Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

5 martie 2005

CLASA A VII-a

Subiectul 1. Arătaţi că pentru orice $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ suma

$$S_a = \overline{a}^{2005} + \overline{1a}^{2005} + \overline{2a}^{2005} + \cdots + \overline{9a}^{2005}$$

este divizibilă cu 10.

Subiectul 2. Se consideră triunghiul ABC în care M este mijlocul segmentului AB iar D este piciorul bisectoarei din B. Să se arate că dacă $MD \perp BD$, atunci $AB = 3BC$.

Subiectul 3. Notăm cu m_a, m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor reale strict pozitive x şi y.

a) Dacă $m_a + m_g = y - x$, determinaţi valoarea raportului x/y.

b) Arătaţi că există o singură pereche de numere naturale nenule diferite (x, y) pentru care $m_a + m_g = 40$.

Subiectul 4. În triunghiul ABC se duce bisectoarea CD unde $D \in AB$. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC coincide cu centrul cercului înscris triunghiului BCD. Demonstraţi că $AC^2 = AD \cdot AB$.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt oblgatorii

Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

5 martie 2005

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Fie M mulţimea numerelor pozitive, exprimate prin fracţii subunitare, periodice şi care au perioada formată din zece cifre distincte.

a) Să se afle media aritmetică a elemetelor mulţimii M.

b) Să se arate că există un număr natural n, $1 < n < 10^{10}$, astfel încât $n \cdot a - a \in \mathbf{N}$, oricare ar fi $a \in M$.

Subiectul 2. Fie $ABCD$ şi $ABEF$ pătrate situate în plane perpendiculare şi O intersecţia dreptelor AE şi BF. Dacă $AB = 4$, calculaţi:

a) distanţa de la punctul B la dreapta de intersecţie a planelor (DOC) şi (DAF);

b) distanţa dintre dreptele AC şi BF.

Subiectul 3. Să se arate că, dacă cercurile circumscrise feţelor unui tetraedru au raze egale, atunci muchiile opuse ale tetraedrului sunt congruente două câte două.

Subiectul 4. Arătaţi că oricum am numerota vârfurile unui cub cu cifrele de la 1 la 8, există două vârfuri diagonal opuse (relativ la diagonala mare), unite printr-o linie frântă formată din trei muchii ale cubului, astfel încât suma celor patru numere scrise în vârfurile acestei linii frânte să fie cel puţin 21.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii

Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A IX-A

Subiectul 1. a) Arătaţi că dacă $x, y > 0$ atunci

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

b) Arătaţi că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Subiectul 2. Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O şi rază R, circumscris cercului de centru I şi rază r, $O \neq I$, şi având centrul de greutate G. Să se arate că $IG \perp BC$ dacă şi numai dacă $b = c$ sau $b + c = 3a$.

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi nedreptunghic, H ortocentrul său şiM_1, M_2, M_3 respectiv mijloacele laturilor BC, CA, AB. Fie A_1, B_1, C_1 simetricele lui H faţă de M_1, M_2, respectiv M_3, iar A_2, B_2, C_2 ortocentrele triunghiurilor BA_1C, CB_1A, respectiv AC_1B. Demonstraţi că:

a) triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate;

b) centrele de greutate ale triunghiurilor $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ formează un triunghi asemenea cu cel dat.

Subiectul 4. Fie $(a_k)_{k\geq 1}$ un şir de numere naturale, care are proprietatea $a_k \geq a_{2k} + a_{2k+1}$ oricare ar fi $k \geq 1$.

a) Demonstraţi că pentru orice număr natural $n \geq 1$ există n termeni consecutivi nuli ai şirului.

b) Daţi exemplu de şir care are proprietatea din ipoteză şi conţine o infinitate de termeni nenuli.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii

Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A X-A

Subiectul 1. Se consideră numerele reale $a > 1$ şi $b > 1$. Să se demonstreze că există o funcţie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) - x$ este strict crescătoare;

ii) funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(b^x) - x$ este strict descrescătoare;

dacă şi numai dacă $a > b$.

Subiectul 2.

Să se determine funcţiile $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile

a) $f(x, y) \cdot f(y, z) \cdot f(z, x) = 1$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{Z}$;

b) $f(x + 1, x) = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$.

Subiectul 3.

Fie O un punct egal depărtat de vârfurile tetraedrului $ABCD$. Dacă distanţele de la O la planele BCD, ACD, ABD şi ABC sunt egale, să se arate că suma distanţelor unui punct M, interior tetraedrului, la cele patru plane este constantă.

Subiectul 4.

