COLEGIUL NAȚIONAL 'ŞTEFAN CEL MARE" SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ DIN MOLDOVA

- 2 iunie 2007 -

CENTRUL DE EXCELENȚĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANȚĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA a IX-a

1. Se consideră numerele $a_1, a_2, a_3 \in [0; +\infty)$ care satisface $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = \dfrac{3}{2}$.

   Să se arate că $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1 \leq 2$.

   Dumitru Crăciun, Fălticeni

2. Să se demonstreze că, pentru orice $y \in \mathbb{Z}$, ecuația $[x]+[2x]+[4x]+2 = y^6$ nu are soluții reale.

   Drăgan Marius, Bucureşti

3. Dacă un triunghi are pătratele lungimilor laturilor în progresie aritmetică, atunci simetricul centrului de greutate față de latura de lungime mijlocie se află pe cercul circumscris triunghiului.

   Gabriel Popa, Iaşi

4. Să considerăm trei vectori în plan $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{v_3}$. Să se demonstreze următoarea inegalitate:

$$\left|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right| + \left|\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3}\right| + \left|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}\right| \geq \min\left(\left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_3}\right\|,\ \left\|\overrightarrow{v_2}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v_3}\right\|\right)$$

   Sorin Rădulescu, Bucureşti. Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de trei ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

SOLUȚII

1. Din inegalitatea mediilor deducem: $a_1a_2 = 1 \cdot a_1 \cdot a_2 \le \frac{1+a_1^3+a_2^3}{3}$ şi relațiile analoage.

Prin însumare, obținem $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \le \frac{3+2\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)}{3} = 2.$

2. Daca $x<0$, atunci $[x]+[2x]+[4x]+2\le -1$,
Deci ecuația nu are solutii pentru $x\in(-\infty;0)$.
Presupunem ca $x\ge 0$ si fie $n\le x<n+1$,cu $n\in N$.Avem situațiile:

(a) $x\in[n, n+\frac{1}{4}) \Rightarrow [x]+[2x]+[4x]+2=7n+2$ (1);

(b) $x\in[n+\frac{1}{4}, n+\frac{1}{2}) \Rightarrow [x]+[2x]+[4x]+2=7n+3$ (2)

(c) $x\in[n+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{4}) \Rightarrow [x]+[2x]+[4x]+2=7n+5$ (3) şi

(d) $x\in[n+\frac{3}{4}, n+1) \Rightarrow [x]+[2x]+[4x]+2=7n+6$ (4).

Dar, prin inducție se demonstreaza că $7/y^6-1$, deci ecuația nu are soluții reale.

3. Notam cu a,b,c lungimile laturilor triunghiurilor,cu $c<a<b$, astfel încat $2a^2 = b^2 + c^2$. Din teorema lui Pitagora generalizată, rezultă că

(1) $\cos A = \frac{a^2}{2bc}$.

Din formula medianei, coroborată cu $2a^2 = b^2 + c^2$, rezultă că $m_b^2 = \frac{3c^2}{4}, m_c^2 = \frac{3b^2}{4}$, de unde,

aplicând teorema lui Pitagora generalizată în $\triangle$ BGC rezultă că

(2) $\cos G = -\frac{a^2}{2bc}$, adică patrulaterul ABG'C este inscriptibil, unde G' este simetricul lui G față de BC.

4. $\left|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right| + \left|\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3}\right| + \left|\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1}\right| \ge \left(|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos(\alpha+\beta)|\right)\cdot \min\left(\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|, \left\|\overrightarrow{v_1}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{v_3}\right\|, \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{v_3}\right\|\right)$ (1)
Pentru a demonstra inegalitatea din enunț va fi suficient să demonstrăm ținand seama de relația (1) că:
$|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos(\alpha+\beta)| \ge 1$. (2).
Relatia (2) este echivalentă cu $(|\cos\alpha|+|\cos\beta|)^2 \ge (1-|\cos(\alpha+\beta)|)^2$ (3)
Pentru a demonstra inegalitatea (3) va fi suficient să demonstram inegalitatea $\cos^2\alpha+\cos^2\beta \ge 1-2|\cos(\alpha+\beta)|+\cos^2(\alpha+\beta)$ (4)
Inegalitatea (4) este echivalentă cu inegalitatea:
$2|\cos(\alpha+\beta)| \ge 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)$ (5).
sau echivalent cu: $2|\cos(\alpha+\beta)| \ge \sin^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$ (6)

Deci $2|\cos(\alpha+\beta)|\geq 2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta$ sau $|\cos(\alpha+\beta)|\geq -\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$, ceea ce este evident.