CONCURSUL EUCLID, 14 aprilie 2006
CLASA a V-a

PARTEA I : Trece pe foaia de concurs doar rezultatele

(5 p) 1. Numărul multiplilor lui 2006, mai mici ca 2006, este …….

(5 p) 2. Ultimele trei cifre ale numărului $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\ldots\cdot 27+19$ sunt …….

(5 p) 3. Valoarea de adevăr a propoziţiei: "Numărul $16^{n+1}\cdot 25^{n+2}+9^{2n+1}+4$, unde $n \in |N$, este pătrat perfect", este …….

(5 p) 4. Numărul: $\left(\frac{7}{9}+\frac{77}{99}+\frac{777}{999}\right):\ \frac{7}{9}\quad\frac{111}{700}:\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{70}+\frac{1}{700}\right)$ este egal cu …….

(5 p) 5. Rezultatul calculului:
$2006^{1+2+3+\ldots+2006}\cdot\{[(2006^{2006})^{2006}:2006^{20062006}]^{0}\cdot 2006-2006\}:2006$ este …….

(5 p) 6. Numărul natural care, împărţit la un număr de o singură cifră, dă restul 8 şi câtul 13 este …….

(5 p) 7. Numărul de forma $\overline{ab}$, cu a < b, care adunat cu răsturnatul său dă suma 176 este …….

(5 p) 8. Dintre numerele 2^{145} si 3^{87} mai mare este numărul ……

(5 p) 9. Numărul natural x, pentru care mulţimile A = {2x19, x+23, 2x+26} şi B = {3x+1, x+6, 2x2} sunt egale, este …….

(5 p) 10. Suma numerelor naturale n, care verifică relaţia $\frac{2}{7}\le\frac{n}{21}<\frac{1}{2}$ este …….

PARTEA A DOUA : Trece pe foaia de concurs rezolvările complete

(20p) 1. Fie a un număr natural. Împărţind 623 la a se obţine un rest mai mic cu 2a decât 218.

a) Arătaţi că $a \geq 73$;

b) Arătaţi că a divide 405;

c) Dacă, in plus, a este un pătrat perfect mai mic decât 150, aflaţi a.

(20p) 2. a) Arătaţi că fracţia $F=\dfrac{3^1+3^3+3^5+\ldots+3^{155}}{455}$ este reductibilă.

b) Arătaţi că fracţia F este număr natural.

NOTĂ: Se acordă 10 puncte din oficiu.
Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 de minute.

SUCCES !

CONCURSUL EUCLID, 14 aprilie 2006

<u>CLASA a VI-a</u>

PARTEA I : Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

(5 p) 1. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ şi $\frac{c}{d}=\frac{9}{14}$, atunci $\frac{3ac-bd}{4bd-7ac}$ este …

(5 p) 2. Triunghiul ABC cu bisectoarea [CD a unghiului C, $D\in(AB)$, iar E este un punct astfel încât $B\in(AE)$. Dacă m($\widehat{ECA}$)=104° şi m($\widehat{ECB}$)=40°, atunci m($\widehat{ECD}$)= …

(5 p) 3. Un dicționar costă 250 lei. După o scumpire cu 15%, dicționarul costă …

(5 p) 4. Media aritmetică a numerelor 20 şi 30% din 20 este …

(5 p) 5. Valorile lui $x\in N$ pentru care fracția $\frac{7}{x-9}$ este supraunitară sunt…

(5 p) 6. Suplementul unui unghi are măsura de 130°42'18". Complementul său are măsura de …

(5 p) 7. Numerele x, y, z sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 şi 4 şi 2x+y+5z = 81, atunci: x = …, y = …, z = …

(5 p) 8. Din 15m de stofă se confecționează 6 costume. Pentru a confecționa 10 costume sunt necesari …… metri de stofă.

(5 p) 9. Fie punctele A,B,C,D coliniare astfel încât: $B\in(AC)$, $C\in(BD)$, AB = 3cm, BC = 2cm, CD = 9cm. Fie M mijlocul segmentului AC şi N mijlocul segmentului CD. Segmentele: [AC], [AD], [BD] şi [MN] au lungimile …

(5 p) 10. Dintr-o cantitate de aur se realizează 20 de inele având fiecare 1,5 grame. Din aceeaşi cantitate se pot realiza un număr de … inele cu greutatea de 2 grame fiecare.

PARTEA A DOUA : Trece pe foaia de concurs rezolvările complete

(20p) 1. Fie unghiul AOB un unghi drept şi d o dreaptă care trece prin O şi nu are puncte în interiorul unghiului AOB. Fie $C\in d$ situat în semiplanul determinat de dreapta OB şi punctul A, iar $D\in d$ astfel ca (OC şi (OD să fie semidrepte opuse.

a) Demonstrați că unghiul AOC este ascuțit;

b) Dacă $M\in int(\widehat{AOB})$ astfel încât $\widehat{AOC}\equiv\widehat{AOM}$, demonstrați că [OB este bisectoarea unghiului MOD.

(20p) 2. Fie a = x(x-1)(x-2)…(x-1998) şi $b\in N\setminus\{0\}$. Aflați valorile lui x pentru care: $\frac{a+b}{a+3b}=\frac{a+2b}{a+6b}$.

NOTĂ: Se acordă 10 puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 de minute.