Fie $n \geq 3$ un număr natural. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că

$$f(f(k)) = (f(k))^3 - 6(f(k))^2 + 12f(k) - 6, \text{ pentru orice } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii

Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

5 martie 2005

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Notăm cu H mulţimea matricelor pătrate de ordin $n \geq 2$, ale căror elemente sunt numere naturale şi cu P mulţimea matricelor din H cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este egală cu 1.

a) Arătaţi că dacă $A \in P$, atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

b) Arătaţi că dacă $A_1, A_2, \ldots, A_p \in H$ şi produsul $A_1 A_2 \cdots A_p \in P$, atunci $A_1, A_2, \ldots, A_p \in P$.

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pentru care $f(a) = f(b)$, există $c \in (a, b)$ cu $f(a) = f(b) = f(c)$. Arătaţi că f este monotonă pe $\mathbb{R}$.

Subiectul 3. a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\operatorname{rang} A > \operatorname{rang} B$. Arătaţi că $\operatorname{rang}(A^2) \geq \operatorname{rang}(B^2)$.

b) Determinaţi polinoamele neconstante cu coeficienţi reali f cu proprietatea că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{rang} A > \operatorname{rang} B$ are loc relaţia $\operatorname{rang} f(A) \geq \operatorname{rang} f(B)$.

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ o funcţie bijectivă şi monotonă.

a) Arătaţi că există o unică funcţie continuă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

b) Daţi un exemplu de funcţie polinomială $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neinjectivă, cu proprietatea că $G(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ şi restricţia ei la $\mathbb{Q}$ să fie injectivă.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii

Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Seviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005 CLASA A XII-A

Subiectul 1. Se consideră mulţimile finite $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 2$ cu proprietăţile

i) $|A_i| \geq 2$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$, şi

ii) $|A_i \cap A_j| \neq 1$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Să se arate că elementele mulţimii $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ pot fi colorate cu două culori, astfel încât nici o mulţime A_i să nu aibă toate elementele colorate la fel.

(*Prin* $|X|$ *se notează cardinalul mulţimii* X)

Subiectul 2. Se consideră funcţia continuă $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ şi şirurile de numere reale $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ cu proprietatea că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x) - a_n x - b_n| \mathrm{d}x = 0.$$

Arătaţi că:

a) Şirurile $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt convergente.

b) Există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = ax + b$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

Subiectul 3. Fie G un grup şi F mulţimea elementelor de ordin finit din G. Dacă F este finită, să se arate că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n y = y x^n$ oricare ar fi $x \in G$ şi $y \in F$.

Subiectul 4. Fie A un inel finit cu $n \geq 3$ elemente, în care există exact $\dfrac{n+1}{2}$ *pătrate.* Să se arate că

a) $1 + 1$ este inversabil.

b) A este corp.

(Elementul $a \in A$ se numeşte *pătrat* dacă $a = b^2$ cu $b \in A$)

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

SOLUŢII ŞI BAREMURI

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A VII-a

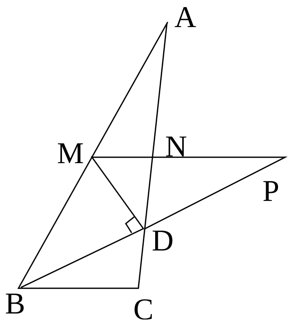
Subiectul 1.

$S_a = a^{2005} + (10+a)^{2005} + (20+a)^{2005} + \cdots + (90+a)^{2005}$ ..... 3 puncte

$S_a =$ multiplu de $10 + 10 \cdot a^{2005}$ .... 3 puncte

implică S_a multiplu de 10 .... 1 punct

Subiectul 2.



Fie $MN||BC$, $N \in AC$, $MN \cap BD = \{P\}$. .... 1 punct

Triunghiul MBP este isoscel, dar $MD \perp BP$, deci $BD = DP$. 2 puncte

Triunghiurile NDP şi CDB sunt congruente (ULU), deci $ND = DC$, ceea ce implică $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{3}{1}$. .... 1 punct

Din teorema bisectoarei avem $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ .... 2 puncte

deci $AB = 3BC$ .... 1 punct

Subiectul 3.

a) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = y - x$ implică $\sqrt{xy} = \frac{y-3x}{2}$ .... 1 punct

Obţinem $9x^2 - 10xy + y^2 = 0$ sau $(9x-y)(x-y) = 0$ şi cum $x \neq y$ deducem $\frac{x}{y} = \frac{1}{9}$ .... 2 puncte

b) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 40$ atrage $x + y + 2\sqrt{xy} = 80$ sau $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 80$ de unde $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\sqrt{5}$ .... 1 punct

de unde $\sqrt{5x} + \sqrt{5y} = 20$. De aici $\sqrt{5y} = \frac{400+5y^2-5x}{40}$ .... 1 punct

