉ $\bigcup_{i=1}^{m} M_{xi}$ ceea ce contrazice maximalitatea lui m.

(2) Fie z=$\cos\frac{2\pi}{3}$+$\sin\frac{2\pi}{3}$ şi $x_1,x_2,\ldots,x_m$∈C^* astfel încât $|x_s| \neq |x_t|$, ∀ s≠t. Dacă A={$z^i x_y$ | 0≤3,≤j≤m} atunci A are n=3m numere distinct şi zx∈A, ∀ x∈A.