COLEGIUL NAȚIONAL
"ŞTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ DIN MOLDOVA

- 2 iunie 2007 -

CENTRUL DE EXCELENŢĂ PENTRU TINERI CAPABILI DE PERFORMANŢĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA A VIII- A

1. a) Demonstrați că: $\dfrac{a}{a^2+bc} \le \dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{4c}$. $(\forall) a,b,c>0$;

   b) Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{x_1}}{x_1+\sqrt{x_2x_3}}+\dfrac{\sqrt{x_2}}{x_2+\sqrt{x_3x_4}}+\dfrac{\sqrt{x_3}}{x_3+\sqrt{x_4x_1}}+\dfrac{\sqrt{x_4}}{x_4+\sqrt{x_1x_2}} \le$

   $\le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_4}}\right)$, $(\forall) x_1,x_2,x_3,x_4>0$.

   Cristian Lazăr, Iaşi

2. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, numărul $x(x+1)(x^2+x+1)$ se divide cu 6.

   ***

3. Să se afle mulțimea valorilor expresiei $E=\left[\dfrac{2x}{1+x^2}\right]\cdot\left[\dfrac{2y}{1+y^2}\right]$ când $x, y \in \mathbb{R}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

   Neculai Moraru, Suceava

4. Vârfurile unui cub se colorează în roşu, galben sau albastru. Putem proceda aşa fel încât fiecare mulțime formată din patru vârfuri coplanare să conțină toate cele trei culori ?

   Gabriel Popa, Iaşi

Notă: Timpul efectiv de lucru 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

SOLUȚII

1.

a) Aducând la acelaşi numitor, inegalitatea se scrie :
$4abc \le a^2c+a^2b+bc^2+b^2c \Leftrightarrow c(a-b)^2+b(a-c)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru $a=b=c$.

b) Din inegalitatea de la punctul a) rezultă

$$\frac{\sqrt{x_1}}{x_1+\sqrt{x_2x_3}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}\right)$$ si celelalte trei relații analoage;

Adunând inegalitățile rezultă

$$\frac{\sqrt{x_1}}{x_1+\sqrt{x_2x_3}}+\frac{\sqrt{x_2}}{x_2+\sqrt{x_3x_4}}+\frac{\sqrt{x_3}}{x_3+\sqrt{x_4x_1}}+\frac{\sqrt{x_4}}{x_4+\sqrt{x_1x_2}} \le$$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+\frac{1}{\sqrt{x_4}}\frac{1}{\sqrt{x_4}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+\frac{1}{\sqrt{x_4}}\right)$$

Egalitate pentru $x_1=x_2=x_3=x_4$.

2. Observam ca $x(x+1) \vdots 2$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}$;

Daca $x=3k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(x+1) \vdots 6$;

Daca $x=3k-1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(x+1) \vdots 6$;

Daca $x=3k+1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2+x+1 = 9k^2+9k+3 \Rightarrow (x^2+x+1) \vdots 3$;

În concluzie , avem $x(x+1)(x^2+x+1) \vdots 6$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

3. Pentru $x \in [0,1) \cup (1,\infty) \Rightarrow \left[\frac{2x}{x^2+1}\right] = 0$;

Pentru x=1 $\Rightarrow \left[\frac{2x}{x^2+1}\right] = 1$;

Pentru $x \in (-\infty,0) \Rightarrow \left[\frac{2x}{x^2+1}\right] = -1$;

Deci multimea valorilor expresiei E este {-1,0,1} .

4. Pe baza inferioara o culoare trebuie să apară de măcar două ori; fie roşu această culoare.

Caz 1. Dacă o muchie a bazei inferioare are ambele capete roşii, vârfurile diametral opuse în cub trebuie colorate în galben şi albastru; în aceste condiții, pe fața din spate nu vom avea roşu.

Caz 2. Dacă o diagonală a bazei inferioare are ambele capete roşii, atunci diagonala bazei superioare paralelă cu aceasta va avea capetele colorate în galben şi albastru. În punctul marcat trebuie să avem galben (pentru planul diagonal) şi atunci fața ``dinspre noi`` nu va conține albastru.

In concluzie, nu putem gasi o colorare ca în enunț.