Din $\dfrac{400+5y^2-5x}{40} \in \mathbf{Q}$ rezultă $\sqrt{5y}$ natural adică $y = 5m^2, x = 5n^2$, $m, n \in \mathbf{N}$. . . . . 1 punct

Rezultă $m + n = 4$. Cum $n < m$ avem $n = 1, m = 3$ şi în fine $x = 5, y = 45$. . . . . 1 punct

Subiectul 4. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Rezultă că triunghiurile AOB, BOC şi AOC sunt isoscele. Dacă O este centrul cercului înscris triunghiului BCD atunci semidreptele $(CO$,$(DO$ şi $(BO$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului BCD . . . . 2 puncte

Unghiurile triunghiului ABC au măsurile $36°, 72°, 72°$ . . . . 2 puncte

Triunghiurile CAD şi BCA sunt asemenea . . . . 2 puncte

De aici rezultă $AC^2 = AD \cdot AB$ . . . . 1 punct

SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A VIII-a

Subiectul 1. a) Fie $a = \overline{0,(a_1a_2\ldots a_{10})}$ un element al mulţimii M, unde $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ reprezintă o permutare a cifrelor $0, 1, 2, \ldots, 9$. Deoarece $b_1 = 9 - a_1, b_2 = 9 - a_2, \ldots b_{10} = 9 - a_{10}$ sunt cifre distincte 1pct
rezultă că $b = \overline{0,(b_1b_2\ldots b_{10})}$ aparţine mulţimii M. 1pct

Observăm că $\frac{1}{2} \notin M$ şi fiecărui element $a \in M, a < \frac{1}{2}$ îi corespunde un element $b = 1 - a \in M, b > \frac{1}{2}$ şi reciproc. 1pct

Grupând astfel elementele lui M în perechi (a, b) cu $a < \frac{1}{2} < b$ şi $a+b = 1$, deducem că media aritmetică a elementelor mulţimii M este $\frac{1}{2}$. 1pct

b) Să observăm că suma cifrelor din perioada unui număr a din M este $0+1+2+\ldots+10 = 45$, deci fracţia $\dfrac{\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}}{\underbrace{99\ldots9}_{10 \text{ cifre}}}$ se simplifică prin 9 şi avem

$a = \dfrac{m}{\underbrace{11\ldots1}_{10 \text{ cifre}}}$, unde $m \in \mathbb{N}$. 1pct

Considerăm $n = \underbrace{11\ldots1}_{9 \text{ cifre}}2$. Cum $1 < n < 10^{10}$ şi $(n-1)\cdot a = m \in \mathbb{N}^*$, rezultă concluzia. 2pct

Subiectul 2. Se completează configuraţia din enunţ la cubul $ABEFDCE'F'$.

a) Planul (DOC) intersectează dreapta AF în punctul M. Deoarece $DC \parallel (ABEF)$ rezultă $OM \parallel DC$, adică M este mijlocul segmentului AF. În consecinţă, dreapta DM este intersecţia planelor (DOC) şi (DAF). 2pct
Distanţa cerută este înălţimea din B în triunghiul isoscel BDM cu $MB = MD = 2\sqrt{5}$ şi $BD = 4\sqrt{2}$. Aria triunghiului BDM este $4\sqrt{6}$, deci înălţimea din B este $\dfrac{4\sqrt{30}}{5}$. 2pct

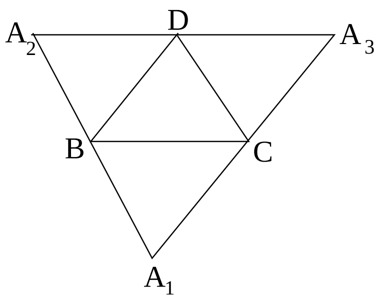
b) Dreptele BF şi AC sunt incluse în planele paralele $(E'BF)$, respectiv (ACF'). Distanţa dintre drepte este distanţa dintre cele două plane. 1pct
Cum DE este perpendiculară pe planele $(E'BF)$ şi (ACF'), 1pct

iar planele împart diagonala DE în trei părţi congruente, rezultă că distanţa căutată este $\frac{1}{3} \cdot DE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 1pct

Subiectul 3. Deoarece unghiurile ce subîntind coarede egale în cercuri egale sunt congruente, obţinem 2pct

$$\angle ABC \equiv \angle CDA, \angle ABD \equiv \angle DCA, \angle ACB \equiv \angle ADB,$$

$$\angle CBD \equiv \angle CAD, \angle BCD \equiv \angle BAD, \angle BAC \equiv \angle BCD.$$



Atunci $\angle ABC + \angle CBD + \angle DBA = \angle CDA + \angle CAD + \angle DCA = 180°$, 1pct
deci în desfăşurarea tetraedrului - vezi figura - segmentele BA_1 şi BA_2 sunt în prelungire şi analog DA_3, DA_2, respectiv CA_1, CA_3. 3pct

Se observă că BCD este triunghiul median al lui $A_1A_2A_3$, de unde rezultă concluzia. 1pct

Subiectul 4. În cele ce urmează vom nota vârfurile cu cifra asociată acestora.

