Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a IV-a

1. Suma a 3 numere este 175. Aflati numerele stiind ca doua sunt numere pare consecutive, iar al treilea numar este cu 3 mai mare decât suma lor.

SINUS 2(5)/2006

Solutie:
A-3p

I numar
II numar
III numar

1p B 1. 175 – 7 = 168
1p C 2. 168 : 4 = 42 (I numar)
1p D 3. 42 + 2 = 44 (II numar)
1p E 4. 42 + 44 + 3 = 89 (III numar)

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a IV-a

2. Un elev trebuie sa cumpere cu 29 de lei carti, caiete si pixuri. O carte costa 5 lei, un caiet costa 3 lei, iar un pix costa 2 lei.
   a) Descoperiti ce posibilitati de a cumpara are;
   b) Aflati care poate fi numarul maxim de carti;
   c) Aflati care poate fi numarul maxim de caiete;
   d) Aflati care poate fi numarul maxim de pixuri;

Laurentiu Spac, Suceava

Solutie:

	Carti		Caiete		Pixuri		Total
	Nr. buc.	Pret	Nr. buc.	Pret	Nr. buc.	Pret	
A	1	5	2	3	9	2	29
	1	5	4	3	6	2	29
2p	1	5	6	3	3	2	29
B	2	5	1	3	8	2	29
	2	5	3	3	5	2	29
2p	2	5	5	3	2	2	29
C	3	5	2	3	4	2	29
1,5p	3	5	4	3	1	2	29
D 1p	4	5	1	3	3	2	29
E 0,5p	b, c, d						

Clasa a IV-a

3. Mihai si Andrei au 54 si respectiv 36 de monede în colectiile lor. Fiecare baiat are câte o moneda falsa (mai usoara). Care este cel mai mic numar de cântariri pe care le poate face fiecare baiat cu o balanta negradata pentru a descoperi moneda falsa ?

Laurentiu Spac, Suceava

Solutie:
Mihai

<table>
<tr><td>2p</td><td>A</td><td>I cântarire</td><td colspan="6">18*</td><td>18</td><td>18</td></tr>
<tr><td>0,5p</td><td>B</td><td>II cântarire</td><td colspan="4">6*</td><td>6</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,5p</td><td>C</td><td>III cântarire</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">2*</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,5p</td><td>D</td><td>IV cântarire</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1*</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Andrei

<table>
<tr><td>2p</td><td>E</td><td>I cântarire</td><td colspan="5">12*</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td>0,5p</td><td>F</td><td>II cântarire</td><td colspan="3">4*</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,5p</td><td>G</td><td>III cântarire</td><td>2</td><td colspan="2">2*</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,5p</td><td>H</td><td>IV cântarire</td><td></td><td>1</td><td>1*</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Clasa a V-a

1. Determinati numerele naturale a, b, c, n astfel încât $3\left(6^c + 4 \cdot \overline{ab}\right) + 2^n = 865$.

SINUS 1-2005

Solutie:

Daca $c \neq 0$, atunci $3\left(6^c + 4 \cdot \overline{ab}\right)$ este numar par $\Rightarrow 2^n$ este impar $\Rightarrow n = 0$ ……..........2p

Obtinem: $6^c + 4\overline{ab} = 288 \Rightarrow 6^c \le 288 \Rightarrow c$ poate fi 1, 2 sau 3………………………….2p

$(a, b, c, n) \in \{(6,3,2,0);(1,8,3,0)\}$ …………………………………………………..1p

Daca $c = 0 \Rightarrow 3 + 12 \cdot \overline{ab} + 2^n = 865 \Leftrightarrow 12 \cdot \overline{ab} + 2^n = 862$ ………………………………1p

Pentru $n = 0 \Rightarrow 12 \cdot \overline{ab} = 861$ (F)

$n = 1 \Rightarrow 12 \cdot \overline{ab} = 860$ (F)

$n \ge 2 \Rightarrow 12 \cdot \overline{ab} + 2^n = 862 \Rightarrow 6 \cdot \overline{ab} + 2^{n-1} = 431$ (F)……………………………..1p

Clasa a V-a

2. Fie sirul de numere naturale: 85, 92, 99, 106, …, 2003.
   a) Determinati câte numere contine sirul.
   b) Aflati cîte cifre s-au utilizat pentru scrierea numerelor din sir.
   c) Precizati care este cifra de pe locul 365 din numarul 859299106113…2003.

