Concursul "Unirea"
Focşani, 27 ianuarie 2007

Clasa a X-a

1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, astfel încât

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_1 a_2 \ldots a_n = n + 1.$$

Să se arate că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}.$$

2. Considerăm un număr $k \in \mathbb{R}$ şi o funcţie injectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(xy) = f(x) f(y) + k$, pentru orice x, y din $\mathbb{R}$. Să se arate că f este impară.

3. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1}.$$

4. În cercul $\mathcal{C}(O, R)$ este înscris triunghiul ABC cu înălţimile $[AD]$, $[BE]$ şi $[CF]$. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB şi D', E', F' mijloacele înălţimilor $[AD]$, $[BE]$ şi $[CF]$.

a) Notând cu z_A, z_B, z_C şi z_O afixele punctelor A, B, C, O, să se exprime pătratele a^2, b^2, c^2 ale lungimilor laturilor triunghiului şi să se determine afixele punctelor A', B', C', D, E, F, D', E', F'.

b) Să se arate că există un punct K situat pe dreptele $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$.

c) Să se arate că $K \in (A'D'$, dar că $K \in (D'A'$ dacă şi numai dacă $\angle BAC < 90°$.

d) Să se arate că $OK^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3a^2b^2c^2R^{-2}$.