Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
“PETRU MOROSAN-TRIDENT”
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006

CLASA a-V-a

1.Aflati toate numerele naturale de trei cifre care, impartite la 67, dau restul egal cu cubul catului.

Prof. Boicescu Nazeli

2.Se dau numerele $A=5^{234}+7^{156}$ si $B=2^{546}+3^{312}$. Stabiliti valoarea de adevar a propozitiilor : “A>B” si “A<B ”.

Prof. Paun Viorica- prelucrare G.M.9/2006

3.Fie sirul de numere naturale: $a_1=1$

$a_2=3+5$

$a_3=7+9+11$

$a_4=13+15+17+19$

………………….

a)Calculati a_8

b)Aratati ca a_m este cub perfect, oricare ar fi $n\in$ N*.

Nota: 1.Toate subiectele sunt obligatorii

2.Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
“PETRU MOROSAN-TRIDENT”
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006

CLASA a-VI-a

Subiectul 1.

a)Sa se determine numerela naturale a,b,c daca $b^2 + c^2 = 400$ si 2a=3b=4c

b)Determinati numarul $\overline{abc}$ daca $\overline{cb}$ reprezinta $\frac{1}{5}$ din $\overline{abc}$

Subiectul 2.

Fie produsele: $A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100}\right)$

$B=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)$

$C=\left(1-\frac{1}{101}\right)B$

Aratati ca :

a) A<C<B

b) $A<\frac{1}{10}<B$

Subiectul 3.

Se dau punctele coliniare A,B,C cu $B\in(AC)$. De aceeasi parte a dreptei AC se duc semidreptele [BM si [BN, cu [BN in interiorul unghiului (ABM).Stiind ca m(MBN)=110° calculati masura unghiului format de bisectoarele unghiurilor (ABM) si (CBN).

Nota: 1.Toate subiectele sunt obligatorii

2.Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
"PETRU MOROSAN-TRIDENT"
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006

CLASA a-VII-a

1. Sa se compare numerele:

$A=\frac{1}{502}+\frac{1}{503}+...+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}$ si

$B=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$

Romeo Zamfir, profesor, Galati

2. Numarul $a \in N^*$ se numeste "prietenos" daca se scrie ca suma a doua patrate perfecte distincte, nenule

a) Determinati cate numere "prietenoase" de doua cifre sunt.
b) Aratati ca oricare ar fi $n \in N^*$, 26^n este "prietenos"

Tilinca Daniela, profesor, Braila

3. Fie triunghiul ABC isoscel $[AB] \equiv [AC]$ si $m\angle A=120^\circ$. Se prelungeste latura BA cu segmentul $[MA] \equiv [AB]$, $A \in [MB]$. Pe latura AC se considera $D \in [AC]$, astfel incat $\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}$. Se noteaza cu F, respectiv E, punctele de intersectie dintre dreptele MD si BC, respectiv BD si MC. Demonstrati:

a) AFCE dreptunghi;
b) AFCM trapez dreptunghic;
c) BFAN are diagonalele perpendiculare, unde $BN \perp AC$, $N \in AC$.

Paun Virica, profesor, Braila

NOTA: TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII.
TIMP DE LUCRU 2 ORE.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
"PETRU MOROSAN-TRIDENT"
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006

CLASA a-VIII-a

1. In interiorul unui triunghi echilateral de latura 2 se afla cinci puncte. Aratati ca exista doua dintre ele a caror distanta este mai mica decat 1.

Prof. FLORICA BANU, BUCURESTI

2. Determinati a,b$\in R_+$ daca:

$\sqrt{(4+3a)(3+b)} + \sqrt{(7-2b)(b-3a)} = 7$

Prof COVACI DANIELA, BRAILA

3. Fie sirul:

1+3+5, 6+8+10, 11+13+15, 16+18+20,…..

a) verificati daca 2019 este termen al sirului si determinati al catelea este. Dar 2006?
b) Calculati suma primelor 108 termeni ai sirului.

