CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA

- 20 MAI 2006 -

CLASA A V- A

1. Găsiți numerele naturale prime *a, b, c* pentru care $2^{a^2} \cdot 8^b \cdot 64^c = 16^{15}$.

Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

2. a) Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $12^n + 10$ este divizibil cu 11;

   b) Dacă $A = \dfrac{12^n + 10}{11} + \dfrac{2^n \cdot 5^{n+1} + 13}{9} + \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$, arătați că $A \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Solcanu Vasile, Bogdănești

3. Considerăm toate fracțiile zecimale periodice simple de forma $\overline{0,(abcd)}$, cu *a, b, c, d* distincte, din mulțimea $\{1,2,3,4\}$.

   a) Câte fracții de această formă există?

   b) Care este media aritmetică a acestor fracții?

   c) Câte dintre ele se transformă în fracții ordinare care se simplifică cu 11?

Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

Notă: Timpul efectiv de lucru 2 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA

- 20 MAI 2006 -

CLASA A VI- A

1. Se dau numerele:

$$a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{119\cdot 120} \quad \text{şi} \quad b = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{120\cdot 121}.$$

a) Calculați $a+b$;

b) Arătați că $a > \frac{60}{121}$.

Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

2. Se defineşte mulțimea M după cum urmează:

I. $123 \in M$ şi $2006 \in M$;

II. Dacă $a, b \in M$ şi $a > b$, atunci $a - b \in M$.

Se cere:

a) să se determine încă trei elemente ale mulțimii M;

b) să se arate că $38 \in M$;

c) să se arate că $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2006\}$.

Prof. Boga Silviu, Suceava

3. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90^0$, $AB = 2\cdot AC$, se consideră punctele O şi E mijloace pentru $[AB]$, respectiv $[BC]$. Dacă $D \in (CO$, astfel încât $[AE] \equiv [ED]$, dovediți că:

a) $MO \perp BC$, unde $AC \cap BD = \{M\}$;

b) $[MO] \equiv [BC]$.

Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

Notă: Timp efectiv de lucru 2 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA

- 20 MAI 2006 -

CLASA A VII- A

1. Se dau numerele:

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{79}} \quad \text{şi}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{81}+\sqrt{80}}.$$

   a) Calculați $a+b$;
   b) Arătați că $a>4$;
   c) Determinați partea întreagă a lui *a*.

Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

2. Pe o dreaptă, pe care s-a stabilit o orientare „stânga-dreapta”, se aleg 11 puncte, nu neapărat distincte, $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$ care determină 10 segmente $[A_0A_1],[A_1A_2],...,[A_9A_{10}]$ de lungimi $l_1, l_2, l_3, ...,$ respectiv l_{10}, astfel încât $l_1 = l_2 - l_1 = l_3 - l_2 = ... = l_{10} - l_9 = 1$ cm.
   a) Determinați lungimile $l_1, l_2, l_3, ..., l_{10}$;
   b) Determinați lungimea maximă a segmentului $[A_0A_{10}]$;
   c) Determinați lungimea minimă a segmentului $[A_0A_{10}]$;
   d) Arătați că nu există o dispunere a punctelor $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$ astfel încât $[A_0A_{10}]$ să aibă lungimea de 10 cm.

Prof. Boga Silviu, Suceava

3. Dacă *a, b, c,* lungimile laturilor triunghiului *ABC* sunt direct proporționale cu numerele $\sqrt{2}+\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 2$ şi lungimea medianei din *B*, $m_b = 3(\sqrt{3}+1)$, determinați:
   a) perimetrul triunghiului *ABC*;
   b) măsura unghiului *B*.

Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

4. Se consideră triunghiul *ABC* cu $m(\sphericalangle A) = 80^0$ şi $m(\sphericalangle B) = 40^0$. Să se demonstreze că $BC^2 - AC^2 = AC \cdot AB$.

Prof. Țigăieru Angela, Suceava

Notă: Timp efectiv de lucru 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA

- 20 MAI 2006 -

CLASA A VIII- A

1. Determinați mulțimea tuturor punctelor cu coordonate numere naturale care aparțin segmentului (AB), unde $A(1,1)$ şi $B(101,41)$.

   Prof. Huluță Ecaterina, Suceava

2. Fie numerele reale a şi b astfel încât $0<a<b$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\geq\left(1+\sqrt{\frac{2}{b}}\right)^2.$$

   Prof. Popescu Mariana Liliana, Suceava

3. Se dau pătratul $ABCD$ şi dreptunghiul $CDMN$ situate în plane diferite astfel încât $ND\perp BC$.
   a) Să se arate că planele (ACM) şi (DBN) sunt perpendiculare;
   b) Demonstrați că punctele *A, B, C, D, M, N* sunt pe o sferă.

   Prof. Marchitan Claudia Georgeta, Suceava

4. Se consideră piramida patrulateră regulată *VABCD* cu vârful V, cu proprietatea că muchia laterală este egală cu latura bazei şi fie O centrul triunghiului echilateral *VAB.* Pe perpendiculara în O pe planul *(VAB)*, de aceeaşi parte a planului (*VAB*) ca şi punctul *C*, considerăm punctul *E* astfel încât tetraedrul *VABE* să fie tetraedru regulat. Să se demonstreze că: $(CED)\parallel(VAB)$ şi să se calculeze $m(\sphericalangle CED)$.

   Prof. Cătălin Țigăieru, Suceava

Notă: Timp efectiv de lucru 3 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.