CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a V-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{90}b_{90}}$ **2p**

$\overline{a_1b_1} + \overline{a_2b_2} + \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{90}b_{90}} = 10 + 11 + ... + 99 = 4905$ **1p**

$a_1 = 4$ **1p**

$b_1 = 7$ **1p**

$\overline{a_2b_2} = 79$ **1p**

$\overline{a_1b_1a_2b_2} = 4779$ **1p**

Problema 2.

$11n + 7 = 70c_1 + 8$ **1p**

$8n + 5 = 50c_2 + 13$ **1p**

$55n + 35 = 350c_1 + 40$ **1p**

$56n + 35 = 350c_2 + 91$ **1p**

$n = 350\,(c_2 - c_1) + 51 = M_{10} + 1$ **2p**

$u\,(n) = 1$ **1p**

Problema 3.

$S_1 = 1,\ S_2 = 5$ **1p**

$S_3 = 113,\ S_4 = 27761$ **1p**

$5? = 86.400.000 = M_{10^5}$ **1p**

$k? = M_{10^5},\ \forall\ 5 \le k \le n$ **1p**

$S_n = S_4 + M_{10^5}$ **2p**

$S_n = ...27.761$ **1p**

Problema 4.

$2007 = 3 \cdot 669 = M_3$ **1p**

$2006 = 3 \cdot 668 + 2 \neq M_3$ **1p**

n înlocuit cu $2n$: $3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid 2n$ **2p**

n înlocuit cu $s(n)$: $n \equiv s\,(n) \bmod 3$ **2p**

Finalizare **1p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$S = \{a, b, a+b\}$, cu $1 \le a < b < a+b \le 2006$ **1p**

$2a < a+b \le 2006 \Rightarrow 1 \le a \le 1002$ **1p**

Submulţimile *binecrescute* care conţin un $a \in \{1, 2, ..., 1002\}$ sunt $\{a, a+1, 2a+1\}$, $\{a, a+2, 2a+2\}$ ... $\{a, 2006-a, 2006\}$ **2p**

$N_a = 2006 - 2a$ **2p**

$N = 1005\,006$ **1p**

Problema 2.

a) n_k° sunt diferite, $k = \overline{1, 18} \Rightarrow n_1^\circ + n_2^\circ + ... + n_{18}^\circ \ge 171^\circ$, contradicţie **3p**

b) Există 15 unghiuri cu măsurile $\ge 12^\circ$ $\Rightarrow$suma măsurilor lor este $\ge 180^\circ > 170^\circ$, contradicţie **4p**

Problema 3.

$A_{n-1}A_n = n!$ **2p**

$A \in (A_m A_{m+1}) \Rightarrow A_0 A_m < A_0 A < A_0 A_{m+1}$ **1p**

$2006 = 1! + 2! + ... + m! + A_m A$ **2p**

$m = 6$ **1p**

$A \in (A_6 A_7) \Rightarrow A$ este colorat în roşu **1p**

Problema 4.

Resturile la împărţirea cu $2, 3, ..., 9$ sunt $1, 2, ..., 8$ **3p**

$d \mid n+1,\ 1 \le d \le 9$ **2p**

$n + 1 = c.m.m.m.c.\,[2, 3, ..., 9] = 2520 \Rightarrow n = 2519$ **2p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
NICOLAE COCULESCU
Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$a_i \mid a_j$ şi $a_i \neq a_j \Rightarrow a_j \geq 2a_i$ **2p**
$a_k \geq 2^{k-1}a_1,\ k = \overline{1,11}$ **2p**
$a_1 = 1$ **1p**
$a_k = 2^{k-1},\ k = \overline{1,11}$ **2p**

Problema 2.

$\dfrac{m^k}{n^k} \in A,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$ **2p**
$\dfrac{n^k}{m^k} \in A,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$ **2p**
Unul dintre numerele $\dfrac{m^k}{n^k}$ şi $\dfrac{n^k}{m^k}$ este mai mic decât 1 .... **2p**
$(0,1) \cap A$ este infinită **1p**

Problema 3.

a) $A' \in (BC)$ a.î. $[A'B] \equiv [AB]$ **1p**
$A'D = AD = A'C$ **1p**
$m\left(\widehat{BAC}\right) = 2m\left(\widehat{C}\right)$ **2p**
b)$CD > AD$ **2p**
$CD < 2AD$ **1p**

Problema 4.

