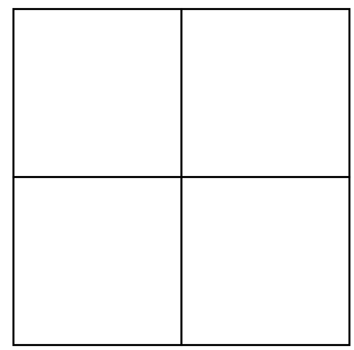
# CLASA a IV-a

1. Lungimea laturii unui pătrat este de 17 m. O persoană pleacă dintr-un vârf al pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, pargurge o distanță de 637 m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 773 m. Aflați la ce distanță se va situa în final persoana, față de punctul de plecare.
2. Avem mai multe vase identice. Ştim că 50 vase pline cu apă cântăresc 600 kg, iar 10 vase goale cântăresc cu un kilogram mai puțin decât apa dintr-un vas plin. Să se afle cât cântăresc 100 de vase goale?
3. În câte moduri diferite pot fi scrise numerele $1,2,3,4$ în pătratele din figura alăturată, câte unul în fiecare pătrat, astfel încât să nu existe două pătrate alăturate în care suma să fie 5? Justificați. (Pătratele care au doar un vârf comun nu sunt considerate alăturate, iar pătratul mare este fix).



Barem clasa a IV-a

1) Perimetrul este 68 m .......................................................................... 4p
$637 = 68 \cdot 9 + 25$ .......................................................................... 4p
$773 = 68 \cdot 11 + 25$ .......................................................................... 4p
Distanța este 0 m .......................................................................... 1p
<u>Oficiu 2p</u>
Total 15p

2) Un vas plin cântăreşte 12 kg ....................................................... 3p
11 vase goale cântăresc 11 kg ....................................................... 5p
100 vase goale cântăresc 100 kg ....................................................... 5p
<u>Oficiu 2p</u>
Total 15p

3) Scrie pe diagonale perechile $(1,4)$, $(2,3)$ ....................................... 5p
8 moduri diferite de scriere ....................................................... 8p
<u>Oficiu 2p</u>
Total 15p

## CLASA a V-a

4. Din produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 2006 se exclud toate numerele care se divid cu 5. În ce cifră se termină produsul celorlalte numere?
5. Pe o tablă sunt scrise numerele $1,3,4,6,8,9,11,12,16$. Doi copii au şters câte patru numere şi s-a observat că suma numerelor şterse de unul este de trei ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe tablă?
6. Fie numărul $123456789$. O operație înseamnă să alegem două cifre alăturate cărora să li se scadă o unitate şi să li se schimbe locurile (de exemplu: $123456789 \to 123436789 \to ...$). Care este cel maim mic număr ce se poate obține ca rezultat al acestor operații? După câte operații se obține cel mai mic număr?

Bareme clasa a V-a

1. Află u.c. $u.c.(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)=6$ ............................................ 4p

u.c. a produsului căutat este

$u.c.\left[(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)\cdot ...\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6)\right]$.

.......................................................................................... 4p

$u.c.(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6)=4$ .................................................................. 2p

$u.c.(6^n)=6,(\forall)n\in N^*$ ............................................................ 2p

u.c. a produsului căutat este 4 ................................................. 1p

<u>Oficiu 2p</u>

Total 15p

2. Fie $a,b,c,d$ numerele şterse de primul copil,

$x,y,z,t$ numerele şterse de al doilea copil şi r numărul rămas

$a+b+c+d=3\cdot(x+y+z+t)$ ...................................................... 2p

Calculează $1+3+4+6+8+9+11+12+16=70$ ............................ 1p

Scrie ecuația $4\cdot(x+y+z+t)+r=70$ ........................................ 4p

Obține $r=M_4+2$ .......................................................................... 5p

Finalizează, $r=6$ .......................................................................... 1p

<u>Oficiu 2p</u>

Total 15p

3. Scrie un şir de transformări ....................................................... 2p

Obține numărul $101010101$ ....................................................... 4p

Arată că numărul obținut este cel mai mic ................................ 3p
La o operație, suma tuturor cifrelor numărului
obținut scade cu 2 unități ........................................................ 2p
Numărul de operații de operații este
egal cu $\left[(1+2+3...+9)-5\right]:2$ .................................................. 2p

<u>Oficiu 2p</u>
Total 15p

## <u>CLASA a VI-a</u>

7. Se pot aşeza pe muchiile unui cub numerele $1,2,3,...,12$ (câte un număr pe fiecare muchie) astfel încât suma numerelor aflate pe cele trei muchii care pleacă din acelaşi vârf să fie aceeaşi pe fiecare muchie a cubului?
8. Se consideră triunghiul $ABC$ cu $[AB]\equiv[AC]$ şi $m(\measuredangle BAC)=20°$. Fie $M,P\in(AC)$ astfel încât şi $m(\measuredangle ABM)=m(\measuredangle CBP)=20°$ şi $N\in(AB)$ astfel încât $m(\measuredangle AMN)$.
9. Numerele naturale $22,23,24$ au următoarea proprietate: descompunerile în factori primi ale numerellor din şir au exponenții factorilor, respectiv numere impare $\left(22=2^1\cdot 11^1, 23=23^1, 24=2^3\cdot 3^1\right)$. Care este cel mai mare număr de numere naturale consecutive care au această proprietate?

