COLEGIUL NAȚIONAL „ȘTEFAN CEL MARE" SUCEAVA	**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA** - 2 iunie 2007 -	**CENTRUL DE EXCELENȚĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANȚĂ - FILIALA SUCEAVA –** Str. V. Alecsandri nr.3, 720001; Tel. 0230/551342; 0230/551343; e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a XI-a

1. Se consideră matricea

$$A=\begin{pmatrix} \cos t & \cos\left(t-\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos t & \cos\left(t-\frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(t-\frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos t \end{pmatrix}$$

Să se arate că, pentru orice $t\in\mathbb{R}$, rezultă că

$$A\cdot {}^{t}A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Cătălin Țigăeru, Suceava

2. Să considerăm matricea $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $2\cdot\left|a_{jj}\right|>\sum_{k=1}^{n}\left|a_{jk}\right|$ pentru orice $j\in\{1,2,\dots,n\}$, să se demonstreze că:

1) A este inversabilă;

2) În cazul $A\in M_n(\mathbb{R})$, are loc $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\cdot\det A>0$

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc, Sorin Rădulescu, București

3. Fie $\alpha,\ \beta\in(0;1)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)^{\alpha-1}}$.

Drăgan Marius, București

4. Fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ două funcții continue. Să se demonstreze că, dacă g este surjectivă și $\lim\limits_{x\to\infty}f(g(x))$ există și este finită, atunci f este funcție mărginită.

Ion Bursuc, Suceava

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

SOLUȚII

1. Dacă punem:

$a=\cos t;\ b=\cos\left(t-\frac{4\pi}{3}\right);\ c=\cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)$, atunci $a+b+c=0$ şi $ab+bc+ca=-\frac{3}{4}$, de unde $a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$. Se obține:

$$A\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2+c^2&ab+bc+ca&ab+bc+ca\\ab+bc+ca&a^2+b^2+c^2&ab+bc+ca\\ab+bc+ca&ab+bc+ca&a^2+b^2+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{3}{2}\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R}$$

2.1.) Dacă presupunem prin absurd că A nu e inversabilă atunci există $X\in M_{n,1}(\mathbb{C})$ nenul astfel încât $AX=0$.

Dacă $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ şi $\|x\|=\max\limits_{1\le j\le n}|x_j|>0$, să alegem $j\in\{1,2,.....,n\}$ cu proprietatea $\|x\|=|x_j|$.

Din $a_{j_1}x_1+...+a_{j_n}x_n=0$ rezultă $|a_{jj}|\cdot|x_j|\le|a_{j1}x_1+...+\widehat{a_{jj}x_j}+a_{jn}x_n|$.

Deci $2|a_{jj}|\cdot\|x\|\le\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{jk}|\right)\|x\|<2|a_{jj}|\cdot\|x\|$. Absurd deoarece $\|x\|>0$.

Rezultă A inversabilă.

2.) Vom defini funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(t)=\begin{vmatrix}a_{11}&ta_{12}&\cdots&ta_{1n}\\ta_{21}&a_{22}&\cdots&ta_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ta_{n1}&ta_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

Funcția *f* este continuă deoarece *f* este polinominală.

Observăm că $f(t)\neq0\,(\forall)\,t\in[0,1]$ conform punctului (1).

Deci $a_{11}\cdot a_{22}\cdot...\cdot a_{nn}\det A=f(0)f(1)>0$.

3. Aplicând teorema lui Stolz-Cesàro avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}}{n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha n^{1-\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-1\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

Limita noastră se mai scrie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{2^{\alpha}}+\dfrac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{\alpha}}}{n^{1-\alpha}}\right)^{\beta-1}}{\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{2^{\beta}}+\dfrac{1}{3^{\beta}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{\beta}}}{n^{1-\beta}}\right)^{\alpha-1}}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)^{\alpha-1}}=\frac{(1-\beta)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^{1-\beta}}.$$

4. Să presupunem prin absurd că f nu este mărginită. Rezultă că există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $\mathbb{R}_+$ cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\infty$. Deoarece funcția g este surjectivă rezultă că există un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ din $\mathbb{R}_+$ cu proprietatea că $g(a_n)=x_n$ $(\forall)$ $n\geq 1$. Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ ar fi mărginit atunci, deoarece g este continuă rezultă că şi şirul $(g(a_n))_{n\geq 1}$ este mărginit. Deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit ceea ce contrazice $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\infty$.

Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit. Să considerăm un subşir $(a_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $\lim_{n\to\infty}|f(g(x))|\in\mathbb{R}$. Rezultă $\lim_{n\to\infty}|f(g(a_{\varphi(n)}))|=\lim_{n\to\infty}|f(x_{\varphi(n)})|=\infty$ ceea ce contrazice $\lim_{n\to\infty}|f(g(x))|\in\mathbb{R}$.

În concluzie f este funcție mărginită.