Alegerea punctelor P şi Q **2p**
$\triangle FPM \equiv \triangle MQE$ (LLL) $\Rightarrow \widehat{FPM} \equiv \widehat{EQM}$ **3p**
$\widehat{FPD} \equiv \widehat{EQD}$ **1p**
$\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$ **1p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$E=(tx+1)(ty+1)+(ty+1)(tz+1)+(tz+1)(tx+1)-3$ **3p**

$|tx|=|t|\cdot|x|\leq 1$ şi analoagele **1p**

$tx+1\geq 0$ şi analoagele **1p**

$E\geq -3$ **1p**

$\min E=-3$ $(x=y=z=1, t=-1)$ **1p**

Problema 2.

$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(a^3+b^3+c^3\right)=1-6abc$ **4p**

$27abc\leq(a+b+c)^3=1$ **2p**

Observaţie. Pentru menţionarea inegalităţii mediilor $MA-MG$ se acordă cele **2p** de mai sus.

Finalizare **1p**

Problema 3.

Aplicarea principiului cutiei pentru hexagonul regulat şi alegerea celor trei puncte pe arcul AB **3p**

Pentru orice trei puncte Q,R,S de pe arcul $AB\Rightarrow A[QRS]\leq A[AQB]$ **1p**

Pentru orice punct Q de pe arcul AB avem $A[AQB]\leq A[APB]$ **2p**

$A[APB]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **1p**

Problema 4.

A,G,G',A_1 coliniare **1p**

$\dfrac{G'A}{G'A_1}=6$ **1p**

$G'A_1=\dfrac{m}{7}$ şi $G'G=\dfrac{4m}{21}$ **1p**

$\dfrac{MC}{MG}=\dfrac{3}{2}$ **1p**

$MN=\dfrac{2}{5}l$ **1p**

$GMG'N$ ortodiagonal **1p**

Aria $[GMG'N]=\dfrac{8}{105}S$ **1p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$\dfrac{c}{a+b} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\right)$ şi analoagele **2p**

$x+y+z \le x^2+y^2+z^2$ **3p**

$xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2$ **1p**

Finalizare **1p**

Problema 2.

$a_1 = 1$ **1p**

$a_2 = 2$ **1p**

Aplicarea principiului inducţiei $\Rightarrow a_n = n$ **5p**

Problema 3.

$\overrightarrow{AG_a} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OH} - \dfrac{5}{3}\overrightarrow{OA}$ şi analoagele **2p**

a) $\overrightarrow{G_aG_b} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow G_aG_b \parallel AB$ **1p**

b) AG_a, BG_b şi CG_c sunt concurente în P dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AG_a} \\ \overrightarrow{BP} = \beta\overrightarrow{BG_b} \\ \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CG_c} \end{cases}$$ **2p**

$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{3}{5}$ **1p**

c) $\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{OH} \Rightarrow O, P, H$ coliniare $\Rightarrow G, H, P$ coliniare **1p**

Problema 4.

Înlăturarea celor $2mn$ celule din coloanele de indice par $(2, 4, \ldots, 2n)$ nu permite aşezarea discului de diametru 1,1 .... **2p**

Numărul k de celule înlăturate este $k \le 2mn - 1 \Rightarrow$ există un pătrat 2×2 care să conţină cel mult o celulă ce va fi fost înlăturată **3p**

Discul de rază maximă r care poate fi înscris în 3 celule (rămase) are $r + r\sqrt{2} = \sqrt{2}$ **1p**

$r = 2 - \sqrt{2} > 0,55 \Rightarrow$ un disc de diametru 1,1 poate fi înscris în regiunea rămasă $\Rightarrow N_{\max} = 2mn - 1$ **1p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$a_k \in [6,7] \Rightarrow 13a_k - 42 \geq a_k^2$ **3p**

$\log_{a_k}(13a_{k+1} - 42) \geq 2\log_{a_k} a_{k+1}$ **1p**

Inegalitatea mediilor şi finalizare **3p**

Problema 2.

a) $a - b | b^2 \Rightarrow a - b \leq b^2$ **1p**

$b = \min A \Rightarrow a \leq b + b^2$, $\forall a \in A \Rightarrow A$ este finită **2p**

b) $n = 2 : A = \{1, 2\}$ **1p**

$X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ cu $x_0 = a_1 a_n,\ x_1 = a_1(a_1 + a_n),\ x_2 = a_2(a_1 + a_n),\ ..., x_n = a_n(a_1 + a_n)$ **1p**

X are proprietatea (P) **2p**

Problema 3.

$f(0) = 0$ **1p**

f este funcţie aditivă **2p**

$f(q) = \lambda q, \forall q \in \mathbb{Q},$ unde $\lambda = f(1)$ **1p**

$f(x) = \lambda x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

Înlocuirea în relaţia din enunţ şi obţinerea $\lambda = \pm 1 \Rightarrow f = \pm \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ **1p**

Problema 4.