CONCURSUL EUCLID, 14 aprilie 2006
<u>CLASA a VII-a</u>

PARTEA I : Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

(5 p) 1. Fie E(x) = 4[x(x-5)+7]. Valoarea minimă a expresiei E(x) este …

(5 p) 2. Fie numărul $a = \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$. Valoarea lui $\left(a+2\sqrt{3}\right)^{2006}$ este …

(5 p) 3. Fie ABCD un trapez cu bazele AB = 5 cm, CD = 3 cm şi $AC \cap BD = \{0\}$. Ştiind că $A_{DOC} = 18\ cm^2$ atunci A_{AOB} = …

(5 p) 4. Într-o urnă sunt 2006 bile numerotate de la 1 la 2006. Probabilitatea ca, prin extragerea unei bile, să obţinem câtul egal cu restul la împărţirea numărului scris pe bilă la 11 este …

(5 p) 5. Fie mulţimea $M_n = \left\{x \in Z \middle| x^2 = 2^n, n \in N\right\}$.

Numărul elementelor mulţimii $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{2005}$ este …

(5 p) 6. Cel mai mare număr întreg mai mic decât x, unde

$x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ este …

(5 p) 7. În ΔABC, AD şi BE sunt înălţimi, unde $D \in BC$ şi $E \in AC$. Fie $BC = 2a\sqrt{3}$ şi $AC = 3a\sqrt{2}$, a>0. Valoarea raportului $\dfrac{AD}{BE}$ este egală cu …

(5 p) 8. În ΔABC, BC = 10 cm iar medianele BB′ şi CC′ au lungimile de 9cm, respectiv 12cm. Lungimea medianei AA′ = …

(5 p) 9. Într-un trapez dreptunghic cu diagonalele perpendiculare, lungimile bazelor sunt $\left(5\sqrt{2}+1\right)$cm şi $\left(5\sqrt{2}-1\right)$cm. Lungimea înălţimii trapezului este de …

(5 p) 10. Într-un triunghi dreptunghic lungimea înălţimii este de 6cm iar raportul lungimilor segmentelor determinate de ea pe ipotenuză este $\dfrac{1}{3}$. Perimetrul triunghiului este…

PARTEA A II-A : Trece pe foaia de concurs rezolvările complete

(20p) 1. a) Să se arate că oricare ar fi numărul real a > 0, $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$;

b) Dacă a, b, c, d > 0, atunci: $\dfrac{a+b+c}{d} + \dfrac{a+b+d}{c} + \dfrac{a+c+d}{b} + \dfrac{b+c+d}{a} \geq 12$

(20p) 2. Fie D piciorul bisectoarei din A a ΔABC şi ED | | AB, $E \in (AC)$. Se cere să se demonstreze că $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

NOTĂ: Se acordă 10 puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 de minute.

CONCURSUL EUCLID, 14 aprilie 2006

CLASA a VIII-a

PARTEA I : Trece pe foaia de concurs doar rezultatele:

(5 p) 1. Fie d un divizor comun al numerelor 1400 şi 600. Probabilitatea ca d să fie pătrat perfect este …

(5 p) 2. Media geometrică a numerelor $2-\sqrt{3}$ şi $2+\sqrt{3}$ este …

(5 p) 3. Numerele reale x, y pentru care este îndeplinită egalitatea: $x^2+3y^2-4x+2\sqrt{3}y+5=0$ sunt ...

(5 p) 4. Dacă $0 < x < 1$, $x+\frac{1}{x}=7$ atunci $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ este …

(5 p) 5. Cel mai mic număr întreg care verifică inegalitatea $2\left(x+\sqrt{5}\right) < 4+x\sqrt{5}$ este…

(5 p) 6. Se dă pătratul ABCD de latură 3cm. VD⊥(ABC), VD = 5cm, atunci cosinusul unghiului $\left((ABC),(VAB)\right)$ este …

(5 p) 7. Fie cubul ABCDA'B'C'D', M mijlocul segmentului (AD), N mijlocul segmentului (BC), aria triunghiului A'MN este $2\sqrt{5}$, atunci muchia cubului este …

(5 p) 8. Fie rombul ABCD cu latura de 6cm, m($\hat{A}$) = 60°. Pe planul rombului se ridică perpendiculara MA de 3cm. Atunci d(M,BC) = …

(5 p) 9. Fie trapezul ABCD, AB| |DC, AC⋂BD = {O}, A_{AOB} = 2cm², A_{DOC} = 8cm², înălţimea trapezului are 6cm, atunci media geometrică a înălţimilor ΔAOB şi Δ DOC este …

(5 p) 10. O prismă triunghiulară regulată ABCA'B'C' are AB = 2cm, AA' = $2\sqrt{2}$ cm. Fie P şi Q mijloacele muchiilor (AB) respectiv (AC). Notăm A'P⋂BB' = {M}, A'Q⋂CC' = {N}, atunci $A_{A'MN}$ este egală cu …

PARTEA A DOUA : Trece pe foaia de concurs rezolvările complete

(20p) 1. Fie funcţia f:R→R, f(x) = ax+b.

a) Determinaţi a şi b ştiind că graficul funcţiei trece prin punctul de coordonate (1,0) şi face cu axa OX un unghi de 45°;

b) Pentru a = 1 şi b = -1 arătaţi că numărul f(1982)· f(1983)· f(1984)· f(1985) +1 este pătrat perfect.

c) Pentru a = 1 şi b = -1 calculaţi valoarea expresiei:

$$\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+\frac{1}{f(4)\cdot f(5)}+...+\frac{1}{f(2006)\cdot f(2007)}$$

(20p) 2. Se dă piramida triunghiulară regulată VABC în care raza cercului circumscris bazei este $2\sqrt{3}$ şi muchia laterală $4\sqrt{3}$. Calculaţi:

(10aria laterală şi volumul piramidei;

(11 $d\left(A,(VBC)\right)$;

(12 Fie M∈(VA). Să se găsească poziţia lui M astfel încât aria ΔMBC să fie minimă.

NOTĂ: Se acordă 10 puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 de minute.