OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A V-A

1)

a) Arătați că $a\cdot\overline{xy}+b\cdot\overline{yx}=\overline{ab}\cdot x+\overline{ba}\cdot y$, oricare ar fi cifrele nenule a, b, x, y ale bazei zece.

b) Folosind (a) calculați :

$$(1\cdot 23+32\cdot 2):(12\cdot 2+21\cdot 3)+(3\cdot 45+54\cdot 4):(34\cdot 4+43\cdot 5)+$$
$$+(5\cdot 67+76\cdot 6):(56\cdot 6+65\cdot 7)+(7\cdot 89+98\cdot 8):(78\cdot 8+87\cdot 9)$$

c) Aflați cifrele nenule a, b, x, y ale bazei zece pentru care $a\cdot\overline{xy}+b\cdot\overline{yx}=1407$ ştiind că sunt îndeplinite simultan condi țiile :

1) a, x, y (în această ordine) sunt cifre consecutive;
2) cifra a este număr prim;
3) cifra x este cub perfect;
4) cifra y este pătrat perfect.

Problemă propusă de prof. Gheorghe Pădurariu

2) Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$ astfel încât $\overline{abc0abc}+\overline{abc000}+\overline{abc0}$ să fie pătrat perfect.

Problemă propusă de prof. Zenovia Ismailescu

3) Să se precizeze scrierea în baza 2 a numărului $\overline{abc}$ ştiind că :

a = ultima cifră a lui 2007^{N+2} , unde $N=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2007}$

b=restul împărțirii lui $2006^{2007}+2007^{2006}$ la 1003

c=cardinalul mulțimii $M=\{x\in\mathbb{N} \,/\, 2000<3^x<2200\}$

Problemă propusă de prof. Nicoleta Balaş

4) Se ştie că o şcoală are exact 2007 elevi. Să se arată că cel puțin doi dintre elevii şcolii, luați la întâmplare, au acelaşi număr de prieteni. (Se presupune că, dacă elevul A este prietenul elevului B, atunci şi elevul B este prietenul elevului A. Un elev nu poate fi prietenul lui însuşi.).

Problemă propusă de prof. Georgeta Balacea

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A VI-A

1. Aflați numărul natural x din ecuația $x^a = 4096$, știind că:

$$a = \left[2006 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{1004}{1005}\right)\right] : \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots + \frac{1006}{1005}\right)$$

Problemă propusă de prof. Nicoleta Balaş

2. Se consideră dreptele AB şi CD care se intersectează în punctul O. Fie [OE, [OF, [OP bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOE$ şi respectiv $\sphericalangle AOD$. Ştiind că $m(\sphericalangle BOE) = 120^0$, să se calculeze $m(\sphericalangle BOF)$.

Problemă propusă de prof. Rodica şi Dumitru Bălan

3. Să se găsească numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza zece, pentru care $(\overline{ab}, \overline{ba}) = a + b$. Notația (m, n) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale m şi n.

Problemă propusă de prof. Gheorghe Pădurariu

4. a) Dacă numărul natural nenul A este de forma $A = 2^k \cdot 3^p$, unde $k, p \in \mathbb{N}^*$, să se determine numărul de divizori naturali ai lui A.

b) Să se determine câte numere naturale nenule n, mai mici decât 100, există, pentru care n^2 să aibă de două ori mai mulți divizori naturali decât n.

Problemă propusă de prof. Marian Drăgoi

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A VII-A

1) Să se rezolve în $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ecuația : $a^2 + b^2 + 7(b-a) = 54$

Problemă propusă de prof. Tatiana Saulea

2) Să se determine cifrele a şi b (din baza 10) ştiind că numărul rațional **r** = $\overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)}$ se poate scrie sub formă de fracție zecimală finită.

Problemă propusă de prof. Mariana Coadă

3) Fie Δ ABC isoscel, cu [AB]≡[AC] şi m(∢BAC)=20°. Construim M ∈ (AC) astfel încât m(∢ABM)=20° şi MN || BC , N ∈ (AB) . Notăm BM ∩ CN = {O}.

Fie P∈ (OM) , [OP] ≡[PM] , R∈ (NB) , [RN] ≡[RB] , Q∈ (OC) , [OQ] ≡[QC].
Să se arate că ΔPQR este echilateral

Problemă propusă de prof. Iuliana Duma

4) În trapezul ABCD oarecare, $AB \parallel CD$, (AM este bisectoarea ∢CAB , M∈ [BC] astfel încât [BM]≡[MC] şi DM ∩ AB = {E}.

a) Să se arate că DBEC este paralelogram.
b) Dacă AM ∩ CE = {N} şi BP ⊥ BC, P ∈ [CE], arătați că MN= $\frac{1}{2}$ BP.
c) Arătați că $\mathbf{\frac{CE}{CN} = 2 + \frac{BE}{AC}}$.
d) Arătați că $\mathbf{\frac{EP}{CN} = \frac{DC}{AB}}$.
e) Dacă [CN] ≡[NP] ≡[PE] şi $AB \parallel CD$, ABCD rămâne trapez? (justificare). Dacă nu, care este natura patrulaterului ABCD? (justificare).

Problemă propusă de prof. Maria Minea

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A VIII-A

1. Să se determine numărul natural prim n, astfel încât numărul $n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$ să fie număr natural prim.