Gabriela Bedrulea, Suceava

Solutie:

a) Numerele din sir se pot scrie:

$85 = 7 \cdot 12 + 1; 92 = 7 \cdot 13 + 1; ...; 2003 = 7 \cdot 286 + 1$ ……………………………………..2p

Sunt 286-11=275 numere……………………………………………………………1p

b) Sunt:

3 numere formate din doua cifre

128 numere formate din trei cifre ($106 = 7 \cdot 15 + 1; ...; 995 = 7 \cdot 142 + 1$)

144 numere formate din trei cifre ($1002 = 7 \cdot 143 + 1; ...; 2003 = 7 \cdot 286 + 1$)……………..1p

În total avem 966 cifre…………………………………………………………….1p

c) $365 - 6 = 359 = 119 \cdot 3 + 2$ ……………………………………………………….1p

Cifra de pe locul 365 este a doua cifra din numarul $(119 + 14) \cdot 7 + 1 = 922$ …………….1p

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a V-a

3. a) Determinati cifrele a si b, stiind ca $\overline{ab3} = 3^{a+b-1}$.
   b) Determinati cifrele a, b, c stiind ca: $\overline{aa0} + 3 \cdot \overline{b0} = \overline{ccc0}$.
   (Numerele sunt scrise în baza 10).

Artur Balauca, Botosani

Solutie:

a) $3^{a+b-1} \geq 100 \Rightarrow a+b-1 \geq 5$ ……………………………………………………..1p
   $3^{a+b-1} \leq 999 \Rightarrow a+b-1 \leq 6$ ……………………………………………………1p
   $\Rightarrow a+b-1=5$ ……………………………………………………………1p
   Finalizare ……………………………………………………………...1p

b) $\overline{aa0} + 3 \cdot \overline{b0} = \overline{ccc0} \Leftrightarrow 11a + 3b = 111c$ ……………………………….………..1p
   $3b \leq 27;\ \ 11a \leq 99 \Rightarrow c = 1$ …………………………………………………..…..1p
   $11a + 3b = 111 \Rightarrow a = 9,\ b = 4$ ……………………………….…..……….1p

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VI-a

1. Fie unghiul ascutit AOB, $(OE$ semidreapta opusa semidreptei $(OA$, iar punctele C si D alese de o parte si de alta a dreptei OA, astfel încât $m(\sphericalangle COA)=90^\circ; m(\sphericalangle DOB)=90^\circ$.

Daca $m(\sphericalangle DOE)$ este de $2\frac{3}{5}$ ori mai mare decât $m(\sphericalangle AOB)$, calculati $m(\sphericalangle EOF)$ si $m(\sphericalangle COF)$ stiind ca $(OF$ este bisectoarea unghiului AOD.

SINUS 1/2005

Rezolvare. Notam $m(\sphericalangle AOB)=x^\circ$;

Cazul I.: cum $m(\sphericalangle DOE)=\frac{13}{5}m(\sphericalangle AOB)$, rezulta ecuatia

$$x^\circ+\frac{13}{5}x^\circ=90^\circ \Rightarrow x^\circ=25^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB)=25^\circ;$$

$$m(\sphericalangle EOD)=65^\circ; m(\sphericalangle AOD)=115^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle DOF)=57^\circ30'; m(\sphericalangle EOF)=122^\circ30'; m(\sphericalangle COF)=147^\circ30';$$

Cazul II.: cum $m(\sphericalangle DOE)=\frac{13}{5}m(\sphericalangle AOB)$, rezulta ecuatia

$$\frac{13}{5}x^\circ+90^\circ-x^\circ=180^\circ \Rightarrow x^\circ=56^\circ15' \Rightarrow m(\sphericalangle EOD)=\frac{13}{5}56^\circ15' \Rightarrow m(\sphericalangle EOD)=146^\circ15';$$

$$m(\sphericalangle EOF)=163^\circ7'30'';0'; m(\sphericalangle COF)=90^\circ+16^\circ52'30'' \Rightarrow m(\sphericalangle COF)=106^\circ52'30'';$$

Figura (chiar daca considera un singur caz)..1p;
$m(\sphericalangle AOB)$ ....1p+1p;
$m(\sphericalangle EOF)$ ....1p+1p;
$m(\sphericalangle COF)$ ....1p+1p;

Clasa a VI-a

2.a) Calculati $S = 2+4+6+\cdots+2k,\ k \in \mathbb{N}^*$.

b) Sa se arate ca: $\dfrac{1}{2+4} + \dfrac{1}{2+4+6} + \dfrac{1}{2+4+6+8} + \cdots + \dfrac{1}{2+4+6+8+\cdots+2006} < \dfrac{1}{2}$.

Andrei Florea, profesor Bosanci

Rezolvare. a) $S = 2(1+2+3+\cdots+k)$ 1p;

$S = 2\cdot\dfrac{k(k+1)}{2} \Rightarrow S = k(k+1)$ 2p;

b) $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2+4} = \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$;

$\dfrac{1}{2+4+6} = \dfrac{1}{3\cdot 4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$;

…………………………..

