COLEGIUL
NAŢIONAL
“ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL
CENTRELOR
DE EXCELENŢĂ
DIN MOLDOVA
- 2 iunie 2007 -

CENTRUL DE EXCELENŢĂ
PENTRU TINERI CAPABILI
DE PERFORMANŢĂ
- FILIALA SUCEAVA –
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;
Tel. 0230/551342; 0230/551343;
e-mail: cn_stefan@yahoo.com

CLASA A VII- A

1. Fie n un număr natural, $n \geq 3$. Să se demonstreze că numărul $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1}$ se divide cu *7*, dacă şi numai dacă $2\overline{a_n a_{n-1} ... a_4 a_3} + 3a_2 + a_1$ se divide cu *7*.

   Mariana Liliana Popescu, Suceava

2. Se dau numerele a_k, $k = \overline{1, 2006}$, cu proprietatea că $a_k \in \{-1, 1\}$ şi fie numerele $s_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, 2004}$, definite prin $s_k = | a_k + a_{k+1} - a_{k+2} |$, $k = \overline{1, 2004}$.

   a) Să se determine minimul valorilor sumei $s = s_1 + s_2 + ... + s_{2004}$;

   b) Să se demonstreze că, oricum am alege numerele $a_k \in \{-1, 1\}$, s este număr par;

   c) Să se determine maximul valorilor sumei s.

   Angela Ţigăeru, Suceava

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi *P, N, S, T* mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$, $[PM]$ şi respectiv $[MN]$, unde M este un punct variabil pe latura $[BC]$. Arătaţi că:

   a) $STCB$ este trapez;
   b) Dacă $ST = 2cm$, calculaţi perimetrul triunghiului ABC şi aria lui $STCB$.
   c) Calculaţi perimetrul lui $STCB$ în cazul în care $STCB$ este trapez isoscel

   Vasile Solcanu, Bogdăneşti, Suceava

4. Se consideră pentagonul regulat $ABCDE$ şi fie $\{F\} = AC \cap BE$. Considerăm punctul oarecare $M \in [AE]$ şi fie N simetricul lui M faţă de AC, P simetricul lui N faţă de BE şi Q simetricul lui P faţă de EC.

   Să se demonstreze că $[QD] \equiv [MF]$.

   Cătălin Ţigăeru, Suceava

Notă: Timpul efectiv de lucru 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

SOLUȚII:

1. $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1} = 100 \cdot \overline{a_n a_{n-1} ... a_3} + 10 \cdot a_2 + a_1 = 49 \cdot 2\overline{a_n a_{n-1} ... a_3} + 2\overline{a_n a_{n-1} ... a_3} + 3a_2 + a_1 + 7a_2$

2. a) Se constată uşor că $s_k \in \{1,3\}$, deci $s \geq 2004$; deoarece pentru $a_1 = a_2 = ... = a_{2006} = 1$ obținem $s = 2004$, deducem că minimul valorilor lui s este 2004.

b) Vom nota cu a numărul de numere s_k care sunt egale cu 3 şi cu b numărul de numere s_k care sunt egale cu 1. Deducem că $s = 3a + b,\ a + b = 2004 \Rightarrow s$ este număr par.

c) Dacă există $k \in \{1, 2, ..., 2004\}$ pentru care $s_k = 3$, atunci $s_{k+1} = 1$. De aici deducem că numărul maxim de numere s_k care iau valoarea 3 este 1002, celelalte 1002 numere luând valoarea 1. Pentru $a_{4m+1} = a_{4m+2} = 1$ şi $a_{4m+3} = a_{4m} = -1$ obținem maximul *s=4008*.

3. a) $[ST]$ linie mijlocie în $\triangle MNP \Rightarrow ST \parallel NP$ (1)

$[NP]$ linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow BC \parallel NP$ (2)

Din relațiile (1), (2) şi din $BS \nparallel CT$ rezultă că $BSTC$ este trapez.

b) $ST = 2cm \Rightarrow BC = 8cm \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 24cm.$

Aria$[STCB] = 5\sqrt{3}cm^2$.

c) $BSTC$ este trapez isoscel $\Rightarrow BS = TC = 2\sqrt{3} \Rightarrow P_{BSTC} = 2\left(\sqrt{3} + 5\right)cm$

4. Punctul N este simetricul lui M față de $AC \Rightarrow [FN] = [FM]$ (1)

Punctul P este simetricul lui N față de $BE \Rightarrow [FN] = [FP]$ (2)

$ABCDF$ este pentagon convex $\Rightarrow CDEF$ romb $\Rightarrow$ F şi D sunt simetrice față de CE. Dar P şi Q fiind simetrice față de CE, rezultă că $[PF] \equiv [QD]$ (3)

Din relațiile (1), (2) şi (3) rezultă $[QD] \equiv [MF]$.