CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a IV-a

1. Aflaţi x din egalitatea:

$$\{[(107 - 63 : x)\cdot 9 - 2] : 5 + 3\cdot 9\}\cdot 4 - 12 = 800.$$

2. Se ştie că $a \cdot b = 91$, iar $a \cdot c = 260$. Calculaţi $a \cdot (b + c)$.

3. Suma a trei numere naturale este 123. Al doilea număr este cu doi mai mare decât triplul primului număr, iar al treilea este jumătate din suma celorlalte două. Care sunt numerele?

4. Într-o pungă erau bile roşii, galbene şi albastre. Aflaţi câte bile erau de fiecare fel, ştiind că 32 nu erau albastre, 32 bile nu erau galbene, iar 32 bile nu erau roşii.

5. Într-o carieră sunt 50 de blocuri de piatră, având greutăţile 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 468 kg. (Fiecare piatră, începând cu a doua, are cu 2 kg mai mult decât precedenta).

a) Să se arate că greutatea blocurilor de piatră nu depăşeşte 21 de tone.

b) Se pot transporta blocurile cu 7 camioane de câte 3 tone, fiecare camion făcând un singur transport?

NOTĂ.
1. Timp de lucru 2 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a V-a

1. Fie mulţimile egale de numere naturale

$$\left\{\overline{a_1b_1},\ \overline{a_2b_2},\ ...,\ \overline{a_{90}b_{90}}\right\} = \{10,\ 11,\ ...,\ 99\}.$$

Determinaţi numerele $\overline{a_1b_1a_2b_2}$ cu proprietatea:

$$\overline{a_1b_1a_2b_2} = \overline{a_3b_3} + \overline{a_4b_4} + ... + \overline{a_{90}b_{90}}.$$

Costel Anghel, Slatina

2. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $11n + 7$ dă restul 8 prin împărţirea la 70, iar numărul $8n + 5$ dă restul 13 prin împărţirea la 50. Să se afle ultima cifră a lui n.

Costel Anghel, Slatina

3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $n? = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot n^n$. Să se afle ultimele 5 cifre ale numărului

$$S_n = 1? + 2? + 3? + ... + n?$$

unde $n \geq 4$ este un număr natural.

Dorin Mărghidanu, Corabia

4. Pe ecranul unui computer se află scris un număr $n \in \mathbb{N}$. Pe computer rulează un program care îl înlocuieşte pe n cu $2n$ sau cu $s(n)$, unde $s(n)$ reprezintă suma cifrelor numărului n. Apoi computerul face aceeaşi operaţie cu numărul nou obţinut şi aşa mai departe. Ştiind că pe ecranul computerului este scris numărul 2006 să se cerceteze dacă pe ecran poate apărea numărul 2007.

Alexandru Ciolan, Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VI-a

1. O mulţime de trei numere naturale nenule este *binecrescută* dacă un element al său este suma celorlalte două. Să se afle numărul submulţimilor *binecrescute* ale mulţimii $\{1, 2, ..., 2006\}$.

Florian Dumitrel, Slatina

2. Un unghi xOy cu măsura de $170°$ este împărţit de 17 semidrepte în 18 unghiuri cu interioarele disjuncte două câte două, având măsurile (în grade hexazecimale) exprimate prin numere naturale nenule.

a) Să se arate că cel puţin două dintre cele 18 unghiuri sunt congruente.

b) Să se arate că există cel puţin patru unghiuri care au măsura de cel mult $11°$.

Costel Anghel, Slatina

3. Pe o dreaptă se consideră, în ordine, punctele A_0, A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $\ldots$ astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2A_0A_1$, $A_2A_3 = 3A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n = nA_{n-2}A_{n-1}, \ldots$.Punctele interioare segmentelor A_0A_1, A_2A_3, $A_4A_5, \ldots$ se colorează cu roşu, iar punctele interioare segmentelor A_1A_2, A_3A_4, $A_5A_6, \ldots$ se colorează cu albastru. Dacă A este un punct situat pe dreapta dată, astfel încât $A_0A = 2006$, precizaţi dacă acesta este colorat cu roşu sau cu albastru.

