



COLEGIUL  
NAȚIONAL  
"ȘTEFAN CEL MARE"  
SUCEAVA

CONCURSUL  
**CENTRELOR  
DE EXCELENȚĂ**  
DIN MOLDOVA  
- 2 iunie 2007 -

CENTRUL DE EXCELENȚĂ  
PENTRU TINERI CAPABILI  
DE PERFORMANȚĂ  
- FILIALA SUCEAVA –  
Str. V. Alecsandri nr.3, 720001;  
Tel. 0230/551342; 0230/551343;  
e-mail: cn\_stefan@yahoo.com

### CLASA A V- A

1. Media aritmetică a numerelor  $x$  și  $y$  este  $5$ , media aritmetică a numerelor  $y$  și  $z$  este  $112$ , iar media aritmetică a numerelor  $z$  și  $x$  este  $116$ . Aflați numerele.

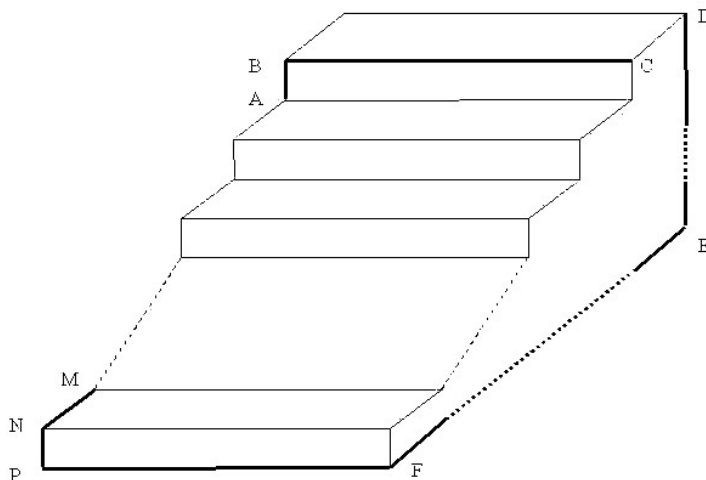
C-tin Apostol, Rm. Sărat

2. a) Arătați că  $81$  se poate scrie ca suma a patru pătrate perfecte nenule;  
b) Arătați că  $2007$  se poate scrie ca suma a patru pătrate perfecte;  
c) Arătați orice putere a lui  $2007$  se poate scrie ca suma a patru pătrate perfecte.

Florentina Pavăl, Fălticeni

3. Scara de la intrarea într-o clădire are, ca în figură, dimensiunile  $AB = 25\text{ cm}$ ,  
 $BC = FE = 10\text{ m}$ ,  $DE = 5\text{ m}$ . Aflați:

- a) Dimensiunile  $NP$ ,  $PF$  și  $NM$  ale primei trepte;  
b) Cât cântărește întreaga scară dacă prima treaptă cântărește  $2$  tone.



Silviu Boga, Iași

4. a) Să se arate că în scrierea în baza  $10$  a numărului  $2^{2007}$  există o cifră care se repetă de cel puțin  $61$  de ori.  
b) Demonstrați că afirmația rămâne adevărată pentru orice putere a lui  $2$  care se scrie cu măcar  $600$  de cifre.

Gabriel Popa, Iași

**Notă:** Timpul efectiv de lucru  $3$  ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la  $0$  la  $7$  puncte.

## SOLUȚII:

1. Adunând relațiile  $x + y = 10$ ,  $y + z = 224$ ,  $z + x = 232$ , obținem  $x + y + z = 233$ , de unde rezultă  $x = 9$ ;  $y = 1$ ;  $z = 223$ .

2. a)  $81 = 2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ ;

b)  $2007 = 3^2 + 7^2 + 10^2 + 43^2$ ;

c)  $2007^{2n} = 2007^{2n-2} \cdot 2007^2 = 2007^{2n-2} \cdot 9^2 \cdot 223^2 = (2007^{n-1} \cdot 223)^2 \cdot (2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$ ;

$2007^{2n+1} = 2007^{2n} \cdot 2007 = 2007^{2n} \cdot (3^2 + 7^2 + 10^2 + 43^2)$

3. a)  $NP = AB = 25\text{cm}$ ;  $PF = BC = 10\text{m}$ ;  $DE = 5\text{m} \Rightarrow$  scara are 20 de trepte.

$FE = 10\text{m} \Rightarrow NM = (10 : 20)m = 0,5\text{m}$ .

b) Dacă prima treaptă are 2 tone, rezultă că scara va cântări  $(1 + 2 + 3 + \dots + 20) \cdot 2 = 420$  tone.

4. a)  $2^{2007} > 2^{2000} = (2^{10})^{200} > (10^3)^{200} = 10^{600} \Rightarrow 2^{2007}$  se scrie cu cel puțin 601 cifre, de unde concluzia.

b) Dacă  $2^n$  are 600 de cifre și în scrierea sa apare fiecare cifră exact de 60 de ori, atunci suma cifrelor este  $60 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 60 \cdot 45 : 3$ , deci  $2^n : 3$ , absurd. Dacă  $2^n$  are mai mult de 600 de cifre, concluzia urmează din principiul cutiei