Prof COVACI DANIELA, BRAILA

NOTA: 1)TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII
2)TIMP DE LUCRU: 2 ORE

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
"PETRU MOROSAN-TRIDENT"
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
Matematica M1

CLASA A IX-A

1. Demonstrati ce exista o infinitate de numere intrtegi "a", astfel incat ecuatia $x^3=ax+a-1$, sa aiba trei radacini intregi.

Liviu Parsan, G.M.5-6/2006

2. Pentru orice sir strict crescator $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale nenule, notam

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

a) Aratati ca, daca $a_n=n$, $\forall n\geq 1$ atunci $2\sqrt{n+1}-2<S_n<2\sqrt{n}$, $\forall n\geq 1$

b) Aratati ca, daca $2\sqrt{n+1}-2<S_n<2\sqrt{n}$, $\forall n\geq 1$, nu rezulta neaparat ca $a_n=n$, $\forall n\geq 1$.

Vasile Radu, Braila

3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel incat $a^2+b^2+c^2=3$. Sa se arate ca, oricare ar fi x, y, z numere reale pozitive, are loc inegalitatea:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}.$$

Nota:
Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 2 ore

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
"PETRU MOROSAN-TRIDENT"
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
Matematica M1

CLASA A X-A

1. Sa se resolve in R ecuatia $2^{[\sqrt[3]{x}]} = x$

Prof. Nedelcu Ion

2. Fie $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots Z_n \in$ C cu $|Z_k| = r > 0$, $\forall k = \overline{1,n}$

si $\operatorname{Re}\left(\sum_{K=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{z_i \cdot z_j}{z_k \cdot z_e}\right) = 0$

Demonstrati ca $\sum_{k=1}^{n}|1 - z_k|^2 = n(r^2 - 1)$

Prof. Botea Viorel – Braila

3. Sa se determine $f(x) + \sqrt{f^2([x]) + f^2(\{x\})} = x$, $\forall x \in R$.

Prof. Damian Marius –Braila

Nota
1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timp de lucru 2 ore.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
“PETRU MOROSAN-TRIDENT”
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
Matematica M1

CLASA A XI-A

1. Ce relatie trebuie sã fie între constantele pozitive a si b ca sã existe $\lim_{n\to\infty}\left(a\sqrt[n]{n}+b\right)^{\frac{n}{\ln n}}$ si sã fie finitã si nenulã? Sã se calculeze în acest caz limita.

ION CUCUREZEANU, CONSTANTA

2. Considerãm $A_n=\{A\in M_2(R)\mid A^{n+1}=2007^n\cdot A\}$, unde $n\in N^*$ fixat.
a) Arãtati cã A_n contine o infinitate de elemente.
b) Determinati $A_4\cap A_{2007}$.

GHEORGHE IUREA, IASI

3. Fie $a>0$ fixat. Sirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este dat de relatia de recurenta :
$x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n^2-a^2}$, $(\forall)n\geq 1$ cu $x_1\geq a$. Sã se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{x_n}\right)$.

DAN NEGULESCU, BRAILA

NOTA:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 2 ore.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
“PETRU MOROSAN-TRIDENT”
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
Matematica M1

CLASA A XII-A

1. Fie $(G, *)$ un grup in care aplicatiile f,g $: G \to G$, $f(x)=x^{n}$ si $g(x)=x^{2n}$, $n \in N^*$, $n \geq 4$, sunt endomorfisme. Sa se arate ca daca f este injective sau surjectiva, atunci $(G, *)$ este abelian.

Prof. Gh. Andrei, Constanta

2. Aflati functiile $f: R \to R$ de doua ori derivabile cu proprietatea ca:
$f'(x)+F(x)=2f(x)+\frac{x^2}{2}$, $\forall x \in R$, unde F este o primitiva a lui f .

Prof. Carmen Botea, Braila

3.Sa se calculeze: 1) $\int \frac{x^2}{tgx - x}dx$, $x \in (0, \frac{p}{2})$;
2) $\int \frac{\ln x - 1}{x^2 - \ln^2 x}dx$, $x>1$.

