OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ, 6 mai 2006, Iaşi

CLASA aV-a

I. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulțimea numerelor naturale de cinci cifre având suma cifrelor egală cu **30** şi cu $\mathcal{N}$ submulțimea numerelor din $\mathcal{M}$ care coincid cu răsturnatele lor. Să se afle:

1) Cel mai mic şi cel mai mare element din mulțimea $\mathcal{M}$.

2) Cel mai mic şi cel mai mare element din mulțimea $\mathcal{N}$.

II. Să se arate că oricare ar fi cifra $\boldsymbol{a}$, următoarele afirmații sunt adevărate:

1) Numărul $\overline{a57}$ împărțit la **4** dă restul **1.**

2) Numărul $\boldsymbol{n} = 51^{\overline{75a}} + 43^{\overline{a75}} + 62^{\overline{a57}}$ este divizibil cu **10.**

III. Se dă mulțimea $\boldsymbol{A}$**={ 1, 2, 3, …, 2005 }.** Se cere:

1) Scrieți submulțimile mulțimii $\boldsymbol{A}$ formate din două elemente cu suma egală cu **2006**. Aflați numărul acestor submulțimi.

2) Aflați numărul submulțimilor lui $\boldsymbol{A}$ formate din patru elemente, astfel încât suma a două elemente este egală cu suma celorlalte două şi este egală cu **2006**.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore

CLASA aVI-a

I. Numerele raționale pozitive $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ şi $\boldsymbol{z}$ sunt invers proporționale cu numerele $\mathbf{\frac{5}{6}, \frac{1}{2}}$ şi $\mathbf{\frac{1}{3}}$**.** Se cere:

a) Aflați raportul dintre cel mai mic număr şi suma celorlalte două.

b) Cât la sută din $\boldsymbol{y}$ reprezintă $\boldsymbol{x}$?

c) Ştiind că $\boldsymbol{x, y, z} \in \boldsymbol{N^*}$ şi că cel mai mic multiplu comun al lui $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{y}$ este egal cu ***60***, să se afle $\boldsymbol{x, y}$ şi $\boldsymbol{z}$.

II. Fie numerele $\boldsymbol{a, b, c} \in \boldsymbol{N^*}$ care verifică relația

$$\mathbf{51 \cdot \boldsymbol{a} + 85 \cdot \boldsymbol{b} + 102 \cdot \boldsymbol{c} = 2006}$$

Să se afle valoarea minimă a sumei $\boldsymbol{a} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

III. Pe diagonala [AC] a rombului ABCD se consideră punctele E şi F astfel încât [CE]≡[EF]≡[FA]. Notăm BE ∩ CD={M}şi BF ∩ AD={N}.

Să se arate că:

a) ΔBCM≡ΔBAN;

b) MN ‖ AC;

c) $MN = \frac{AC}{2}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore

Observație: Comisia de concurs a hotărât ca, simultan cu fişa cu subiectele tehnoredactate, elevii să primească problema III şi cu următoarea formulare echivalentă:

Fie triunghiurile ABC şi ADC, $B \neq D$, isoscele şi congruente, de bază AC. Pe latura [AC] se consideră punctele E şi F astfel încât $[CE] \equiv [EF] \equiv [FA]$. Notăm $BE \cap CD = \{M\}$ şi $BF \cap AD = \{N\}$.

Să se arate că:

a) $\Delta BCM \equiv \Delta BAN$;

b) $MN \parallel AC$;

c) $MN = \frac{AC}{2}$.