$\dfrac{1}{2+4+6+\cdots+2006} = \dfrac{1}{1003\cdot 1004} = \dfrac{1}{1003} - \dfrac{1}{1004}$; ……………………………………2p;

$\dfrac{1}{2+4} + \dfrac{1}{2+4+6} + \dfrac{1}{2+4+6+8} + \cdots \dfrac{1}{2+4+6+8+\cdots+2006} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{1003} - \dfrac{1}{1004} =$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1004} < \dfrac{1}{2}$ 2p;

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VI-a

3. Sa se determine numerele naturale de trei cifre care au proprietatea ca patratul fiecaruia, micsorat de cinci ori, devine cub perfect.

Gheorghe Marchitan, Suceava

Rezolvare. scrie relatia $p^2 : 5 = q^3$ ……………………………………………………1p;

$p^2 = 5q^3$ si $p = 5k \Rightarrow q^3 = 5k^2 \Rightarrow k = 5h^3 \Rightarrow q^3 = 5^3h^6 \Rightarrow q = 5h^2$ 2p;

$p^2 = 5q^3 = 5\cdot 5^3 \cdot h^6 \Rightarrow p = 5^2 \cdot h^3, h \in \mathbb{N}^*$ 1p;

cum p are 3 cifre, rezulta ca

$100 \le p < 1000 \Rightarrow 100 \le 25h^3 < 1000 \Rightarrow 4 \le h^3 < 40 \Rightarrow h \in \{2,3\}$ 2p;

în concluzie, $p \in \{200,675\}$ 1p;

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VII-a

1. a) Determinati elementele multimii: $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\setminus\{2\}\mid\dfrac{2x+5}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$.

   b) Stiind ca numerele întregi x, y, z verifica relatia $xy=z^2+z(x-y)-5$, aflati $|x+y|$.

SINUS 2(5)/2006

Solutie:

a) $x-2/2x+5\Rightarrow x-2/2(x-2)+9\Rightarrow x-2/9\Rightarrow x-2\in\{\pm1,\pm3,\pm9\}$……………………1p

$x\in\{-7,-1,1,3,5,11\}$……………………………………………………………………1p

b) $xy=z^2+z(x-y)-5\Leftrightarrow(x+z)(y-z)=5$…………………………………………...…2p

$(x+z)(y-z)=(-5)(-1)=(+1)(+5)=(-1)(-5)=(+5)(+1)$……………………………2p

Finalizare $|x+y|=6$………………………………………………………………………1p

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VII-a

2. Sa se arate ca: $\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}+...+\frac{1}{25n}>\frac{6}{5},(\forall)\,n\in\mathbb{N}^*.$

Corneliu Romascu, Suceava

Solutie:

Utilizam inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b},(\forall)\,a,b>0,a\neq b$

Avem: $\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{25n}>\frac{4}{30n+1}$

…………………………

$\frac{1}{15n}+\frac{1}{15n+1}>\frac{4}{30n+1}$ ……………………………………………………………….4p

$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}+...+\frac{1}{25n}>\frac{4}{30n+1}\cdot 10n$ …………………………………………………..2p

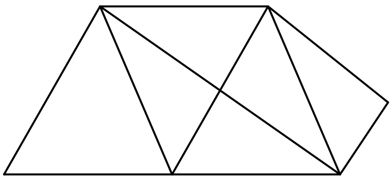
$\frac{40n}{30n+1}>\frac{6}{5}\Leftrightarrow 200n>180n+6$ (A)…………………………………………………………..1p

Clasa a VII-a

3. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AC \perp AD, DB \perp BC$ si $AB = BC$. Daca M este punctul de intersectie al bisectoarelor unghiurilor B si C ale trapezului, iar N simetricul lui M fata de mijlocul laturii BC, sa se demonstreze ca:
a) $ABCD$ este trapez isoscel;
b) $BMCN$ este dreptunghi;
c) $NC = \frac{1}{2} MN$.

Gabriela Bedrulea, Suceava

Solutie:



a) Figura…………………………………………………………………………………1p
Fie P mijlocul bazei (DC). $\triangle ABP$ ………………………………………………………..1p
$\triangle APD \equiv \triangle BPC (L.U.L.) \Rightarrow (AD) \equiv (BC)$ ……………………………………………………1p
b) $m(\sphericalangle BCD) = 60^\circ$; $\triangle PBC$ echilateral
$(BP$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$ si $(CA$ bisectoarea $\sphericalangle BCD$, deci $\{M\} = AC \cap PB$ ………………1p
$BMCN$ paralelogram si $m(\sphericalangle BMC) = 90^\circ$ …………………………………………………...1p
c) $MN = BC = \frac{DC}{2} = PB = 2MP = 2CN$ …………………………………………………….2p

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VIII-a

1. a) Aratati ca, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $\dfrac{x^2+y^2-x+2}{\sqrt{x^2-x+1}} \geq \sqrt{4y^2+4}$.

b) Gasiti perechile $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea $\dfrac{x^2+y^2-x+2}{\sqrt{x^2-x+1}} = \sqrt{4y^2+4}$.

