CENTRUL DE EXCELENȚĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANȚĂ - FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a XII-a

1. Calculați produsul tuturor elementelor nenule din $\mathbb{Z}_n$.

***

2. Fie $f, g, p \in \mathbb{R}[X]$ polinoame neconstante cu proprietățile:
   1) $p(1+ix) = f(x) + i \cdot g(x)$
   2) Toate rădăcinile polinomului p sunt în intervalul $(1;+\infty)$

   Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, polinomul $a \cdot f + b \cdot g$ are toate rădăcinile reale.

Sorin Rădulescu, Ion Savu, Bucureşti

3. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}} ctg\, t^2\, dt$.

Silviu Boga, Iaşi

4. Fie $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi şirul de funcții

   $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x f(t) \cdot e^{nt} dt$, $n \geq 1$, $x \in [0;1]$.

   Să se demonstreze că, dacă pentru orice $x \in [0;1]$ şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci f este funcția nulă.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc, Sorin Rădulescu, Bucureşti

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

SOLUȚII

1.Calculați $\lim_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x+!}}^{\frac{1}{x}} ctgt^2dt$.

Rezolvare: Din teorema de medie rezultă că există $t_x \in \left(\frac{1}{x+1},\frac{1}{x}\right)$ astfel încât

$$\int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}} ctgt^2dt = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)ctgt_x^2 .$$

Deoarece $t_x \in \left(\frac{1}{x+1},\frac{1}{x}\right)$ rezultă că $ctg\frac{1}{x^2} < ctg\left(t_x^2\right) < ctg\frac{1}{(x+1)^2}$, deci

$$\frac{ctg\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x(x+1)} < \int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}} ctg^2tdt < \frac{ctg\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}{x(x+1)},$$ de unde $\lim_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}} ctg^2tdt = 1$.

2. Fie $f, g, p \in \mathbb{R}[X]$ polinoame neconstante cu proprietatile :

1) $p(1+ix) = f(x) + i\cdot g(x)$

2) Toate radacinile polinomului p sunt in intervalul $(1;+\infty)$

Aratati ca pentru orice $a,b \in \mathbb{R}^*$ polinomul $a\cdot f + b\cdot g$ are toate radacinile reale.

Rezolvare:

Putem considera fără a pierde din generalitate că polinomul p este monic. Deci $p = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ cu $a_k \in (1,\infty)(\forall)k \in \{1,2,...,n\}$.

Din conditia 1) rezulta ca $p(1-ix) = f(x) - ig(x)$.

Deci $f(x) = \frac{p(1+ix)+p(1-ix)}{2}$ si $g(x) = \frac{p(1+ix)-p(1-ix)}{2i}$.

Avem

$$af + bg = \frac{1}{2}\left[aP(1+ix) + ap(1-ix) - biP(1+ix) + biP(1-ix)\right] \text{sau}$$

$$af + bg = \frac{1}{2}\left[(a-bi)p(1+ix) + (a+bi)p(1-ix)\right] = \frac{a-bi}{2}\left[p(1+ix) + \frac{a+bi}{a-bi}p(1-ix)\right].$$

Sa notam cu $\lambda = \frac{a+bi}{a-bi}$ si sa observam ca $|\lambda| = 1$.

Polinomul $af + bg$ are toate radacinile reale daca si numai daca polinomul $p(1+ix) + \lambda p(1-ix)$ are toate radacinile reale.

Sa notam $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ si $p(1+iz) + \lambda p(1-iz) = 0$.

Avem $1 = |\lambda|^2 = \left|\frac{p(1+iz)}{p(1-iz)}\right|^2 = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{1+iz+a_k}{1-iz-a_k}\right|^2 = \prod_{k=1}^{n}\frac{(1-a_k-y)^2+x^2}{(1-a_k+y)^2+x^2}$ (1).

Sa observam ca $\frac{(1-a_k-y)^2+x^2}{(1-a_k+y)^2+x^2} < 1 \Leftrightarrow (1-a_k-y)^2 + x^2 < (1-a_k+y)^2 + x^2$

$\Leftrightarrow y(1-a_k) > 0 \Leftrightarrow y < 0$ (2).

Din (1) si (2) rezulta ca $y = 0$ adica $z \in \mathbb{R}$.

3. Fie $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ o functie continuă şi şirul de funcţii $f_n:[0;1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x f(t) \cdot e^{nt} dt$,

$n \geq 1, x \in [0;1]$.

Să se demonstreze că dacă pentru orice $x \in [0;1]$ şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este marginit atunci f este funcţie nulă.

Rezolvare:

Să presupunem prin absurd ca f este nenulă. Deci există un interval $[a,b] \subseteq [0,1]$ cu proprietăţile $|f(x)| > 0 (\forall) x \in [a,b]$ si $a < b$.

Putem presupune fară a pierde din generalitate ca $f(x) > 0 (\forall) x \in [a,b]$. Să notăm $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ si $M = \sup\limits_{x\in[0,a]} |f(x)|$.

Avem

$$f_n(b) = \int_0^b f(t)e^{nt}dt = \int_o^a f(t)e^{nt}dt + \int_a^b f(t)e^{nt}dt \geq m\int_a^b e^{nt}dt - M\int_0^a e^{nt}dt = m\frac{e^{nb}-e^{na}}{n} - M\frac{e^{na}-1}{n} =$$

$$= \frac{m \cdot e^{nb} - (m+M)e^{na} + M}{n} \geq \frac{e^{na}\left[m \cdot e^{n(b-a)} - (m+M)\right]}{n}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{na}\left[me^{n(b-a)} - (m+M)\right]}{n} = \infty$ rezulta ca şirul $\left(f_n(b)\right)_{n\geq 1}$ este nemărginit.

Contradicţie.

În concluzie $f = 0$.

4. Calculati produsul tuturor elementelor din Z_n.

Rezolvare: Daca n=p=prim, atunci, din teorema lui Wilson, rezulta ca produsul elementelor este $-\hat{1}$.

Daca $n=ab$, cu $a,b \geq 2$ si $a \neq b$, atunci produsul este $\hat{0}$.

Daca $n=p^2$, cu p=prim si $p>2$, atunci, deoarece $2<p^2$, $2p<p^2$, rezulta ca produsul este din nou $\hat{0}$.

Pentru $n=4$, se obtine produsul $\hat{2}$.