COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a V-a

1. Fie $A=1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n, n\in \mathbb{N}, n\geq 5$.
   a) Aflati ultima cifra a numarului *A*.
   b) Aratati ca 2007(*A* – 4) nu este patrat perfect.

2. Fie $n\in \mathbb{N}$ astfel încât numarul 3^n se termina cu cifra 7.
   a) Aflati restul împartirii lui *n* la 4.
   b) Aflati ultima cifra a lui 7^n.
   c) Aflati penultima cifra a lui 7^n.

3. O carte are 186 de pagini. Un copil citeste în prima zi un numar de pagini, iar în fiecare dintre zilele urmatoare un numar dublu de pagini fata de ziua precedenta. În câte zile a terminat copilul de citit cartea ? (Analizati toate situatiile posibile!)

Subiect elaborat de Letitia Minculescu

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA – 2007

CLASA a VI-a

1. Se dau numerele naturale *a, b, c* astfel încât $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{3c+7}{2c+1}$.
   a) Aratati ca $a \vdots 3$ si $b \vdots 5$;
   b) Determinati numerele naturale *a, b, c.*

2. Fie $S=\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\ldots+\frac{1}{50}$.
   a) Demonstrati ca $\frac{6}{25}<S<\frac{1}{3}$;
   b) Daca $S=\frac{p}{q}$, $p,q\in \mathbb{N}$, $(p,q)=1$, demonstrati ca $p \vdots 89$ si $q \vdots 2$.

3. Pe laturile unghiului propriu $\widehat{xOy}$ se considera punctele $A,B\in (Ox$ si $C,D\in (Oy$ astfel încât $[OA]\equiv[OC]$ si $[OB]\equiv[OD]$, iar *OA*< *OB*. Demonstrati ca:
   a) $\Delta OBC\equiv\Delta ODA$;
   b) Daca $BC\cap AD=\{S\}$, atunci $\Delta ASB\equiv\Delta CSD$;
   c) (*OS* este bisectoarea unghiului $\widehat{xOy}$.

Subiect elaborat de Alice Anita

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a VII-a

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Daca $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$ este numar rational, aratati ca $a \cdot c$ este patrat perfect.

2. Sa se arate ca pentru $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$.

3. Fie *M* si *N* mijloacele laturilor [*CD*] si [*BC*] ale patrulaterului convex *ABCD*. Daca punctul *O* de intersectie al diagonalelor patrulaterului este centrul de greutate al triunghiului *AMN* , aratati ca *ABCD* este paralelogram.

4. Fie *ABCD* un trapez dreptunghic cu unghiurile $\sphericalangle A$ si $\sphericalangle D$ drepte si cu unghiul $\sphericalangle B$ ascutit. Notam cu *M* punctul de intersectie al dreptei *AD* cu mediatoarea segmentului [*BC*]. Aratati ca m($\sphericalangle ABC$) = 45° daca si numai daca [*MD*]≡[*AB*].

Subiect elaborat de Sergiu Prisacariu

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a VIII-a

1. a) Daca *a* si *b* sunt numere reale astfel încât $a^2+b^2-2\sqrt{2}a-2\sqrt{3}b=-5$, aratati ca $\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\right)(b-a)=1.$

b) Rezolvati ecuatia $\dfrac{x^{2007}+1}{2}+\dfrac{2x^{2007}+1}{3}+\dfrac{3x^{2007}+1}{4}+\ldots+\dfrac{nx^{2007}+1}{n+1}=n, n \in \mathbb{N}^*.$

2. a) Fie *a*, *b*, *c* rationale strict pozitive cu $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$. Aratati ca $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \in \mathbb{Q}$.

b) Demonstrati ca pentru orice numere rationale strict pozitive *x*, *y*, *z*, diferite doua câte doua, numarul $A=\sqrt{\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}}$ este rational.

3. Pe muchiile $[AB],[BC],[CD],[DA]$ ale tetraedrului regulat *ABCD* se iau punctele *M*, *N*, *P* si respectiv *Q*, astfel încât $AM=BN=CP=DQ \neq \dfrac{1}{2}AB$. Notam cu *O* mijlocul segmentului $[MP]$. Sa se arate ca dreapta *MP* este perpendiculara pe planul (*NOQ*).

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se noteaza cu *O* centrul fetei $BCC'B'$ si cu O' centrul fetei *ABCD*. Se stie ca aria triunghiului *DOB* este $\sqrt{3}$ cm.

a) Sa se afle latura cubului;

b) Aratati ca planul (ACB') este paralel cu planul $(A'C'D)$;

c) Aratati ca $AC' \perp A'O'$;

d) Calculati cosinusul unghiului dintre dreptele *DO* si $A'B$.