Colorăm vârfurile cu 2 culori - alb şi negru - astfel ca orice muchie a cubului să aibă capetele colorate diferit, adică vârfurile de aceeaşi culoare sunt vârfurile unui tetraedru regulat.

Să observăm că o linie frântă conţine 2 vârfuri albe şi două negre. 1pct

Mai mult, dacă alegem 3 vârfuri ce nu au toate aceeaşi culoare, există o linie frântă ce le conţine. 1pct

Dacă 6,7,8 nu au aceeaşi culoare, cum $6+7+8 = 21$, conform observaţiei anterioare problema este încheiată. 1pct

De asemenea 5,7,8 au suma 20 şi se completează la o linie frântă cu suma cel puţin 21 dacă nu au aceeaşi culoare. 1pct

Rămâne cazul când 5,6,7,8 sunt vârfurile unui tetraedru regulat. Cum 4 are culoare opusă lui 7 şi 8, există *două* linii frânte ce conţin vârfurile 4,7,8. ....2pct

Cum al patrulea vârf nu poate fi în ambele cazuri 1, avem $2+4+7+8 = 21$.

.... 1pct

SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A IX-a

Subiectul 1. a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-y)^2(x+y) \geq 0$. .... 4 puncte

Prin adunarea inegalităţilor sugerate de a) obţinem concluzia . . 3 puncte

Subiectul 2. *Prima soluţie*: Putem presupune $b \geq c$. Atunci A, I şi G se proiectează pe semidreapta $[MB$ în A', I' şi G' (M este mijlocul laturii BC). .... 1 punct

Avem $MI' = MB - BI' = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{b-c}{2}$ .... 2 puncte

Apoi,

$$MG' = \frac{1}{3}MA' = \frac{1}{3}|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{A'B}| = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \frac{b^2-c^2}{6a}$$

.... 2 puncte

Rezultă $IG \perp BC \iff I'$ coincide cu $G' \iff MI' = MG' \iff (b-c)(b+c-3a) = 0 \iff b = c$ sau $b+c = 3a$. .... 2 puncte

A doua soluţie: Avem $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ şi $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$, deci

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3(a+b+c)}\left((a+c-2b)\overrightarrow{AB} + (a+b-2c)\overrightarrow{AC}\right) \text{ 3 puncte}$$

Din $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ .... 1 punct

rezultă

$$\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$\frac{1}{3(a+b+c)}\left((a+b-2c)b^2 - (a+c-2b)c^2 + (3c-3b)\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{6}(c-b)(b+c-3a)$$

.... 2 puncte

Astfel $IG \perp BC \iff \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff b = c$ sau $b + c = 3a$....1 punct

Subiectul 3. Cum A este ortocentrul triunghiului BHC, care este simetric faţă de M_1 cu triunghiul BA_1C, rezultă că A_2 este simetricul lui A faţă de M_1 ....2 puncte

a) Dacă P este un punct oarecare atunci $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PM_1} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA_2}$. Rezultă $\sum \overrightarrow{PA_2} = \sum \overrightarrow{PA}$, de unde concluzia .... 2 puncte

b) Fie G_A centrul de greutate al triunghiului AA_1A_2. Atunci

$$\overrightarrow{HG_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HA_2}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AM_1}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{HM_1},$$

deci

$$\overrightarrow{G_AG_B} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{HM_2} - \overrightarrow{HM_1}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

şi analoagele. De aici rezultă asemănarea cu raport $\frac{2}{3}$. ....3 puncte

Subiectul 4. a) Dacă toţi termenii şirului ar fi nenuli, atunci

$$a_1 \geq a_2+a_3 \geq a_4+a_5+a_6+a_7 \geq \cdots \geq a_{2^n}+a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^{n+1}-1} \geq 2^n$$

pentru orice n, contradicţie .... 2 puncte

Apoi, dacă $a_k = 0$ atunci din

$$0 \geq a_{2^pk} + a_{2^pk+1} + a_{2^pk+2} + \cdots + a_{2^pk+2^p-1}$$

rezultă că avem 2^p termeni consecutivi care sunt nuli. .... 2 puncte

b) Un exemplu este

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ dacă } n = 2^p, \; p \in \mathbf{N} \\ 0 \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

....3 puncte.

SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A X-a

Subiectul 1. Dacă $a > b$, atunci pentru orice $a > c > b$, $f(x) = \log_c x$ verifică cele două condiţii, deoarece $\log_c b < 1 < \log_c a$ . . . . 3 puncte

Dacă f are cele două proprietăţi, atunci, deoarece $\log_a, \log_b$ sunt strict crescătoare şi deci $g \circ \log_a, -h \circ \log_b$ sunt strict crescătoare, rezultă şi $d : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $d(x) = g(\log_a x) - h(\log_b x)$ strict crescătoare . . . . 2 puncte

Dar $d(x) = \log_b x - \log_a x = \dfrac{\lg \frac{a}{b}}{\lg a \lg b} \lg x$ şi cum $\lg a > 0, \lg b > 0$ şi lg este strict crescătoare, rezultă $\lg \frac{a}{b} > 0$, deci $a > b$. . . . . 2 puncte

Subiectul 2. Pentru $x = y = z$ avem $(f(x,x))^3 = 1$ deci $f(x,x) = 1$ pentru $x \in \mathbf{Z}$. Pentru $y = z$ avem atunci $f(x,y)f(y,x) = 1$ pentru orice $x, y \in \mathbf{Z}$.

Atunci $f(x,z) = f(x,y)f(y,z) = \frac{f(x,y)}{f(z,y)}$ pentru $x, y, z \in \mathbf{Z}$. . . . . . . 2 puncte

Rezultă $2 = f(x+1, x) = \frac{f(x+1,y)}{f(x,y)}$, deci

$$\frac{f(x+1,y)}{2^{x+1}} = \frac{f(x,y)}{2^x},\ x \in \mathbf{Z}.$$

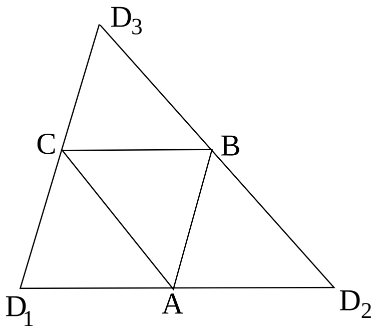
Prin urmare raportul $\frac{f(x,y)}{2^x}$ este constant . . . . 2 puncte

În particular $(x = y)$ $\frac{f(x,y)}{2^x} = \frac{f(y,y)}{2^y} = \frac{1}{2^y}$ de unde $f(x,y) = 2^{x-y}$ pentru orice $x, y \in \mathbf{Z}$. . . . . 2 puncte

Verificare . . . . 1 punct

Subiectul 3. Existenţa lui O este uşor de demonstrat dat fiind faptul că este intersecţia planelor mediatoare a trei muchii, rezultând astfel că el este centrul sferei circumscrise tetraedrului. Fie O_1 proiecţia lui O pe planul (ABC) şi O_2 proiecţia lui O pe planul (BCD). Cum $OO_1 = OO_2$ rezultă că O_1 şi O_2, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi BCD au aceleaşi raze. Rezultă astfel că toate cercurile circumscrise feţelor au aceleaşi raze. . . . . 1 punct

Demonstrăm că tetraedrul este echifacial.



Desfăşurăm tetraedrul în planul (ABC), astfel încât punctul D devine pe rând D_1, D_2, D_3. Din faptul că două coarde egale în cercuri egale subîntind unghiuri de măsuri egale, obţinem $\angle BAC = \angle D_3, \angle D_3CB = \angle BAD_2, \angle CBD_3 = \angle D_1AC$, ceea ce arată că punctele D_1, A, D_2 sunt coliniare. Analog, rezultă că B se află pe D_2D_3 şi C pe D_1D_3. .... 3 puncte

Rezultă de aici că triunghiurile ce sunt rabatatele feţelor tetraedrului sunt congruente...1 punct

Însumând volumele tetraedrelor $MABC, MBCD, MACD, MABD$ obţinem volumul tetraedrului $ABCD$. Cum planele bazelor acestor tetraedre au aceeaşi arie, rezultă că suma distanţelor lui M la feţe este constantă.