SINUS 3(6)/2006

Rezolvare. a) inegalitatea se mai scrie: $x^2-x+1+y^2+1 \geq 2\sqrt{x^2-x+1} \cdot \sqrt{y^2+1}$; 1p;

$a = x^2-x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$; $b = y^2+1>0$ 1p;

se aplica inegalitatea mediilor si se obtine rezultatul..1p;

b) egalitatea are loc numai pentru $a=b$...1p;

$x^2-x+1 = y^2+1$; 1p;

$4x^2-4x+4 = 4y^2+4$; $(2x-1)^2 - 4y^2 = 1 \Rightarrow (2x-2y-1)(2x+2y-1) = 1, x, y \in \mathbb{Z}$; 1p;

obtine $\begin{cases} 2x-y-1=-1 \\ 2x+y-1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y-1=1 \\ 2x+y-1=1 \end{cases}$, de unde $(0,0),(1,0)$; 1p;

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VIII-a

2. Se considera dreptunghiul $ABCD$ si $E \notin (ABC)$ astfel încât $EA \perp (ABC)$. Fie $AM \perp EB, AN \perp EC$ si $AP \perp ED (M \in EB; N \in EC; P \in ED)$. Aratati ca:

a) $CE \perp (MNP)$;

b) punctele A, M, N, si P sunt coplanare;

c) $\frac{MB}{ME} + \frac{PD}{PE} = \frac{NC}{NE}$.

(***)

Rezolvare. a) $\left.\begin{array}{l} BC \perp AE \\ BC \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow BC \perp (ABE) \Rightarrow \begin{array}{l} BC \perp AM \\ AM \perp BE \end{array} \Rightarrow AM \perp (BCE)$ 1p;

$AM \perp (BCE) \Rightarrow \begin{array}{l} AM \perp EC \\ AN \perp EC \end{array} \Rightarrow EC \perp (AMN)$ 1p;

$EC \perp (AMN) \Rightarrow \begin{array}{l} AM \perp EC \\ PN \perp EC \end{array} \Rightarrow EC \perp (MNP)$ 1p;

b) $\left.\begin{array}{l} CE \perp (MNP) \\ CE \perp AN \end{array}\right| \Rightarrow AM \subset (MNP)$ 1p;

c) $\begin{array}{l} AB^2 = MB \cdot BE \\ AE^2 = ME \cdot BE \end{array} \Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{AB^2}{AE^2}$; analog $\frac{PD}{PE} = \frac{AD^2}{AE^2}$ 1p;

$\frac{MB}{ME} + \frac{PD}{PE} = \frac{AB^2 + AD^2}{AE^2} = \frac{BD^2}{AE^2} = \frac{AC^2}{AE^2}$ 1p;

$\begin{array}{l} AC^2 = NC \cdot CE \\ AE^2 = NE \cdot CE \end{array} \Rightarrow \frac{AC^2}{AE^2} = \frac{NC}{NE}$ 1p;

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VIII-a

3. Consideram numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ care satisfac $a < b < c$. Numim „etapa" înlocuirea fiecarui numar cu suma celorlalte doua.
   a) Comparati numerele scrise dupa a 2007-a „etapa".
   b) Este posibil ca dupa 10 „etape"sa obtinem trei numere a caror suma sa fie 2^{12} ?

Ecaterina Huluta, Suceava

Rezolvare. a) punem $S = a + b + c$ si avem:
0) $a < b < c$; .
1) $b + c > a + c > a + b$;..1p;
2) $S + a < S + b < S + c$ 2p;
3) $3S - a > 3S - b > 3S - c$;
4) $5S + a < 5S + b < 5S + c$;
5) $11S - a > 11S - b > 11S - c$;
6) $21S + a < 21S + b < 21S + c$;
7) $43S - a > 43S - b > 43S - c$;
8) $85S + a < 85S + b < 85S + c$;
9) $171S - a > 171S - b > 171S - c$;
10) $341S + a < 341S + b < 341S + c$; ..... constata ca dupa fiecare "etapa"de ordin 1,3,5,...
...,$2n+1$,...numerele scrise sunt ordonate strict descrescator....................................1p;
concluzia pentru "etapa" 2007...1p;
b) $3 \cdot 341S + a + b + c = 2^{12}$ 1p;
$1024S = 2^{12} \Rightarrow S = 4$; dar minimul sumei S este $1 + 2 + 3 = 6$ 1p;

Clasa a IX-a

1. Fie triunghiurile ABC si $A'B'C'$ cu centrele de greutate G si G'. Consideram punctele A'', B'', C'' astfel încât patrulaterele $GAA'A''$, $GBB'B''$ si $GCC'C''$ sa fie paralelograme. Aratati ca:
   a) $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=3\overline{GG'}$; b) $\overline{AB}+\overline{A''B''}=\overline{A'B'}$; c) triunghiurile $A'B'C'$ si $A''B''C''$ au acelasi centru de greutate.