Prof. Ion Nedelcu, Ploiesti

Nota:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
"PETRU MOROSAN-TRIDENT"
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
MATEMATICA M2

Clasa a IX-a

1. Fie predicatul p(x,y): "$x^3 - x = y^3 - y$, $x,y \in R$".

Determinati valoarea de adevar a propozitiilor:

a) $(\forall x)$ $x \in R$ $(\exists y)$ $y \in R$ astfel incat are loc p(x,y).

b) $(\exists y)$ $y \in R \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ astfel incat are loc $p\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y \right)$.

c) Fiind dat si predicatul q(x,y): "$x \neq y$, $x,y \in R$", sa se determine toate elementele multimii:
$M = \{(x,y) \in Z \times Z \ / \ p(x,y) \wedge q(x,y)\}$

2. Sa se determine $a \in R$, $b \in R$ daca $\begin{cases} a + \{b\} = 31{,}6 \\ b + 3\{a\} = 12{,}8 \end{cases}$ unde $\{x\}$ reprezinta partea fractionara a numarului $x \in R$.

3. In triunghiul echilateral ABC se considera punctele $M \in AC$, $A \in (CM)$, $N \in AB$, $B \in (AN)$, respective $P \in BC$, $C \in (BP)$ astfel incat AM=BN=CP. Sa se arate ca centrul de greuntate al triunghiului MNP coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC.

PROF. ION NEDELCU

NOTA:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 2 ore.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
“PETRU MOROSAN-TRIDENT”
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
MATEMATICA M2

Clasa a X-a

1. Dacã $x = \log_{15} a$, $y = \log_{21} a$, $z = \log_{35} a$, atunci are loc egalitatea:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_7 a}\ ,\ a>0,\ \ a\neq 1.$$

2. Sã se arate cã: $\left[2^{\log_2 n-\log_2(n+1)+\log_2(n+2)}\right]=$ n , $\forall n\in N^{*}$, unde $[x]=$ partea întreagã.

3. a) Sã se demonstreze urmãtoarea identitate peste C:
$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.
b) Dacã $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ si $|z_1|=|z_2|=1$ atunci si $|z_1-z_2|=1$.

NOTA:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timp de lucru 2 ore.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
“PETRU MOROSAN-TRIDENT”
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
MATEMATICA M2

Clasa a XI-a

1. Fie matricea A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   Sa se calculeze A^n

   Octavian Horelu –Braila

2. Sa se rezolve in $m_2(R^*)$ ecuatia:

   $X^3=\begin{pmatrix} 1-4a^2 & 2a \\ -8a^3 & 1+4a^2 \end{pmatrix}$

   Octavian Horelu – Braila

3. Fie $f : R_+^* \longrightarrow R$, $f(x) = x(1+\ln x)$ si $a \in R$, $a \geq 1$.

   Daca $x(a)$ este solutia $f(x) = a$, sa se arate ca $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{x(a)\cdot \ln a}{a} = 1$

<u>Nota</u>

3. Toate subiectele sunt obligatorii
4. Timp de lucru 2 ore.

Inspectoratul Scolar Judetean Braila
Concursul interjudetean de Matematica
"PETRU MOROSAN-TRIDENT"
Editia a-IV-a, Braila, 8-10 decembrie 2006
MATEMATICA M2

Clasa a XII-a

1. Sa se determine numarul complex "z" astfel incat : $\left|\frac{z-12}{zi+8}\right| = \frac{5}{3}$ si $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$
2. Resturile impartirii unui polinom prin x-1, x+1, x-2 sunt 2 , 6 respectiv 3. Sa se detrmine restul impartirii aceluiasi polinom prin produsul (x-1)(x+1)(x-2).
3. Sa se calculeze integralele:

$I_1 = \int \frac{x(x^4-1)}{x^8+1}dx$ si

$I_2 = \int \frac{x^{n-1}(x^{2n}-1)}{x^{4n}+1}dx$, $n \in N$, $n \geq 2$.

NOTA:

1. TOATE SUBIECTELE SUNT OBLIGATORII;
2. TIMP DE LUCRU: 2 ORE