Emil Ciolan, Slatina

4. Determinaţi cel mai mic număr natural care împărţit pe rând la $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ dă resturi diferite nenule.

Mircea Fianu, Bucureşti

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VII-a

1. Să se determine mulţimea $\{a_1, a_2, ..., a_{11}\} \subset \mathbb{N}^*$, ştiind că

$$a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 2047$$

şi $a_i \mid a_j$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., 11\}$, $i < j$.

Florian Dumitrel, Slatina

2. Fie $A \subset \mathbb{R}_+^*$ o mulţime cu cel puţin două elemente, cu proprietatea că dacă m şi n aparţin mulţimii A atunci $\frac{m}{n}$ şi mn aparţin lui A. Demonstraţi că mulţimea $(0,1) \cap A$ este infinită, unde $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

Alexandru Ciolan, Slatina

3. Fie triunghiul ABC cu proprietatea $BC = AB + AD$, unde D este piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{ABC}$. Să se demonstreze că:

i) $m\left(\widehat{BAC}\right) = 2m\left(\widehat{C}\right)$;

ii) $AD < CD < 2AD$.

Florian Dumitrel, Slatina

4. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ascuţitunghic ABC şi punctele $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât triunghiul MEF să fie isoscel cu $[ME] \equiv [MF]$. Perpendicularele în E şi F pe AC, respectiv AB, se intersectează în D. Arătaţi că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD}$.

Mircea Fianu, Bucureşti

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a VIII-a

1. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$t^2(xy+yz+zx)+2t(x+y+z)$$

pentru x, y, z, t numere reale de modul cel mult 1.

[$* * *$]

2. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, $a+b+c=1$, atunci

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq \frac{7}{9}.$$

Costel Anghel, Slatina

3. Pe un cerc de rază 1 se consideră 13 puncte. Să se demonstreze că există, printre ele, cel puţin trei care sunt vârfurile unui triunghi a cărui arie nu depăşeşte $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Florian Dumitrel, Slatina

4. Fie triunghiul echilateral ABC, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$, şi B', C' mijloacele segmentelor $[B_1C]$ şi $[BC_1]$. Notăm $\{G\} = BB_1 \cap CC_1$, $\{G'\} = BB' \cap CC'$, $\{N\} = BB_1 \cap CC'$ şi $\{M\} = BB' \cap CC_1$. Să se calculeze aria patrulaterului $GMG'N$ în funcţie de aria S a triunghiului ABC.

Eduard Buzdugan, Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
NICOLAE COCULESCU
Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a IX-a

1. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, să se arate că

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Costel Anghel, Slatina

2. Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ştiind că

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=\frac{(2n+1)\,(a_1+a_2+...+a_n)}{3},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Costel Anghel, Slatina

3. Fie triunghiul ABC şi A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, respectiv C pe cercul circumscris triunghiului ABC. Notăm cu G_a, G_b, respectiv G_c centrele de greutate ale triunghiurilor $A'BC$, $AB'C$, respectiv ABC'.

a) Să se arate că triunghiurile $G_aG_bG_c$ şi ABC sunt asemenea.

b) Să se arate că dreptele AG_a, BG_b, CG_c sunt concurente într-un punct P.

c) Să se arate că centrul de greutate G al triunghiului ABC, ortocentrul său H şi P sunt coliniare.

Marius Perianu, Slatina

4. Fie dat un dreptunghi de dimensiuni $2m$ şi $2n+1$, $m, n \geq 1$, partiţionat în pătrate unitate, numite *celule.* Să se determine valoarea maximă k astfel încât oricum am înlătura k celule, în regiunea rămasă să se poate înscrie un disc de diametru 1,1.