Gheorghe Marchitan, Suceava
SINUS 3(6)/2006

Solutie: a) $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=\left(\overline{AG}+\overline{GG'}+\overline{G'A'}\right)+\left(\overline{BG}+\overline{GG'}+\overline{G'B'}\right)+\left(\overline{CG}+\overline{GG'}+\overline{G'C'}\right)=$
$=\left(\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}\right)+3\overline{GG'}+\left(\overline{G'A'}+\overline{G'B'}+\overline{G'C'}\right)=3\overline{GG'}$.
b) $\overline{A''B''}=\overline{GB''}-\overline{GA''}=\overline{BB'}-\overline{AA'}=\left(\overline{BG}+\overline{GG'}+\overline{G'B'}\right)-\left(\overline{AG}+\overline{GG'}+\overline{G'A'}\right)=$
$=\overline{BG}-\overline{AG}+\overline{G'B'}-\overline{G'A'}=-\overline{AB}+\overline{A'B'}\Rightarrow \overline{AB}+\overline{A''B''}=\overline{A'B'}$.
c) Daca G'' este centrul de greutate al triunghiului $A''B''C''$, atunci $\overline{A'A''}+\overline{B'B''}+\overline{C'C''}=3\overline{G'G''}$, dar $\overline{A'A''}+\overline{B'B''}+\overline{C'C''}=\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}=\overline{0}$, de unde obtinem $3\overline{G'G''}=\overline{0}\Rightarrow G'=G''$.

2. a) Sa se arate ca produsul a patru numere întregi consecutive este egal cu patratul unui numar întreg minus unu.

   b) Sa se determine multimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,\sqrt{n^3-n+\frac{1}{n+2}}\in\mathbb{Q}\right\}$.

Gheorghe Marchitan, Suceava

Solutie: a) $k(k+1)(k+2)(k+3)+1=\left(k^2+3k+1\right)^2,(\forall)k\in\mathbb{Z}$.

b) Expresia de sub radical se scrie: $n^3-n+\frac{1}{n+2}=\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)+1}{n+2}=\frac{\left(n^2+n-1\right)^2}{n+2}$, deci

$\sqrt{n^3-n+\frac{1}{n+2}}=\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n+2}},n\in\mathbb{N}.$. Pentru ca $\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n+2}}\in\mathbb{Q}$, este necesar ca n sa fie de forma

$k^2-2,k\in\mathbb{N},k\geq 2$. În concluzie se obtine $A=\left\{k^2-2\,|\,k\in\mathbb{N},k\geq 2.\right\}$.

3. Sa se demonstreze ca, daca a, b, c sunt trei numere reale, strict pozitive, al caror produs este egal cu unu, dintre care doua sunt mai mici sau egale cu $1/2$, atunci $6(a+b+c)-15\leq a^2+b^2+c^2$.

Catalin Tigaeru, Suceava

Solutie: Putem presupune ca $a,b\leq\frac{1}{2}$; punem $c=\frac{1}{ab}$ si inegalitatea devine

$6\left(a^3b^2+a^2b^3+ab\right)-15a^2b^2\leq a^4b^2+a^2b^4+1,\forall a,b\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, ceea ce, dupa ce trecem totul într-un membru si dupa ce adunam si scadem $2a^3b^3$, este echivalent cu

$$a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4 + 2a^3b^3 - 6a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^2b^2 - 6ab + 1 \geq 0, \quad 0 < a, b \leq \frac{1}{2},$$

de unde $a^2b^2(a-b)^2 + 2a^3b^3 + a^2b^2\left(15 - 6(a+b)\right) - 6ab + 1 \geq 0, \forall a, b \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Este suficient sa demonstram ca $2a^3b^3 + a^2b^2\left(15 - 6(a+b)\right) - 6ab + 1 \geq 0, \forall a, b \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Avem succesiv:

$$2a^3b^3 + 15a^2b^2 - 6a^2b^2(a+b) - 6ab + 1 = 9a^2b^2 - 4a^3b^3 - 6ab + 1 + 6a^2b^2\left(ab - (a+b) + 1\right) =$$

$$= (1-ab)\left(4a^2b^2 - 5ab + 1\right) + 6a^2b^2(a-1)(b-1) = (1-ab)^2(1-4ab) + 6a^2b^2(a-1)(b-1) \geq 0.$$

