Concursul "Unirea"
Focşani, 27 ianuarie 2007

Clasa a XI-a

1. Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{|\beta|x+\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Fie A o mulţime finită de numere naturale nenule, cu proprietatea
$$\sum_{x\in A}\frac{1}{x}\geq 2.$$
Să se arate că există $a \in A$ astfel încât $\sqrt[n]{a}$ este număr iraţional, pentru orice $n \geq 2$.

3. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi determinantul D_n de ordin n dat prin
$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x+2a & (x+a)\,a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & x+2a & (x+a)\,a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2a & (x+a)\,a & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x+2a & (x+a)\,a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x+2a \end{vmatrix}$$
a) Arătaţi că $D_n(x)=(x+2a)\,D_{n-1}(x)-a(x+a)D_{n-2}(x)$.
b) Determinaţi $D_n(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte nilpotentă dacă există $p \in N^*$ astfel ca $A^p = 0$ şi în acest caz se notează
$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}.$$
Să se arate că:
a) dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt nilpotente şi $AB = BA$, atunci matricea $A+B$ este nilpotentă şi $e^A e^B = e^{A+B}$;
b) dacă matricea A este nilpotentă, atunci $e^A e^{-A} = I_n$.