Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a IV-a

1. Suma a 3 numere este 175. Aflati numerele stiind ca doua sunt numere pare consecutive, iar al treilea numar este cu 3 mai mare decât suma lor.

2. Un elev trebuie sa cumpere cu 29 de lei carti, caiete si pixuri. O carte costa 5 lei, un caiet costa 3 lei, iar un pix costa 2 lei.
   a) Descoperiti ce posibilitati de a cumpara are.
   b) Aflati care poate fi numarul maxim de carti.
   c) Aflati care poate fi numarul maxim de caiete.
   d) Aflati care poate fi numarul maxim de pixuri.

3. Mihai si Andrei au 54 si respectiv 36 de monede în colectiile lor. Fiecare baiat are câte o moneda falsa (mai usoara). Care este cel mai mic numar de cântariri pe care le poate face fiecare baiat cu o balanta negradata pentru a descoperi moneda falsa ?

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza cu 7 puncte
Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a V-a

1. Determinati numerele naturale *a, b, c, n* astfel încât $3\left(6^c + 4\cdot\overline{ab}\right) + 2^n = 865$.

2. Fie sirul de numere naturale: 85, 92, 99, 106, …, 2003.
   a) Determinati câte numere contine sirul.
   b) Aflati cîte cifre s-au utilizat pentru scrierea numerelor din sir.
   c) Precizati care este cifra de pe locul 365 din numarul 859299106113…2003.

3. a) Determinati cifrele *a* si *b*, stiind ca $\overline{ab3} = 3^{a+b-1}$.
   b) Determinati cifrele *a, b, c* stiind ca: $\overline{aa0} + 3\cdot\overline{b0} = \overline{ccc0}$.
   (Numerele sunt scrise în baza 10).

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.

Clasa a VI-a

1. Fie unghiul ascutit AOB, $(OE$ semidreapta opusa semidreptei $(OA$, iar punctele C si D alese de o parte si de alta a dreptei OA, astfel încât $m(\sphericalangle COA)=90^\circ; m(\sphericalangle DOB)=90^\circ$.

   Daca $m(\sphericalangle DOE)$ este de $2\frac{3}{5}$ ori mai mare decât $m(\sphericalangle AOB)$, calculati $m(\sphericalangle EOF)$ si $m(\sphericalangle COF)$ stiind ca $(OF$ este bisectoarea unghiului AOD.

2. a) Calculati $S=2+4+6+\cdots+2k,\ k\in\mathbb{N}^*$.

   b) Sa se arate ca: $\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}+\cdots+\frac{1}{2+4+6+8+\cdots+2006}<\frac{1}{2}$.

3. Sa se determine numerele naturale de trei cifre care au proprietatea ca patratul fiecaruia, micsorat de cinci ori, devine cub perfect.

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h

Clasa a VII-a

4. a) Determinati elementele multimii: $M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \mid \frac{2x+5}{x-2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

   b) Stiind ca numerele întregi x, y, z verifica relatia $xy = z^2 + z(x-y) - 5$, aflati $|x+y|$.

5. Sa se arate ca: $\frac{1}{5n+1} + \frac{1}{5n+2} + ... + \frac{1}{25n} > \frac{6}{5}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

6. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), avem $AC \perp AD, DB \perp BC$ si $AB = BC$. Daca M este punctul de intersectie al bisectoarelor unghiurilor B si C, ale trapezului, iar N simetricul lui M fata de mijlocul laturii BC, sa se demonstreze ca:
   a) $ABCD$ este trapez isoscel;
   b) $BMCN$ este dreptunghi;
   c) $NC = \frac{1}{2} MN$.

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a VIII-a

1. a) Aratati ca, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $\dfrac{x^2+y^2-x+2}{\sqrt{x^2-x+1}} \geq \sqrt{4y^2+4}$.

   b) Gasiti perechile $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea $\dfrac{x^2+y^2-x+2}{\sqrt{x^2-x+1}} = \sqrt{4y^2+4}$.

2. Se considera dreptunghiul $ABCD$ si $E \notin (ABC)$ astfel încât $EA \perp (ABC)$. Fie $AM \perp EB, AN \perp EC$ si $AP \perp ED(M \in EB; N \in EC; P \in ED)$. Aratati ca:

   a) $CE \perp (MNP)$;

   b) punctele A, M, N, si P sunt coplanare;

   c) $\dfrac{MB}{ME} + \dfrac{PD}{PE} = \dfrac{NC}{NE}$.