În conditiile din ipoteza, se întâmpla ca $(a-1)(b-1) \geq 0, 1 - 4ab \geq 0,$ deci

$$2a^3b^3 + a^2b^2\left(15 - 6(a+b)\right) - 6ab + 1 \geq 0, \forall a, b \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

ceea ce încheie rezolvarea. Pentru $a = \frac{1}{2},\ b = 1, c = 2$ obtinem $6(a+b+c) - 15 = 6 \cdot \frac{7}{2} - 15 = 6$ în timp ce $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{21}{4}$, ceea ce justifica conditiile ipotezei.

Clasa a X-a

1. Stiind ca $(\exists)\, x, y \in \mathbb{R}_+$ pentru care $7^y = 9$ si $5^x = 4$ sa se determine semnul expresiei $E(x,y) = x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3$.

Felicia Boeru si Constantin Boeru, Slatina
SINUS 1(4)/2006

Solutie: Expresia se aduce la forma $E(x,y) = (x+y)^2 (x-y)$.

Pentru $x < y \Rightarrow E(x,y) < 0$.

Pentru $x \geq y$, din $7^y = 9 \Rightarrow y > 1$, iar din $4 = 5^x \geq 5^y \Rightarrow 4 \geq 5^y$. Atunci :

$\frac{4}{9} \geq \frac{5^y}{7^y} = \left(\frac{5}{7}\right)^y > \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{4}{9} > \frac{5}{7} \Leftrightarrow 28 > 45$ (fals). Deci $x < y$ si atunci $E(x,y) < 0$.

2. Se considera numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, strict pozitive, cu proprietatea ca $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Sa se demonstreze ca

$$\left(\frac{\log_{a_1} a_2}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\log_{a_2} a_3}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\log_{a_{n-1}} a_n}{a_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\log_{a_n} a_1}{a_n}\right)^2 \geq n^2.$$

Livia Balaci, Suceava

Solutie: Putem scrie:

$$\left[\left(\frac{\log_{a_1} a_2}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\log_{a_2} a_3}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\log_{a_{n-1}} a_n}{a_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\log_{a_n} a_1}{a_n}\right)^2\right]\left[a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right] \overset{(C.B.S)}{\geq}$$

$$\geq \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \cdots + \log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_1\right)^2 \geq n^2 \sqrt[n]{\left(\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdots \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_1\right)^2} = n^2.$$

S-a tinut cont ca $a_1, a_2, \ldots a_n \in (0,1)$ si ca $\log_{a_1} a_2, \log_{a_2} a_3, \ldots, \log_{a_n} a_1 > 0$.

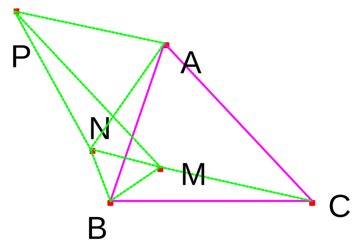
3. Consideram triunghiul *ABC* si fie *M* un punct din plan. Sa se arate ca, daca alegem punctele *N* si *P* astfel încât triunghiurile *ABC*, *NBM* si *NAP* sa fie direct asemenea, atunci patrulaterul *APMC* este paralelogram (eventual degenerat).

Catalin Tigaeru, Suceava

Solutie: Vom nota cu *a*, *b*, *c*, *m*, *n* si *p* afixele punctelor respectiv *A*, *B*, C, *M*, *N* si *P*. Din ipoteza, avem $\frac{a-b}{c-b} = \frac{n-b}{m-b} = \frac{n-a}{p-a}$.

Din $\frac{a-b}{c-b} = \frac{n-b}{m-b}$, deducem $\frac{a-b}{c-a} = \frac{n-b}{m-n}$, de unde (1) $c - a = \frac{(m-n)(a-b)}{n-b}$.

Din $\frac{n-b}{m-b} = \frac{n-a}{p-a}$ deducem ca $\frac{n-b}{m-n} = \frac{n-a}{p-n}$, de unde $\frac{p-n}{m-n} = \frac{n-a}{n-b}$.



Mai departe avem $\frac{p-m}{m-n}=\frac{b-a}{n-b}$, ceea ce conduce la (2) $p-m=\frac{(m-n)(b-a)}{n-b}$.
Din (1) si (2) se obtine $c-a=-(p-m)$, ceea ce înseamna ca patrulaterul $APMC$ este un paralelogram, eventual degenerat.

