Concursul "Unirea"
Focşani, 27 ianuarie 2007

Clasa a XII-a

1. Determinaţi o funcţie derivabilă $F:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$F'(x)=\left|\frac{1}{2}+\cos x\right|,$$

pentru orice $x\in(0,2\pi)$.

2. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ şi $F:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o primitivă a sa astfel încât

$$xf(F(x))f(x)\geq F(F(x)),$$

pentru orice $x\in(0,\infty)$.

Să se arate că dacă există $\lim\limits_{x\to\infty}f(F(x))f(x)$, atunci nu există $l\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(F\circ F)(x)=l$.

3. Fie M o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie asociativă, notată multiplicativ.

a) Fie $a,b\in M$ astfel încât $a=aba$ şi $ax=xa$, $\forall x\in M$.

Dacă $c=ab^2$, arătaţi că $a=aca$ şi $cx=xc$, $\forall x\in M$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}\widehat{4} & \widehat{0}\\ \widehat{0} & \widehat{4}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$. Câte matrice $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{12})$ verifică egalitatea $A=ABA$?

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $a\in G$ astfel încât $a\neq e$, $a^2\neq e$ şi $a^3=e$ (adică a este element de ordinul 3 al grupului G).

a) Dacă o submulţime nevidă A a lui G are n elemente şi $ax\in A$, $\forall x\in A$, atunci $n=3m$ cu $m\in N^*$.

b) Dacă $n=3m$ cu $m\in N^*$, precizaţi un element z de ordin 3 al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ şi o submulţime A a lui $\mathbb{C}^*$ având n elemente astfel încât $zx\in A$, pentru orice $x\in A$.