3. Consideram numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ care satisfac $a < b < c$. Numim „etapa” înlocuirea fiecarui numar cu suma celorlalte doua.

   a) Comparati numerele scrise dupa a 2007-a „etapa”.

   b) Este posibil ca dupa 10 „etape”sa obtinem trei numere a caror suma sa fie 2^{12} ?

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.

Concursul interjudetean de matematica al Revistei SINUS
Editia a II-a, Suceava, 18 noiembrie 2006
Etapa finala

Clasa a IX-a

1. Fie triunghiurile ABC si $A'B'C'$ cu centrele de greutate G si G'. Consideram punctele A'', B'', C'' astfel încât patrulaterele $GAA'A''$, $GBB'B''$ si $GCC'C''$ sa fie paralelograme. Aratati ca:
   a) $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}=3\overline{GG'}$; b) $\overline{AB}+\overline{A''B''}=\overline{A'B'}$; c) triunghiurile $A'B'C'$ si $A''B''C''$ au acelasi centru de greutate.

2. a) Sa se arate ca produsul a patru numere întregi consecutive este egal cu patratul unui numar întreg minus unu.

   b) Sa se determine multimea $A=\left\{n\in\mathbb{N} \mid \sqrt{n^3-n+\frac{1}{n+2}}\in\mathbb{Q}\right\}$.

3. Sa se demonstreze ca, daca *a*, *b*, *c* sunt trei numere reale, strict pozitive, al caror produs este egal cu unu, dintre care doua sunt mai mici sau egale cu $1/2$, atunci $6(a+b+c)-15\le a^2+b^2+c^2$.

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.

Clasa a X-a

1. Stiind ca $(\exists)\, x, y \in \mathbb{R}_+$ pentru care $7^y = 9$ si $5^x = 4$ sa se determine semnul expresiei $E(x, y) = x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3$.

2. Se considera numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, strict pozitive, cu proprietatea ca $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Sa se demonstreze ca
$$\left(\frac{\log_{a_1} a_2}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\log_{a_2} a_3}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\log_{a_{n-1}} a_n}{a_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\log_{a_n} a_1}{a_n}\right)^2 \geq n^2.$$

3. Consideram triunghiul *ABC* si fie *M* un punct din plan. Sa se arate ca, daca alegem punctele *N* si *P* astfel încât triunghiurile *ABC*, *NBM* si *NAP* sa fie direct asemenea, atunci patrulaterul *APMC* este paralelogram (eventual degenerat).

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.

Clasa a XI-a

1. Fie sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = x_1 = 1$ si $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1}{x_{n-1}}, (\forall) n \geq 1$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1} \cdot x_n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2n}}$.

2. Se considera o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea ca $\det(A) = k^2, k \in \mathbb{N}$. Sa se demonstreze ca, daca $tr(A) + 2k \neq 0$ sau $tr(A) - 2k \neq 0$, atunci exista $a \in \mathbb{Z}^*, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^2 = aA$. Sa se dea un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), A \neq O_2$, care are proprietatea ca, pentru orice $a \in \mathbb{Z}^*$, ecuatia $X^2 = aA$ nu are solutii $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir dat prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left[\dfrac{n^3}{a_n}\right], (\forall) n \geq 1$. Sa se determine a_{2006}, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\dfrac{n^2}{a_n}\right\}$.

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.

Clasa a XII-a

1. Pe multimea finita M consideram operatia asociativa ”$\circ$”, care are proprietatea ca exista $a \in M$ astfel încât $x \circ y \neq a, (\forall) x, y \in M$ si $a \circ x_1 = a \circ x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, (\forall) x_1, x_2 \in M \setminus \{a\}$.
   Sa se arate ca exista $b \in M \setminus \{a\}$ astfel încât $a \circ a = b \circ b$ si sa se dea un exemplu de o operatie cu aceasta proprietate definita pe o multime cu trei elemente.

2. Sa se calculeze $\int \frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}} \cdot e^x dx,\ x > 0.$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie ce admite primitive si îndeplineste conditia:
   $f(x-1) + f(x+1) = x + f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}.$
   Sa se arate ca exista $a \in (0,6)$ astfel încât $f(a) = 3.$

Nota: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se puncteaza de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2h.