....2 puncte

Subiectul 4. Fie $y = \max(Im\, f)$, deci $f(y) \leq y$. Atunci $y^3 - 6y^2 + 12y - 6 \leq y$ sau $(y-1)(y-2)(y-3) \leq 0$, de unde $y \in \{1, 2, 3\}$, deci $Im\, f \subset \{1, 2, 3\}$...3 puncte

În plus $f(z) = z$ pentru $z \in Im\, f$ şi $f(x)$ este un element arbitrar din $Im\, f$ pentru $x \notin Im\, f$ ....1 punct

Considerând pe cazuri numărul de elemente din $Im\, f$, avem:

- pentru $|Im\, f| = 1$, obţinem $C_3^1 = 3$ funcţii;
- pentru $|Im\, f| = 2$, obţinem $C_3^2 \cdot 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$ funcţii;
- pentru $|Im\, f| = 3$, obţinem $C_3^3 \cdot 3^{n-3} = 3^{n-3}$ funcţii;

deci în total $3 + 3 \cdot 2^{n-2} + 3^{n-3}$ funcţii........................3 puncte

SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti 5 martie 2005

CLASA A XI-a

Subiectul 1. a) Se arată uşor că prin permutarea unor linii matricea A se transformă în I_n. Rezultă $\det A \in \{\pm 1\}$. . . . . 2 puncte

b) Din a) rezultă că $\det(A_1)\cdots\det(A_p) \neq 0$, deci $\det(A_k) \neq 0$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, p$. Cum produsul a două matrice din H este tot o matrice din H, va fi suficient să demonstrăm afirmaţia pentru $p = 2$, soluţia fiind dată apoi de o inducţie evidentă. . . . . 1 punct

Fie $A, B \in H$. astfel încât $AB \in P$. Cum $\det A \neq 0$ şi $\det B \neq 0$, rezultă că pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a matricelor A şi B avem cel puţin un element nenul. Dacă pe o linie din matricea A avem cel puţin 2 elemente nenule, atunci linia din produsul AB va fi o sumă de cel puţin 2 linii din matricea B fiecare din ele înmulţită cu un număr natural nenul. Prin urmare suma tuturor elementelor matricei AB va fi strict mai mare decât n, fals.

Deci pe orice linie din matricea A avem un singur element nenul. Acela nu poate fi decât 1. Rezultă că matricea A este din P. De aici deducem că şi matricea B este din P, deoarece este produsul dintre $A^{-1} \in P$ şi o matrice din P. . . . . 4 puncte

Subiectul 2. Presupunem că f nu e monotonă şi considerăm $a < b < c$ astfel încât $f(a) < f(b) > f(c)$. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $c_1 \in (a, b)$ şi $c_2 \in (b, c)$ cu $f(c_1) = f(c_2) = \lambda < f(b)$. . . . . 2 puncte

Fie $\alpha = \sup\{x \in [c, b] \mid f(x) = \lambda\}$ şi $\beta = \inf\{x \in [b, c_2] \mid f(x) = \lambda\}$. Din continuitatea lui f rezultă că $f(\alpha) = f(\beta) = \lambda$ şi $\alpha < b < \beta$ . . . . 2 puncte

Din ipoteză rezultă existenţa unui punct $\gamma \in (\alpha, \beta)$ cu $f(\gamma) = \lambda$, ceea ce contrazice alegerea numerelor α sau β. . . . . 3 puncte

Subiectul 3. a) Dacă $\operatorname{rang}(A) = 3$, inegalitatea este evidentă. Dacă $\operatorname{rang}(A) = 1$, nu e nimic de demonstrat. . . . . 1 punct

Fie deci $\operatorname{rang}(A) = 2$; atunci $\operatorname{rang}(B) \leq 1$. Din inegalitatea lui Sylvester ($\operatorname{rang}(XY) \geq \operatorname{rang}(X) + \operatorname{rang}(Y) - 3$ sau din argumente geometrice), avem $\operatorname{rang}(A^2) \geq 1 \geq \operatorname{rang}(B) \geq \operatorname{rang}(B^2)$. . . . . 2 puncte

b) Dacă luăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem $\operatorname{rang}(A) = 2, \operatorname{rang}(B) = 1$ iar $A^2 = O_4$ şi $B^2 = B$. Deci $\operatorname{rang}(A^2) < \operatorname{rang}(B^2)$. Aceasta arată că polinomul $f = aX^2$ şi analog polinomul $f = aX^n$ cu $n \geq 2$ nu verifică relaţia. ....2 puncte

Arătăm acum că dacă polinomul f are o rădăcină complexă nereală $z = a + ib$, atunci el nu verifică cerinţa. Într-adevăr pentru $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu $c \neq 0$ şi $f(c) \neq 0$ avem $\operatorname{rang}(A) = 2, \operatorname{rang}(B) = 1$ iar $\operatorname{rang} f(A) = 0$ şi $\operatorname{rang} f(B) = 1$. Mai arătăm că polinomul nu poate avea rădăcini reale nenule. Într-adevăr, dacă $a \in \mathbb{R}^*$ şi $f(a) = 0$, pentru $A = aI_4$ şi B ca mai sus, obţinem o contradicţie.............................1 punct