Bareme la clasa a VI-a

1. Notează suma numerelor de trei muchii care pleacă din acelaşi vîrf cu n ......... 2p
Suma tuturor tripletelor este 8n .................................................................. 4p
Observă că $8n=2(1+2+...+12)$ ........................................................ 4p
Obține $n=\frac{39}{2}\notin N$ ........................................................................ 2p
Finalizare ........................................................................................................ 1p

<u>Oficiu 2p</u>
Total 15p

2. $BC\equiv BP$ .................................................................................. 2p
$BC\equiv BN$ .................................................................................. 2p
$\Delta BNP$ - echilateral ..................................................................... 2p
$BP\equiv MP$ .................................................................................. 2p
$m(\measuredangle MPN)=40^0$ ........................................................................ 2p
$m(\measuredangle PMN)=70^0$ ........................................................................ 2p
Finalizare ................................................................................ 1p

Oficiu 2p
Total 15p

3. Găseşte 7 numere consecutive care verifică condițiile problemei (Ex: $29,30,31,32,33,34,35$) .................................... 5p
Demonstrează că nu pot fi opt numere consecutive care să verifice condițiile problemei:
- Dintre opt numere consecutive unul are forma $8k$ ............................ 2p
- Dintre celelalte şapte unul are forma $8k+4$ sau $8k-4$ ....................... 2p
- $8k \pm 4 = 2^2 \cdot (2k \pm 1)$, $2k \pm 1$ - impar ................................................. 3p
Finalizare ........................................................................................... 1p

Oficiu 2p
Total 15p

## CLASA a VII-a

10. a) Arătați că din oricare 3 numere naturale, putem alege două, astfel încât suma lor să fie un număr par.
b) Fiind date şapte numere naturale, arătați că putem alege patru dintre ele astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 4.
11. Fie $\Delta ABC$ isoscel cu $BC = 2a, AB = AC = b, a, b \in N^*$. Să se determine toate triunghiurile $ABC$ dacă $a = 2r$, unde r este raza cercului înscris în $\Delta ABC$ şi apoi găsiți $\Delta ABC$ cu aria minimă.
12. Un trapez $ABCD$ are baza mare $[AB]$ şi $[AC] \cap [BD] = \{O\}$. Linia mijlocie a trapezului intersectează pe $AC$ în E şi pe $BD$ în F.
    a. Demonstrați că $ABCD$ este trapez isoscel dacă şi numai dacă $[OE] \equiv [OF]$.
    b. Vârfurile trapezului şi punctul O reprezintă 5 oraşe, iar laturile şi diagonalele sale sunt şosele de legătură. Două maşini pleacă din D, respectiv C pe ruta cea mai scurtă spre A, respectiv spre B şi alte două maşini pleacă din A respectiv B spre D, respectiv C, trecând prin O pe ruta cea mai scurtă. Cele 4 maşini au aceeaşi viteză, constantă, pe întreg parcursul. Demonstrați că primele 2 maşini ajung simultan în D, respectiv C. Pot ajunge, toate patru, în acelaşi timp la destinație?

Bareme clasa a VII-a

1) a) Avem cazurile $p,p,p$; $p,p,i$; $p,i,i$; $i,i,i$

(ordinea alegerii pentru paritate nu contează)............................ 4p

- fiecare caz primeşte câte 1p

b) – împărțim numerelor în 3 grupe: 2 cu 2 numere şi 1 cu 3 numere;

– din grupa cu 3 numere alege 2 cu suma pară .................................. 3p

– numărul „neales” îl foloseşte ca un pivot pentru următoarele 2 grupe şi repetă procedeul de la a .......................................................... 4p

– obține 3 sume pare şi arată că putem alege 2 din ele ca sumă divizibilă cu 4 .................................................................. 2p

<u>Oficiu 2p</u>

Total 15p

2) $r=\dfrac{S}{p}\Rightarrow r=\dfrac{a\cdot h_a}{a+b}$ ........................................................................ 2p

$\left.\begin{array}{l} a=2r\Rightarrow a+b=2h_a \\ h_a^2=b^2-a^2 \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=4(b-a)$ .......................................... 4p

$5a=3b$ ................................................................................. 2p

Deduce $a=3k$ şi $a=5k$, $k\in N^*$

Calculează $h_a=4k$ şi $S=12k^2$ .................................................... 3p

$S_{\min}=12$ .............................................................................. 2p

<u>Oficiu 2p</u>

Total 15p

3) a) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow \Delta OEF$ isoscel .................................... 3p

