Concursul "Unirea"
Focşani, 27 ianuarie 2007

Clasa a IX-a

1. În triunghiul ABC, H şi O sunt ortocentrul, respectiv centrul cercului circumscris. Să se arate că distanţele de la H la laturile triunghiului sunt invers proporţionale cu distanţele de la O la aceleaşi laturi.

2. a) Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{D}$ două cercuri de centru O şi de raze $2r$ şi, respectiv, $5r$. Se consideră punctele variabile $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care avem

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

b) Un al treilea cerc $\mathcal{E}$ de centru O are raza $11r$, iar $C \in \mathcal{E}$ e un punct variabil. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

3. Fie $a, b > 0$, cu $ab = 1$. Să se arate că

$$\frac{a^2}{a^3+b} + \frac{b^2}{b^3+a} \geq \frac{2}{a^2+b^2}.$$

4. Se consideră în plan 30 de discuri disjuncte $D_1, D_2, \ldots, D_{30}$. Notăm cu $D = \bigcup_{k=1}^{30} D_k$ şi fie S aria lui D. Se ştie că proiecţiile mulţimii D pe axe sunt două segmente avînd suma lungimilor egală cu 1. Să se arate că

$$\frac{1}{160} < S < \frac{1}{4}.$$