COLEGIUL NAȚIONAL „ȘTEFAN CEL MARE" SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA
- 2 iunie 2007 -

CENTRUL DE EXCELENȚĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANȚĂ - FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a X-a

1. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o funcție surjectivă. Să se demonstreze că există $f_1, f_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ funcții nesurjective cu proprietatea că $f=f_1+f_2$

   Lavinia Savu, București

2. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+y+z=a \\ a^{x^2+y}+a^{y^2+z}+a^{z^2+x}=3\left(\sqrt[9]{a}\right)^{a^2+3a} \end{cases}$, unde $a\in(1;+\infty)$.

   Cristian Amorăriței, Dan Popescu, Suceava

3. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $\left|z_j\right|\le 1$, $(\forall)\, j\in\{1,2,...,n\}$.
   Să se demonstreze că $\left|1-z_1\cdot z_2\cdot ...\cdot z_n\right|\ge\left(1-\left|z_1\right|\right)\cdot\left(1-\left|z_2\right|\right)\cdot ...\cdot\left(1-\left|z_n\right|\right)$.

   Sorin Radulescu, Bucuresti, Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$.

   Să se demonstreze că $\left|z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2\right|+\left|z_1\cdot\overline{z_3}+\overline{z_1}\cdot z_3\right|+\left|z_2\cdot\overline{z_3}+\overline{z_2}\cdot z_3\right|\ge 2$.

   Sorin Radulescu, Bucuresti, Dan Popescu, Suceava

<u>**NOTĂ:**</u> Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

SOLUȚII

1. Considerăm mulțimile

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = \text{par}\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = \text{impar}\}$, care sunt, evident, nenule.

Definim funcțiile $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in B \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \in A \end{cases}.$$

Atunci $f = f_1 + f_2$ şi f_1, f_2 sunt nesurjective.

2. Din $a^{x^2+y} + a^{y^2+z} + a^{z^2+x} \geq 3\sqrt[3]{a^{a^2+y^2+z^2+a}}$

si deoarece

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq a^2 - 2(x^2+y^2+z^2)$$

se deduce că :

$$a^{x^2+y} + a^{y^2+z} + a^{z^2+x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^{a+\frac{a^2}{3}}} = \sqrt[9]{a^{a^2+3a}},$$

egalitatea fiind posibila doar pentru :

$$x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x.$$

Înlocuind în a doua relație din sistem, se obține :

$x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x = \dfrac{a^2+3a}{9}$, de unde $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

Folosind din nou $x + y + z = a$, obținem că:

$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx = \dfrac{a^2}{3}$, adică $x = y = z$, deci $x = y = z = \dfrac{a}{3}$.

3. Notăm $|z_j| = a_j, \ \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ şi obținem succesiv :

$|1 - z_1 z_2 ... z_n| \geq 1 - |z_1 z_2 ... z_n| = 1 - a_1 a_2 ... a_n$ şi este suficient să demonstrăm că : (1) $1 - a_1 a_2 ... a_n \geq (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)$

Demonstratia relatiei (1) se face prin inductie :

(a) pentru *n=1* se verifica prin egalitate;

(b) presupunem ca, dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in [0,1]$, atunci

$1 - a_1 a_2 ... a_n \geq (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)$ şi demonstrăm că, dacă

$a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} \in [0,1]$, atunci

$1 - a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} \geq (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1})$.

Folosim :

Dacă $x, y \in [0,1]$, atunci $1 - xy \geq (1-x)(1-y)$, care se demonstreaza astfel :

$x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2xy$, deci $1 - xy \geq 1 - x - y + xy \Leftrightarrow 1 - xy \geq (1-x)(1-y)$.

Deci

$$1 - (a_1 a_2 ... a_n) a_{n+1} + 1 \geq (1 - a_1 a_2 ... a_n)(1 - a_{n+1}) \geq (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)(1-a_{n+1})$$

4. Vom avea :

$|z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2| = |\overline{z_1}z_2(1 + z_1^2\overline{z_2}^2)| = |1 + z_1^2\overline{z_2}^2|$ si celelalte, astfel :

$|1+z_1^2\overline{z_2}^2| + |1+z_2^2\overline{z_3}^2| + |1+\overline{z_3}^2 z_1^2| = |z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2| + |z_1\overline{z_3} + \overline{z_1}z_3| + |z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3| =$

$= |1 + z_1^2\overline{z_2}^2| + |1 + z_2^2\overline{z_3}^2| + |1 + z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2| =$

$= |z_2^2\overline{z_3}^2 + z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2| + |1 + z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2| + |1 + z_2^2\overline{z_3}^2| \geq |1 - z_2^2\overline{z_3}^2| + |1 + z_2^2\overline{z_3}^2| \geq 2$

S-a mai folosit : $|1 + z_1^2\overline{z_2}^2| = |(z_2^2\overline{z_3}^2)(1 + z_1^2\overline{z_2}^2)| = |z_2^2\overline{z_3}^2 + z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2|$ şi

$|z_2^2\overline{z_3}^2 + z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2| + |1 + z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2| \geq |1 + \cancel{z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2} - z_2^2\overline{z_3}^2 - \cancel{z_1^2\overline{z_2}^2 z_2^2\overline{z_3}^2}| = |1 - z_2^2\overline{z_3}^2|$

Se mai foloseşte faptul că, dacă $|a| = 1$, atunci $|1 - a| + |1 + a| \geq 2$, unde $a \in \mathbb{C}$.

4. $a = z_1\overline{z_2}$, $b = z_2\overline{z_3}$, $c = z_3\overline{z_1}$ şi inegalitatea devine :

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ şi $abc = 1$, cu

$$|a + \frac{1}{a}| + |b + \frac{1}{b}| + |c + \frac{1}{c}| \geq 2$$, sau

$$|a^2 + 1| + |b^2 + 1| + |a^2 b^2 + 1| \geq 2.$$

Dar $|1 + a^2| + |1 + a^2 b^2| \geq |a^2 b^2 + 1 - a^2 - 1| = |a^2||b^2 - 1| = |1 - b^2|$,

deci $|1 + b^2| + |1 - b^2| \geq 2$.