Problemă propusă de prof. Nicoleta Balaş

2. Se consideră $E(m;n) = \sqrt{7^n + 2 \cdot 49^m}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $E(500;1001) \in \mathbb{Q}$.

b) Să se arate că $E(2007;1000) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) Determinați o pereche $(m;n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu $n \le 100$ astfel încât $E(m;n) \in \mathbb{Q}$.

d) Arătați că există o infinitate de perechi $(m;n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Problemă propusă de prof. Romeo Zamfir

3. Să se rezolve ecuația $\left[\dfrac{1}{2\left(k - \sqrt{k^2 - 1}\right)} \right] = k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ se consideră punctul $M \in (A'C)$ astfel încât $A'M = \frac{1}{2} \cdot MC$. Dacă min(a, b)$\ge$c şi $AM \perp A'C$ arătați că paralelipipedul este cub.

Problemă propusă de prof. Petre Bătrânețu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A IX-A

1) Fie a,b,c $\in \mathbf{R}_+^*$, astfel încât $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}} \leq \mathbf{3}$
Demonstraţi că :
1) $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) \geq 9$
2) $a+b+c \geq 3$

Problemă propusă de prof. Dumbravă Vasile

2) Determinaţi funcţia f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, care îndeplineşte următoarele condiţii:
a) $f(x+1)=f(x)+\frac{x}{1003}$, pentru orice număr natural x;
b) f(2006)=2007.

Problemă propusă de prof. Georgeta Balacea

3) Fie E(x)=$\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{4x}+\mathbf{68}}+\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{26x}+\mathbf{313}}$
1) Să se arate că E(x) are sens, $(\forall)\mathbf{x} \in \mathbf{R}$.
2) Să se găsească minimul expresiei, precum şi valoarea variabilei x_0 în care acesta se realizează.

Problemă propusă de prof. Totolici Mihai

4) În planul triunghiului ΔABC se consideră punctele P,Q,R,M definite astfel:
$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$, $3\cdot\overrightarrow{AQ}+2\cdot\overrightarrow{BQ}=\vec{0}$, $31\cdot\overrightarrow{RA}+18\cdot\overrightarrow{RB}+6\cdot\overrightarrow{RC}=\vec{0}$ şi $AR \cap BC=\{M\}$.
a) Să se arate că punctele P, Q şi R sunt coliniare.
b) Să se afle valoarea raportului $\frac{BM}{CM}$.

Problemă propusă de prof. Mariana Coadă

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A X-A

1. Fie $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a_1 = r_1 \cdot a_n,\ a_2 = r_2 \cdot a_n, \dots\ a_{n-1} = r_{n-1} \cdot a_n$, unde $r_1, r_2, \dots r_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \{a_1 x\} \cdot \{a_2 x\} \cdot \dots \cdot \{a_n x\}$ este periodică.

Problemă propusă de prof. Vasile Popa

2. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația:

$$\sqrt{6x - y^2 - 4z + 1} - \sqrt{y + 4z^2} = \sqrt{9x^2 + y + 4}$$

Problemă propusă de prof. Felix Arhire

3. Demonstrați că numărul $1 + \left[\left(3 + \sqrt{5}\right)^{2007}\right]$ se divide cu 2^{2007}, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

4. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația:

$$2^{1-3^{1-4^{1-5^{\cdots^{1-2007^{1-2008^{1-(x-2007)}}}}}}} = 1 + \log_2\left(1 + \log_3\left(1 + \dots \log_{2007}\left(1 + \log_{2008}\left([x - 2007]\right)\right) \dots\right)\right),$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

.

Problemă propusă de prof. Viorel Ion

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A XI-A

1. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietățile:

a) $x_n \geq 2,\ \forall n \geq 1$

b) $x_{n+1} \leq x_n^2 - 4 \cdot x_n + 6,\ \forall n \geq 2$

c) $x_{n+1} + x_n^2 \leq 4 \cdot x_n - \frac{3}{2},\ \forall n \geq 1$

Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Problemă propusă de prof. Romeo Zamfir

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[n]{a} - 2\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}\right)$, unde $a \in \mathbb{R},\ a > 0$.

Problemă propusă de prof. Vasile Popa

3. Fie $A \in \mathrm{M}_n(R)\quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ astfel încât $A^2 + A + I_n = O_n$. Aflați $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, ştiind că $\det\left(A^n + I_n\right) = 2^{2007}$.

Problemă propusă de prof. Felix Arhire

4. Arătați că mulțimea formată din triunghiurile cu laturile de lungimi $a-1,\ a$ şi respectiv $a+1$, unde $a \in \mathbb{R},\ a > 2$, include o submulțime infinită de triunghiuri cu lungimile laturilor şi respectiv aria, numere naturale.

Problemă propusă de prof. Gheorghe Pădurariu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17 FEBRUARIE 2007

CLASA A XII-A

1. Fie a şi b două numere reale pozitive, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \int_a^b x^n f(x)\, dx$.

Problemă propusă de prof. Constanța Gusta

2. Să se arate că funcția $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\arcsin x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(x + \arcsin x)(x - \arcsin x)}$ este definită pe intervalul $(0, 1)$ şi admite primitive. Să se determine o primitivă a sa.

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

3. Fie M o mulțime finită de funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietățile:

i) M este monoid în raport cu operația de compunere a funcțiilor;
ii) Funcțiile parte întreagă şi parte fracționară aparțin mulțimii M.

a) Care este numărul minim de elemente pe care îl poate avea M?
b) Să se dea un exemplu de astfel de monoid cu exact 2007 elemente.

Problemă propusă de prof. Marian Baroni

4. Fie $A \in \mathrm{M}_2(Z_3)$ astfel încât $G = \{I, A, A^2\}$ este un grup finit cu trei elemente în raport cu înmulțirea matricelor. Determinați toate grupurile G de acest fel.

Problemă propusă de prof. Felix Arhire

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.