Subiect elaborat de Valentina Blendea

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a IX-a

1. Sa se demonstreze ca
$$\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]+\left[\frac{1-\sqrt{8n+1}}{2}\right]=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a+b+c=1$. Sa se demonstreze inegalitatea
$$a^3+b^3+c^3+6abc\le a^2+b^2+c^2.$$

3. Se considera în plan punctele A, B, C, D, oricare trei necoliniare, iar H_1, H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ABC si respectiv ABD. Sa se arate ca A, B, C, D sunt conciclice daca si numai daca $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CD}$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare si $O\in \text{Int}ABC$ un punct mobil. Fie $AO\cap BC=\{A'\}$, $BO\cap CA=\{B'\}$, $CO\cap AB=\{C'\}$, $B'C'\cap AO=\{D\}$. Sa se arate ca produsul $\frac{C'D}{B'D}\cdot\frac{B'C}{C'B}$ este constant.

Subiect elaborat de Gabriela Zanoschi

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a X-a

1. Fie $\mathsf{C}=\{z\in\mathbb{C}\,\|z|=1\}$. Sa se rezolve în $\mathsf{C}\times\mathsf{C}$ ecuatia $z_1z_2=z_1+z_2+3$.

2. Functia $f:A\to B,\ A,B\subset\mathbb{R}$, are proprietatea ca $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in A$. Sa se determine functia în fiecare din cazurile:

i) $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{Q}$; *ii)* $A=\mathbb{Q}, B=\mathbb{Z}$; *iii)* $A=\mathbb{Q}, B=\mathbb{Q}$.

3. Fie punctul B mobil pe segmentul $[AC]$. Se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele AMB, BNC si APC, de ipotenuze $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$, astfel încât punctele M si N sa fie în semiplan opus lui P fata de AC. Daca G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale celor trei triunghiuri, sa se determine ce figura parcurge centrul de greutate al $\Delta G_1G_2G_3$ când B parcurge $[AC]$.

4. Se considera multimile A_n, $n=\overline{1,10000}$, definite prin
$$A_1=\left\{\frac{n}{2007}\,\middle|\, n=1,2,\dots,10000\right\};\quad A_{k+1}=\left(A_k\setminus\{a_k,b_k\}\right)\cup\left\{a_k^{2\lg b_k}\right\},\ k\ge 1,$$
unde $a_k, b_k\in A_k$ sunt arbitrare astfel încât $a_k^{2\lg b_k}\notin A_k$. Sa se determine A_{10000}.

Subiect elaborat de Gabriel Popa

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a XI-a

1. Fie matricile $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2007^x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Calculati $\prod_{k=1}^{2007} A(k)$.

2. Fie *M* multimea matricelor de forma $A_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ -b_n & a_n\end{pmatrix}$, cu $a_n=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}{2}$ (la numarator sunt *n* radicali), iar $b_n=\sqrt{1-a_n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinati A_1^{2007};

b) Verificati ca $a_n=2\cdot a_{n+1}^2-1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

c) Aratati ca exista $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A_{2007}^n=I_2$.

3. Fie sirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{2007}{x_n^2}\right)$, $x_0\geq\sqrt[3]{2007}$. Demonstrati ca $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent,iar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{2007}$.

4. Aratati ca daca exista $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a_{n+1}-a_n\right)=l\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$, atunci sirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict monoton de la un rang încolo, iar $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty\cdot\operatorname{sgn} l$.

Subiect elaborat de Silviu Boga

COLEGIUL NATIONAL IASI
OLIMPIADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALA - 2007

CLASA a XII-a

1. Fie $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\begin{cases}\sin^n\dfrac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0; & x=0\end{cases}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrati ca f_2 nu are primitive, însa f_3 are primitive pe $\mathbb{R}$.

2. Fie $(G;\cdot)$ un grup de ordin 101, iar $f:G\to G$, $f(x)=x^7$. Demonstrati ca f este automorfism de grupuri;

3. Determinati o primitiva a functiei $f:(0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)$.

4. Fie $(M,\cdot)$ un monoid. Demonstrati ca $Z(M)=\{a\in M\,|\,ax=xa,\forall x\in M\}$ este submonoid al lui *M*. Determinati apoi $Z(M_n(\mathbb{R}))$ si $Z(S_n)$.

Subiect elaborat de Cristian Lazar