CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICA “JOSE MARTI”
13 ianuarie 2007

Clasa a IV-a

BAREM DE CORECTURA

1) a) a=34

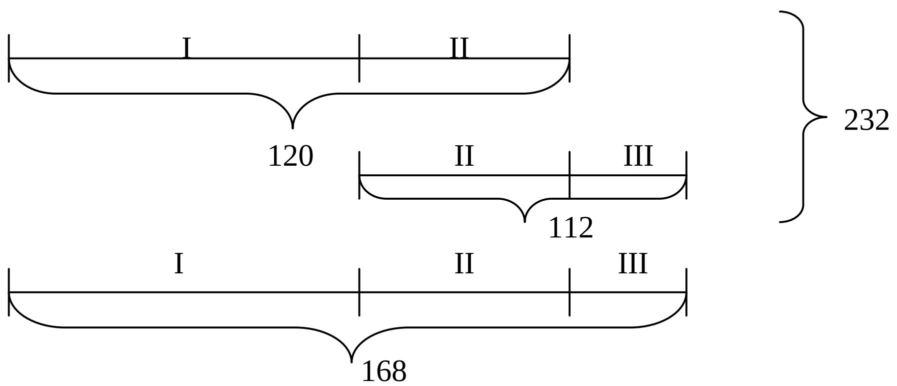
b) Cum exista un cel mai mic si un cel mai mare copil si 7=1+2+4 rezulta ca varstele sunt 1, 2 si 4.

2) a) Numerele de cel mult trei cifre, care se pot forma cu cifrele 5 si 6 sunt:
5, 6, 55, 56, 65, 66, 555, 556, 565, 566, 655, 656, 665 si 666. Rezulta ca sunt 14 numere.

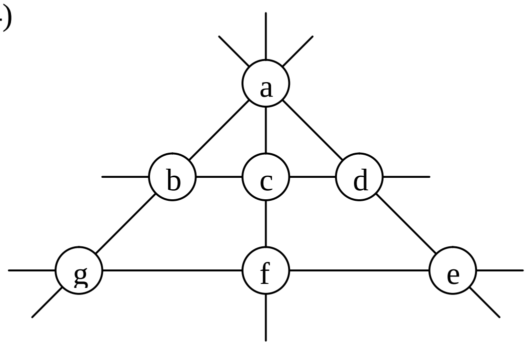
b) Presupunem ca elevii s-au nascut pe parcursul tuturor celor 12 luni. Cum sunt 25 de elevi si $25=12\cdot 2+1$ rezulta ca al 25-lea elev trebuie sa se fi nascut in aceeasi luna cu alti 2 elevi, deci cel putin 3 elevi s-au nascut in aceeasi luna.

3) Solutia algebrica:
Fie a, b, c cele trei numere
$a+b+c = 168$
$a+b=120$
$b+c=112$
$(a+b+c)+b=120+112=232$
$b=232-168=64$
$a=120-64=56$
$c=112-64=48$

Solutia grafica:



4)



$1+2+3+4+5+6+7=28$

$(a+b+c)+(a+c+f)+(a+d+e)+(b+c+d)+(g+f+e)=3\cdot a+2\cdot b+2\cdot c+2\cdot d+2\cdot e+2\cdot f=$

$=a+28\cdot 2=a+56$

$a+b+g=a+c+f=a+d+e=b+c+d=g+f+e=S$

$a+56=5\cdot S$

Ultima cifra a numarului $5\cdot S$ este 0 sau 5, deci ultima cifra a numarului $a+56$ este 0 sau 5.

Cum a poate fi una din cifrele 1,2,3,4,5,6,7 inseamna ca a nu poate fi decat 4.

Deci $b+c+d=g+f+e=(28-4):2=12$

Deci suma este 12.

CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICA “JOSE MARTI”

BUCURESTI, 13.01.2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA a V-a

1) a) Rezultatul este 43 (3p)

b) $1000 = 43 \cdot 23 + 11$, deci $43 \cdot 23 < 1000 < 43 \cdot 24 = 1032$ care este cel mai mic multiplu al lui 43 scris cu patru cifre (4p)

2) a) In total sunt 27 de elevi,prin urmare sunt 27:3=9 coloane (1p)

Deoarece exista numai 8 baieti, o coloana este formata numai cu fete (2p)

b)Restul de patru baieti ramasi vor fi distribuiti in cel mult patru coloane (2p)

Deci, vor ramane cel putin 9-(4+2)=3 coloane formate numai cu fete (2p)

3) Fiecare elev trebuie sa evite numerele “periculoase”, adica :

multiplii lui 2 care sunt in numar de 1000:2=500, (1p)

multiplii lui 5 care sunt in numar de 1000:5=200 (1p)

Printre aceste numere apar de doua ori multiplii lui 10 care sunt in numar de 100 (1p)

Prin urmare numerele “ periculoase” sunt in numar de 500+200-100=600 (2p)

Avantajoase sunt numai 1000-600=400 numere (1p)

Deoarece jucatorul A este obligat sa stearga al 401-lea numar ,el va pierde (1p)

4) Consideram situatia existenta dupa ce Bianca primeste banii de la Andreea (1p)

Pornind de aici se poate ajunge in pozitia finala daca Bianca ii da Andreei 20 de lei (2p)

Deducem ca atreia parte din suma Andreei, in final, este de 60 de lei (2p)

Inseamna ca suma initiala a Andreei a fost de $3 \cdot 60 - 7 = 173$ de lei, (1p)

Iar suma initiala a Biancai a fost de 67 de lei (1p)

CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICA "JOSE MARTI"

BUCURESTI, 13.01.2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA a VI-a

1) a) Deoarece $2007 = 3^2 \cdot 223$ (1p), iar numarul 223 este prim (1p), rezulta ca cel mai mic multiplu nenul al lui 2007, patrat perfect este $3^2 \cdot 223^2$ (1p).

b) Notam cu M numarul determinat la punctual a) (1p). Patratele perfecte , multipli ai lui 2007 sunt de forma $k^2 \cdot M$, unde *k* este un numar natural oarecare (1p).