Dan Schwarz, Bucureşti

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
NICOLAE COCULESCU
Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a X-a

1. Fie numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \in [6, 7]$ $(n \geq 2)$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\log_{a_1}(13a_2 - 42) + \log_{a_2}(13a_3 - 42) + ... + \log_{a_n}(13a_1 - 42) \geq 2n.$$

Costel Anghel, Slatina

2. Vom spune că o mulţime $A \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea (P) dacă A are cel puţin două elemente şi pentru orice $a, b \in A$, $a > b$, avem $\dfrac{ab}{a-b} \in A$. Arătaţi că

a) Orice mulţime cu proprietatea (P) este finită;

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ există cel puţin o mulţime de cardinal n cu proprietatea (P).

Marius Ghergu, Slatina

3. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietăţile:

i) $f(x + f(y)) = f(x) + y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, oricare ar fi $x \in (0, 1)$.

Florian Dumitrel, Slatina

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$2006^{3x^2+x-m} + 2007^{x^3+3x^2-m} + x^3 + mx = 2007^{3x^2+x-m} + 2006^{x^3+3x^2-m} + x - m$$

să aibă o singură soluţie reală.

George Mihai, Slatina

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a XI-a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}}$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.

Florian Dumitrel, Slatina

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricilor de ordin n care se obţin din A prin schimbarea între ele a două elemente ale lui A situate pe aceeaşi linie sau pe aceeaşi coloană.

a) Câte elemente are mulţimea $\mathcal{M}$?

b) Arătaţi că

$$\sum_{X\in\mathcal{M}} \det X = n(n-1)(n-2)\det A.$$

Marius Ghergu, Slatina

3. Fie $r > 0$ un număr real fixat şi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{Tr} A > 2r$. Să se arate că $A^n \neq r^n I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Viorel Botea, Brăila

4. Fie numărul $a = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, în scriere zecimală. Pentru $n \geq 1$ definim μ_n ca fiind media aritmetică a primelor n cifre din scrierea lui a

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

a) Să se arate că pentru $a \in \mathbb{Q}$, şirul $(\mu_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

b) Să se construiască un exemplu a pentru care şirul $(\mu_n)_{n\geq 1}$ admite un subşir cu limita 0 şi un subşir cu limita 9 şi să se demonstreze că pentru orice $x \in [0, 9]$, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ conţine un subşir convergent la x.

Dan Schwarz, Bucureşti

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediţia a III-a, 1 decembrie 2006

Clasa a XII-a

1. Să se găsească primitivele funcţiei $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2(\cos x+\sin x)+2x(\cos x-\sin x)+1}{(x^2+\cos x)(x^2+\sin x)}.$$

Aurel Chiriţă, Slatina

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\operatorname{arctg} x$.

a) Să se arate că f este bijectivă.

b) Să se arate că f^{-1} este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$.

c) Fie $a_1\in(0,1)$ şi $a_{n+1}=f(a_n)$ pentru $n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

d) Pentru fiecare număr natural $n\geq 1$, notăm cu x_n unica soluţie a ecuaţiei

$$x+\operatorname{arctg} x=\frac{1}{n}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(nx_n)$.

e) Dacă $F\in\int f(x)\ dx$, să se arate că

$$\int f^{-1}(y)\,dy=yf^{-1}(y)-F\left(f^{-1}(y)\right)+\mathcal{C}.$$

Florian Dumitrel, Slatina

3. Notăm $G=\{f\mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ şi considerăm aplicaţia $u:G\to G$, $u(0)=0$ şi pentru oricare două funcţii $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care nu admit primitive, avem

$$u(f+g)=u(f)+u(g).$$

Demonstraţi că u este endomorfism al grupului $(G,+)$.

[∗∗∗]

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi F primitiva sa care se anulează în origine. Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0\in[-1,1]$ şi $a_{n+1}=F(a_n)$, pentru orice $n\geq 0$.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ.

1. Timp de lucru 3 ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.