

Concursul "Unirea"
Focsani, 27 ianuarie 2007

Clasa a VIII-a

1. Sa se gaseasca un numar natural si nenul care sa poata fi scris ca produs de doua numere naturale, unul cu 7 mai mare decât celalalt, dar si ca produs de doua numere naturale, unul cu 3 mai mare decat celalalt.

2. Se da expresia $E(x) = (x^2 - 2x + k)^2 + \frac{(x-1)^4}{(x^2-2x)^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{R}$

a) Sa se arate ca $E(-1)=E(3)$ si $E(-3)=E(5)$.

b) Sa se determine $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât ecuatia $E(x) = k + 1$ sa aiba cel puțin o solutie întreaga.

c) Sa se determine $k \in \mathbb{R}^*$, astfel încât ecuatia $E(x) = k + 1$ sa aiba exact o solutie reala.

3. Fie patrutul ABCD ($AB=a$) si punctele S,T,P, astfel încât $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{a}{2}$, $CT \parallel DS$, $CT = DS$, planul (ABCD) separa punctele S si T si P, simetricul mijlocului segmentului (CD) fata de dreapta AB.

a) Sa se calculeze $d(T, (SDA))$ si $d(T, AS)$

b) Sa se arate ca $AP \parallel (SBT)$

4. Fie patrulaterul ABCD în care $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CDB$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Daca $VO \perp (ABCD)$, $R \in \text{Int } \triangle OBC$, iar perpendiculara în R pe planul (ABCD) intersecteaza planele (VBC) si (VAD) în S, respectiv T, sa se arate ca:

a) $VA \perp VC \Leftrightarrow VB \perp VD$;

b) Dreptele BC, OR, VS sunt concurente;

c) Daca $OR \cap BC = \{M\}$, $OR \cap AD = \{E\}$ si $OM = OE$, atunci $RS + RT = 2VO$.