Clasa a XI-a

1. Fie sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = x_1 = 1$ si $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\ 2}+1}{x_{n-1}}, (\forall) n \geq 1$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1}\cdot x_n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2n}}$.

Cristian Amoraritei, Suceava
SINUS 2(5)/2006

Solutie: Din $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{x_{n-1}} \Rightarrow x_{n+1}\cdot x_{n-1} - x_n^2 = 1$; avem $x_n\cdot x_{n+2} - x_{n+1}^2 = x_{n-1}\cdot x_{n+1} - x_n^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$ ceea ce implica $\dfrac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}} = 3, (\forall) n\in\mathbb{N}$.

Din relatia de recurenta $x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0, (\forall) n\in\mathbb{N}$ obtinem :

$$x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^{2n}}{2^{2n+1}} + \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^{2n}}{2^{2n+1}}, (\forall) n\in\mathbb{N} \text{ de unde } \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}\cdot x_n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2n}} = \frac{5-\sqrt{5}}{5}.$$

2. Se considera o matrice $A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea ca $\det(A) = k^2, k\in\mathbb{N}$. Sa se demonstreze ca, daca $tr(A)+2k\neq 0$ sau $tr(A)-2k\neq 0$, atunci exista $a\in\mathbb{Z}^*, X\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^2 = aA$. Sa se dea un exemplu de matrice $A\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}), A\neq O_2$, care are proprietatea ca, pentru orice $a\in\mathbb{Z}^*$, ecuatia $X^2 = aA$ nu are solutii $X\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$.

Catalin Tigaeru, Suceava

Solutie: Matricea A verifica ecuatia $A^2 - tr(A)A + k^2 I_2 = O_2$, de unde rezulta ca $A^2 = tr(A)A - k^2 I_2$. Sa presupunem ca $tr(A)+2k\neq 0$; atunci matricea $X = A + kI_2$ satisface $(i)\ X\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ si $(ii)\ X^2 = A^2 + 2kA + k^2 I_2 = tr(A)A \cancel{-k^2 I_2} + 2kA \cancel{+k^2 I_2} =$ $= \left(tr(A)+2k\right)A$, deci, daca punem $a = tr(A)+2k$, atunci $X^2 = aA$, cu $a\in\mathbb{Z}^*$ si $X\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. Daca $2k + tr(A) = 0$, atunci $2k - tr(A)\neq 0$ si se pune $X = A - kI_2$, rationamentul repetându-se ca mai sus, cu $a = tr(A) - 2k$. Daca alegem o matrice $A\in \mathrm{M}_2(Z)$ cu proprietatile: $tr(A) = \det(A) = 0$ si $A\neq O_2$, atunci ecuatia $X^2 = aA$, cu $a\in\mathbb{Z}^*$, nu are solutii. Daca ar exista o solutie $X\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci ar rezulta ca $tr(X) = \det(X) = 0$, de unde $X^2 = O_2 \neq aA$. Conditia $tr(A)+2k\neq 0$ sau $tr(A)-2k\neq 0$ asigura faptul ca $A\neq O_2$.

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = O_2, tr(A) = \det(A) = 0.$

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir dat prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left[\dfrac{n^3}{a_n}\right], (\forall) n\geq 1$. Sa se determine a_{2006}, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n^2}{a_n}\right\}$.

Marius Marchitan, Suceava

Solutie: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 8$, $a_4 = 3$, $a_5 = 21$ si se arata prin inductie ca:

$$a_n = \begin{cases} n-1, & n \text{ par} \\ n^2 - n + 1, & n \text{ impar} \end{cases}, \quad (\forall) n \geq 4.$$

Într-adevar, daca $a_n = n-1$ atunci:

$$a_{n+1} = \left[\frac{n^3}{n-1}\right] = \left[\frac{n^3-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right] = \left[n^2 + n + 1 + \frac{1}{n-1}\right] = n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1.$$

$$a_{n+2} = \left[\frac{(n+1)^3}{n^2+n+1}\right] = \left[\frac{(n+1)(n^2+n+1) + n^2 + n}{n^2+n+1}\right] = \left[n + 1 + \frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right] = n+1.$$

Atunci $a_{2006} = 2005$ si $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$ deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Fie $b_n = \left\{\dfrac{n^2}{a_n}\right\} = \dfrac{n^2}{a_n} - \left[\dfrac{n^2}{a_n}\right] = \begin{cases} \dfrac{n^2}{n-1} - \left[\dfrac{n^2}{n-1}\right], & n \text{ par} \\ \dfrac{n^2}{n^2-n+1} - \left[\dfrac{n^2}{n^2-n+1}\right], & n \text{ impar} \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{n^2}{n-1} - \left[n + 1 + \dfrac{1}{n-1}\right], & n \text{ par} \\ \dfrac{n^2}{n^2-n+1} - \left[1 + \dfrac{n-1}{n^2-n+1}\right], & n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{n^2}{n-1} - (n+1), & n \text{ par} \\ \dfrac{n^2}{n^2-n+1} - 1, & n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}, & n \text{ par} \\ \dfrac{n-1}{n^2-n+1}, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Clasa a XII-a