Rezultă că polinoamele căutate sunt de forma $f = aX$, $a \in \mathbb{R}^*$. . 1 punct

Subiectul 4. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $a = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{Q}, x < \alpha\}$, $b = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{Q}, x > \alpha\}$. Presupunem f strict crescătoare şi obţinem $a \leq b$. Dacă $a < b$ alegem $r \in \mathbb{Q}$ cu $a < r < b$. Rezultă că există $s \in \mathbb{Q}$ cu $f(s) = r$. Dacă $s < \alpha$ atunci $a \geq f(s) = r > a$, contradicţie. Dacă $s > \alpha$ avem $b \leq f(s) = r < b$, din nou contradicţie. Rezultă $a = b$ şi definim $F(\alpha) = a$ .... 2 puncte

Fie $x < y, x, y \in \mathbb{R}$ şi $r, s \in \mathbb{Q}$ cu $x < r < s < y$. Din definiţia lui F rezultă că $F(x) \leq F(r) = f(r) < f(s) = F(s) \leq F(y)$, deci F este strict crescătoare...1 punct

Pentru a proba surjectivitatea, fie $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid f(r) < z\}$. Cum A este mărginită superior fie α supremumul său. Din construcţia lui F avem că $F(\alpha) = z$. Cum F este bijectivă şi monotonă rezultă că F este continuă...1 punct

Dacă G este o prelungire continuă a lui f pentru $x \in \mathbb{R}$ alegem $r_n \in \mathbb{Q}$ cu $\lim r_n = x$. Din continuitate deducem $\lim F(r_n) = F(x)$, $\lim G(r_n) = G(x)$, iar cum $F(r_n) = f(r_n) = G(r_n)$, rezultă $F(x) = G(x)$...............1 punct

b) Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = x^3 - 2x$. Cum $G(0) = G(\sqrt{2})$ rezultă că G nu este injectivă. . . . . 1 punct

Dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ cu $G(x) = G(y)$ şi $x \neq y$ obţinem $x^2 + xy + y^2 = 2$ sau $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 2$, deci ecuaţia $X^2 + 3Y^2 = 2$ ar avea soluţii raţionale. Dacă $X = \frac{m}{n}, Y = \frac{p}{q}$, fracţii ireductibile, din $m^2q^2 + 3p^2n^2 = 2n^2q^2$ am avea $n^2|q^2, q^2|3n^2$, de unde $n^2 = q^2$. De aici $m^2+3p^2 = 2n^2$, deci $m^2 \equiv 2n^2 (\text{mod} 3)$. Rezultă că m şi n sunt multipli de 3, contradicţie. Deci G este injectivă pe $\mathbb{Q}$. . . . . 1 punct

SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A XII-a

Subiectul 1. Concluzia problemei revine la a arăta că există o funcţie $f : A_1 \cup \cdots \cup A_n \to \{0,1\}$ cu restricţia la fiecare A_i surjectivă.

Vom demonstra acest rezultat prin nducţie după n.

Pentru $n = 2$ construcţia este evidentă.

Fie $n \geq 2$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ mulţimi cu proprietatea din enunţ. Presupunem că am construit funcţia $f_n : A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \to \{0,1\}$ cu proprietatea cerută. . . . . .1 punct

Fie $B = A_{n+1} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. Distingem cazurile

i) $|B| \geq 1$ şi $a \in B$. Definim $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pentru $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $f_{n+1}(x) = 1$ pentru $x = a$ şi $f_{n+1}(x) = 0$ în rest.

ii) $|B| = 1$. Fie $a \in B$ şi $b \in A_{n+1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. Definim $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ dacă $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ şi $f_{n+1}(x) = 1 - f_n(b)$ pentru $x = a$.

iii) $B = \emptyset$, ceea ce înseamnă $A_{n+1} \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Dacă restricţia lui f_n la A_{n+1} este surjectivă problema este rezolvată. Să presupunem, fără a pierde generaliatea că $f_n(x) = 0$ oricare ar fi $x \in A_{n+1}$ şi să fixăm un indice $i = 1, 2, \ldots, n$ astfel încât $A_{n+1} \cap A_i \neq \emptyset$ Fie $a \in A_{n+1} \cap A_i$. Definim $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ pentru $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \setminus \{a\}$ şi $f_{n+1}(x) = 1$ pentru $x = a$. . . . . 3 puncte