Aducerea la forma $2007^u - 2006^u + u = 2007^v - 2006^v + v$ **2p**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)^x - a^x + x$ este strict crescătoare (cu demonstraţie!) . **3p**

Observaţie. Pentru menţionarea strictei monotonii a lui f, fără demonstraţie, se acordă **1p**

$u = v \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + m) = 0$ **1p**

$m > \dfrac{1}{4}$ **1p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a XI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ **1p**

$a_n \leq a_{n+1} \leq a_n + 1$ **2p**

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{1}{2}$ (lema Cesaro-Stolz) **2p**

Problema 2.

a) a_{ij} se poate schimba cu $2(n-1)$ elemente ale lui A **1p**

$\mathcal{M}$ are exact $\frac{n^2\cdot 2(n-1)}{2} = n^2(n-1)$ elemente **1p**

b) $\sum\limits_{X\in\mathcal{M}_1} \det X = \sum\limits_{X\in\mathcal{M}_2} \det X$ **2p**

$\det X^i_{jk} = n\det A + (a_{ik} - a_{ij})A_{ij} + (a_{ij} - a_{ij})A_{ik}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \det X^i_{jk} = (n-2)\det A$ **2p**

$\sum\limits_{X\in\mathcal{M}} \det X = n(n-1)(n-2)\det A$ **1p**

Problema 3.

$A \neq rI_2$ **1p**

Reducerea la absurd: există $n \geq 2$ astfel ca $A^n = r^n I_2$ **1p**

$m_A \mid X^n - r^n$ **1p**

$grad\,(m_A) = 1 \Rightarrow m_A = X - r \Rightarrow A = rI_2$, contradicţie **1p**

$grad\,(m_A) = 2 \Rightarrow m_A = X^2 - 2r\cos\frac{2k\pi}{n}X + r^2$ **2p**

$m_A \mid p_A \Rightarrow p_A = m_A \Rightarrow \mathrm{Tr}\,A = 2r\cos\frac{2k\pi}{n} \leq 2r$,contradicţie **1p**

Problema 4.

a) Dacă $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\; m \geq 0,\, p \geq 1$ a.î. $(a_n)_{n\geq 1}$ este periodic **1p**

$0 \leq R \leq P$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = M + \left[\dfrac{n-m}{p}\right] P + R$ pentru $r = n - m - \left[\dfrac{n-m}{p}\right] p$ **2p**

$\dfrac{M-P}{n} + \dfrac{n-m}{np}P < \mu_n \leq \dfrac{M+P}{n} + \dfrac{n-m}{np}P \Rightarrow \mu_n \to \dfrac{P}{p}$ **1p**

b) Alegerea lui a pentru care există subşiruri cu limitele $0, 9$ **1p**

Demonstrarea existenţei unui subşir convergent la $x \in [0, 9]$ **2p**

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1.

$(x^2+\sin x)(x^2+\cos x)' = 2x^3 - x^2\sin x + 2x\sin x - \sin^2 x$ **1p**

$(x^2+\sin x)'(x^2+\cos x) = 2x^3 + x^2\cos x + 2x\cos x + \cos^2 x$ **1p**

$(x^2+\sin x)'(x^2+\cos x) - (x^2+\sin x)(x^2+\cos x)' = x^2(\cos x+\sin x) + 2x(\cos x - \sin x) + 1$ **2p**

Calculul primitivei **3p**

Problema 2.

a) f bijectivă **1p**

b) $(f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$ **1p**

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \frac{\pi}{2}$ (cu Cesaro-Stolz) **2p**

d) $x_n \to 0$ **0,5p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(nx_n) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$ **1,5p**

e) Demonstrarea egalităţii **1p**

Problema 3.

Mulţimea H a funcţiilor din G care admit primitive este subgrup în G **1p**

Formularea rezultatului de demonstrat: $(G,\cdot)$ grup şi $H \le G$, atunci orice aplicaţie $u : G \to G$ cu $u(e) = e$ şi $u(xy) = u(x)u(y)$, $\forall x, y \in G \setminus H$ este endomorfism **1p**

$x \in H$ şi $y \in G \setminus H \Rightarrow u(xy) = u(x)u(y)$ **3p**

$x, y \in H \Rightarrow u(xy) = u(x)u(y)$ **2p**

Problema 4.

$f(\mathbb{R}) \subset (-1,1)$ **1p**

$f([-1,1]) = [-\lambda,\lambda]$, $0<\lambda<1$ **1p**

$|F(x)| \le \lambda|x| \le 1$, $\forall x \in [-1,1]$ **2p**

$(a_n)_{n\ge 0} \subset [-1,1]$ **1p**

$|a_n| = |F(a_{n-1})| \le \lambda|a_{n-1}|$ **1p**

$|a_n| \le \lambda^n|a_0| \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **1p**