1. Pe multimea finita M consideram operatia asociativa ”$\circ$”, care are proprietatea ca exista $a\in M$ astfel încât $x\circ y\neq a,(\forall)x,y\in M$ si $a\circ x_1=a\circ x_2\Rightarrow x_1=x_2,(\forall)x_1,x_2\in M\setminus\{a\}$.
Sa se arate ca exista $b\in M\setminus\{a\}$ astfel încât $a\circ a=b\circ b$ si sa se dea un exemplu de o operatie cu aceasta proprietate definita pe o multime cu trei elemente.

Catalin Tigaeru, Suceava
SINUS 3(6)/2006

Solutie: Din $x\circ y\neq a,(\forall)x,y\in M$ rezulta ca functia $f_a:M\to M$, $f_a(x)=a\circ x$ nu este surjectiva ($\operatorname{Im} f_a\subseteq M\setminus\{a\}$), deci nici injectiva (deoarece M este finita). Atunci exista $x_1\neq x_2$ astfel ca $a\circ x_1=a\circ x_2$. Din conditia $a\circ x_1=a\circ x_2\Rightarrow x_1=x_2,(\forall)x_1,x_2\in M\setminus\{a\}$ rezulta ca unul din cele doua elemente x_1,x_2 este egal cu a si celalalt este diferit de a. Fie $x_1=a,x_2=b\neq a$ care verifica egalitatea $a\circ a=a\circ b$.

Cum operatia "$\circ$" este asociativa atunci $(a\circ a)\circ b=a\circ(a\circ b)$. Dar $a\circ a=a\circ b$ deci $(a\circ a)\circ b=(a\circ b)\circ b=a\circ(b\circ b)$. Obtinem ca $a\circ(a\circ b)=a\circ(b\circ b)$. Cum $a\circ b\neq a$, $b\circ b\neq a$ rezulta ca: $a\circ b=b\circ b$. Dar $a\circ a=a\circ b$, deci $a\circ a=b\circ b$.

Un exemplu de astfel de operatie este descrisa de tabelul urmator:

$\circ$	c	b	a
c	c	b	b
b	b	c	c
a	b	c	c

2. Sa se calculeze $\int\frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}\cdot e^x dx,\ x>0.$

Gheorghe Marchitan, Suceava

Solutie: $\int\frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}\cdot e^x dx=\int\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)e^x dx=4\int\sqrt{x}\left(e^x\right)'dx-2\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'e^x dx=$

$=4e\sqrt{x}-\cancel{2\int\frac{e^x}{\sqrt{x}}}dx-2\frac{e^x}{\sqrt{x}}+\cancel{2\int\frac{e^x}{\sqrt{x}}}dx=\frac{2(2x-1)e^x}{\sqrt{x}}+C$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie ce admite primitive si îndeplineste conditia:
$f(x-1)+f(x+1)=x+f(x),(\forall)x\in\mathbb{R}.$
Sa se arate ca exista $a\in(0,6)$ astfel încât $f(a)=3.$

Marius Marchitan, Suceava

Solutie: Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=f(x)-x$ ce admite primitive. Relatia din ipoteza se rescrie $g(x-1)+x-1+g(x+1)+x+1=x+g(x)+x$, adica $g(x-1)+g(x+1)=g(x),(\forall)x\in\mathbb{R}.$

Atunci $g(x+3)=g(x+2)-g(x+1)=-g(x)$, deci $g(x)+g(x+3)=0,(\forall)x\in\mathbb{R}$. Rezulta $G(x+3)+G(x)=c,(\forall)x\in\mathbb{R}$, unde $G\in\int g(x)dx.$

Astfel $G(x+6)-G(x)=G(x+6)-G(x+3)+G(x+3)-G(x)=0,(\forall)x\in\mathbb{R}$. Daca $F\in\int f(x)\,dx$ atunci $G(x)=F(x)-\frac{x^2}{2}+c',(\forall)x\in\mathbb{R}$, deci $\frac{F(x+6)-F(x)}{6}=x+3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Pentru $x=0$ obtinem $\frac{F(6)-F(0)}{6-0}=3$ si aplicând teorema lui Lagrange functiei F pe intervalul $[0,6]$ rezulta ca exista $a\in(0,6)$ astfel încât $f(a)=3$.