Rămâne să arătâm că f are proprietatea cerută. Pron construcţie, f_{n+1} este surjectivă. Fie $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dacă $a \notin A_j$ atunci $f_{n+1|A_j} = f_{n|A_j}$. Dacă $a \in A_j$, cum $|A_j \cap A_{n+1}| \geq 2$ şi $f_{n+1}(x) = f_n(x) = 0$ pentru orice $x \in A_{n+1} \setminus \{a\}$ rezultă că $f_{n+1|A_j}$ este surjectivă. . . . . 3 puncte

Observaţie: Orice argument de maximalitate care duce la o soluţie a problemei va fi punctat corespunzător. De exemplu, demonstrarea faptului că o colorare poate fi extinsă cu unul sau mai multe elemente, aduce 1-3 puncte în funcţie de completitudinea lui, conform soluţiei de mai sus.

Subiectul 2. a) Fie $a \in (0, 1]$. Cum

$$\left| \int_0^a (f(x) - a_n x - b_n) \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^a |f(x) - a_n x - b_n| \mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f(x) - a_n x - b_n| \mathrm{d}x,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^a (f(x)-a_nx-b_n)\mathrm{d}x = 0$, deci şirul $\left(\frac{a}{2}a_n + b_n\right)_n$ este convergent. În particular şirurile $\left(\frac{1}{2}a_n + b_n\right)_n$ şi $\left(\frac{1}{4}a_n + b_n\right)_n$ sunt convergente, deci şirurile $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt convergente. . . . . 3 puncte

b) Fie $a = \lim a_n, b = \lim b_n$. Atunci

$$\int_0^1 |f(x) - ax - b|\mathrm{d}x \le \int_0^1 |f(x) - a_nx - b_n|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}|a_n - a| + |b_n - b|$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Prin trecere la limită obţinem

$$\int_0^1 |f(x) - ax - b|\mathrm{d}x = 0,$$

iar continuitatea funţiei f atrage concluzia . . . . 4 puncte

Subiectul 3. Fixăm $x \in G$. Dacă $y \in F$ şi k este ordinul lui y, atunci $(xyx^{-1})^k = xy^kx^{-1} = e$, deci $xyx^{-1} \in F$ . . . . 2 puncte

Funcţia $f_x : F \to F$, $f_x(y) = xyx^{-1}$ este injectivă şi cum F este finită, rezultă că f_x este bijectivă . . . . 2 puncte

Dacă $p = |F|$ atunci $f^{[p!]} = 1_F$ . . . . 1 punct

Rezultă că $x^{p!}y(x^{p!})^{-1} = y$, pentru orice $y \in F$, deci $x^{p!}y = yx^{p!}$ oricare ar fi $y \in F$. . . . . 2 puncte.

Subiectul 4. Cum $\frac{n+1}{2} \in \mathbf{N}$ rezultă că n este impar. Fie k ordinul lui 1 în grupul $(A, +)$. Cum $k|n$, rezultă k impar şi $k \ge 3$, deci $(2, k) = 1$. Prin urmare există $u, v \in \mathbf{Z}$ cu $u > 0$ şi $2u + kv = 1$. Obţinem $(1 + 1)(1 + 1 + \cdots + 1) = 1$, deci $1 + 1$ este inversabil . . . . 2 puncte

b) Considerăm funcţia $f : A \to A$, $f(x) = x^2$. Deoarce egalitatea $a = -a$ $\leftrightarrow$ $2a = 0$ sau $a = 0$, rezultă că $a \ne -a$ pentru orice $a \in A^*$ . . . . 1 punct

Obţinem că pentru orice $b \in Im f$, $b \ne 0$ avem $|f^{-1}(b)| \ge 2$ şi $|f^{-1}(0)| \ge 1$. Cum

$$n = \sum_{b \in Im\, f} |f^{-1}(b)| \ge \frac{n-1}{2} \cdot 2 + 1 = n,$$

rezultă că $|f^{-1}(b)| = 2$ pentru orice $b \in Im\, f$ cu $b \ne 0$ şi $|f^{-1}(0)| = 1$.

. . . . 1 punct

Deci, pentru orice $x, y \in A$ din $x^2 = y^2$ rezultă $x = \pm y$ . . . . 1 punct

Vom arăta că A nu are divizori ai lui zero. Considerăm $x, y \in A$ cu $xy = 0$. Cum $(yx)^2 = yxyx = 0$ rezultă $yx = 0$. Alegem $a = 2^{-1}(x + y)$ şi $b = 2^{-1}(x - y)$. Cum 2^{-1} comută cu orice element din A şi $a^2 = b^2 = 4^{-1}(x^2 + y^2)$, rezultă $a = \pm b$, deci $x = 0$ sau $y = 0$. A este deci inel integru, aşadar corp. .... 2 puncte