$(OE)\equiv(OF)\Rightarrow ABCD$ trapez isoscel ........................................... 3p

b) Traduce enunțul în forma: $ABCD$ trapez isoscel $\Leftrightarrow$

$AO+OD=BO+CO$ ..................................................................... 1p

Arată că E şi F sunt mijloacele diagonalelor $(AC)$, $(BD)$ ........... 1p

Exprimă $OE=\dfrac{AO-CO}{2}$ şi $OF=\dfrac{BO-DO}{2}$ .................................. 2p

Finalizare ........................................................................... 2p

Aplică inegalitatea triunghiulară ................................................ 1p

<u>Oficiu 2p</u>

Total 15p

## <u>CLASA a VIII-a</u>

13. Aflați perechile de numere întregi cu proprietatea că diferența cuburilor lor este egală cu pătratul diferenței lor.
14. Un poliedru are 17 muchii şi 9 fețe.
    a. Desenați două astfel de poliedre diferite.

b. Dacă fețele poliedrului sunt doar triunghiuri echilaterale sau pătrate, iar toate muchiile sunt de lungime 1 cm, calculați aria sa totală.

15. Un cub cu latura de n cm ($n \in N^*$) se împarte în cuburi cu latura de 1 cm şi se colorează toate cuburile situate pe diagonalele fețelor cubului inițial. Aflați n astfel ca numărul cuburilor colorate să fie 2006.

Bareme de corectare la clasa a VIII-a

1. $a^3 - b^3 = (a-b)^2$ .................................................................................. 1p

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)^2 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2-a+b) = 0$ ............. 2p

Dacă $a-b=0 \Rightarrow (a,b) \in (k,k), k \in Z$ ........................................ 1p

Dacă $a^2+ab+b^2-a+b=0 \Rightarrow 2a^2+2ab+2b^2-2a+2b+2=2 \Rightarrow$

$(a+b)^2+(a-1)^2+(b+1)^2=2$ ............................................................... 5p

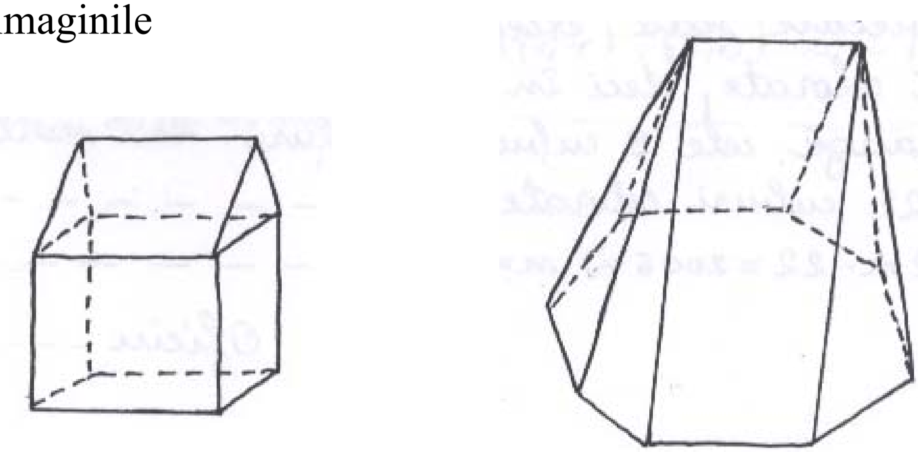
Observă că fiecare termen poate fi 0 sau 1 ........................................ 1p

Găseşte soluțiile: $(a,b) \in \{(0;0),(0;-1),(1;0),(1,-2),(2;-1),(2;-2)\}$ ........ 3p

Oficiu 2p

Total 15p

2. a) imaginile



b) Fie a numărul de fețe patrulatere şi b numărul de fețe triunghiulare; $a+b=9$ ................................................................ 1p

Fiecare față patrulateră contribuie cu 4 muchii,
iar fiecare față triunghiulară, cu 3 muchii .......................................... 1p

Fiecare muchie este astfel numărată de câte două ori ......................... 1p

$4a+3b=34$ ....................................................................................... 2p

Găseşte $a=7$ şi $b=2$ ...................................................................... 3p

Calculează $A_t = 7 \cdot 1^2 + 2 \cdot \dfrac{1^2\sqrt{3}}{4} = 7 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ................................................ 1p

Oficiu 2p

Total 15p

3. Distinge două cazuri: n par şi n impar ................................................ 1p

Cazul n – par

Numărăm cuburile colorate astfel:

Pe fiecare faţă, exceptând colţurile, sunt $2\cdot(n-2)$ cuburi colorate, deci în total $6\cdot2\cdot(n-2)$, la care se adaugă cele 8 cuburi din colţuri.

Deci sunt $12n-16$ cuburi colorate ................................................ 5p

$12n-16=2006\Rightarrow n\in\varnothing$ ................................................................ 1p

Cazul n – impar

Pe fiecare faţă, exceptând colţurile, sunt $2(n-2)-1$ cuburi colorate, deci în total $6\cdot\left[(n-2)\cdot2-1\right]$, la care se adaugă cele 8 cuburi din colţuri.

Deci sunt $12n-22=2006\Rightarrow n=169$ ................................................ 1p

<u>Oficiu 2p</u>

Total 15p