Avem: $2007^2 = \left(3^2 \cdot 223\right)^2 = 3^4 \cdot 223^2 = 3^2 \cdot M$ (1p) Inseamna ca 2007^2 este pe locul patru in sirul patratelor perfecte divizibile cu 2007. (1p)

2) a) De exemplu *x*=1 sau *x*= ¾ (3p)

b) $\frac{6x+7}{2x+1} = 3 + \frac{4}{2x+1}$. (1p) Rezulta ca $\frac{4}{2x+1}$ trebuie sa fie numar natural. (1p)

Inseamna ca $\frac{4}{2x+1}$ are una dintre valorile 1, 2, 3 sau 4. (1p) Obtinem pentru *x* valorile 3/2 , 1/2, 1/6 si 0. Deci multimea A are patru elemente. (1p)

3) Unghiurile $\angle xOt$ si $\angle yOz$ sunt congruente ca diferente de unghiuri congruente. (2p) Rezulta ca unghiurile $\angle yOA$ si $\angle tOB$ sunt congruente si au masurile de cate $80°$. (3p)

Inseamna ca masura $\angle yOt$ este $180° - (80° + 80°) = 20°$ (2p)

4) a) Reuniunea segmentelor S_A si S_B nu este un segment deoarece nu contine mijlocul segmentului AB. (3p)

b) Reuniunea segmentelor S_A, S_B si S_M este un segment deoarece mijlocul segmentului AB este continut in segmental S_M. (4p)

CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICA "JOSE MARTI"

BUCURESTI, 13.01.2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA a VII-a

1) a) A=31, deci este numar natural. (3p)

b) $31^{100} = 961^{50} < 1000^{50} = 10^{150}$. (3p) Numarul 10^{150} are 151 de cifre, rezulta ca 31^{100} are cel mult 150 de cifre. (1p)

2) a) Numarul cazurilor posibile este 64 (2p), iar numarul cazurilor favorabile este 22 (2p). Deci p_8 este 11/32. (1p)

b) Numarul cazurilor posibile este 81, numarul cazurilor favorabile este 27, deci p_9 = 1/3. (1p) Rezulta ca $p_8 > p_9$. (1p)

3) a) Punctul I este situate la egala distanta de dreptele MN si NZ, rezulta ca se afla pe bisectoarea unghiului $\angle MNZ$. (3p)

b) Triunghiul FDB este isoscel. Rezulta ca unghiul FDB este congruent cu unghiul FBD care, la randul sau, este congruent cu unghiul BDC. (2p)
In triunghiul AEC, EO este bisectoare. (1p) Folosind punctul a) pentru triunghiul AEC si secanta PD, rezulta ca PO este bisectoare unghiului APD (sau semidreapta opusa acesteia). Deci unghiul OPA este congruent cu unghiul OPD. (1p)

4) a) Din x/3=y/4=*k* rezulta ca y-x=*k*, deci *k* este un numar natural (2p). Rezulta ca x=3*k*, y= *4k* sunt numere naturale si $x^2 + y^2 = (5k)^2$ este patrat perfect. (1p)

b) Fiecare patrat al multiplilor lui 5 mai mari decat 2007 poate fi scris conform punctului a) ca suma de patrate ale unor multipli de 3 si multipli de 4. (2p)
Consideram numerele de forma 3*k*, 4*k*, 5*k* pentru $k \geq 402$ si $k \leq 501$, obtinem o suta de triplete care ne permit sa inlocuim o suta de termeni ai sumei N cu cincizeci de termeni diferiti intre ei si de cei anteriori. (2p)

CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICA “JOSE MARTI”

BUCURESTI, 13.01.2007

BAREM DE CORECTARE

CLASA a VIII-a

1) a) Putem considera c=a si d=-b . (2p) In aceste conditii, raportul dat este egal cu $\frac{a^2-3b^2}{2a}$, care este un numar rational. (1p)

b) Consideram m= 2k+1 si n=2k-1 si obtinem $\frac{m\cdot n+1}{m+n}=k$. (4p)

2) a) Triunghiul ABN este isoscel, deci AP este mediatoarea segmentului BN. Rezulta PN= PB. (1p) Deasemenea, triunghiul BPC este isoscel cu BP=PC (1p). Deducem ca PN=PC. (2p)

b) Triunghiurile MPB si MPN sunt congruente, deci unghiul MNP este congruent cu unghiul MBP. (2p) Dar unghiul PBC este congruent cu unghiul PCB, deci unghiul PCM este congruent cu unghiul PNM. (1p) Rezulta ca patrulaterul PMNC este inscriptibil.

3) a) Distanta dintre dreptele BO’ si AD’ este egala cu distanta dintre planele paralele (BA’C’) si (D’AC). (3p) Distanta dintre cele doua drepte este $\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$. (2p)

b) Daca O este centrul bazei ABCD, sinusul unghiului dintre dreapta BO’ si AD’ este egal cu sinusul unghiului AD’O (1p) si anume $\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. (1p)

4) a) Multimea data este egala cu {-1;0}. (3p)

b) Conform punctului a), opt dintre numerele E(x), E(2x),….,E(56x) trebuie sa fie nule. (2p) Rezulta ca x este un numar rational cu numitorul egal cu 56/8=7. (1p)
In total sunt 6x56=336 numere care verifica egalitatea data (1p).