Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati , 03-05 noiembrie 2006

Clasa a VII – a
Solutii

Problema 1

a) Notam $m\left(\widehat{BAC}\right)=x$, $m\left(\widehat{ABC}\right)=y$ si $m\left(\widehat{BAD}\right)=z$. Din relatia $[AB]\equiv[BD]$ rezulta $m\left(\widehat{ADB}\right)=z$, iar din relatiile $DM\perp AC$ si M este mijlocul lui $[AC]$ obtinem $[AD]\equiv[DC]$ si, prin urmare, $y=x+z$. Unghiul $\sphericalangle ABC$ este unghi exterior pentru triunghiul ABD, de unde rezulta $y=2\cdot z$, iar din triunghiul ABC avem $2\cdot y+z=180^0$. Folosind relatiile $y=x+z$, $y=2\cdot z$ si $2\cdot y+z=180^0$ obtinem $x=z=36^0$ si $y=72^0$. Deci, $m(\sphericalangle AEC)=36^0$, $m(\sphericalangle ACE)=m(\sphericalangle CAE)=72^0$.

b) Este evident ca $A_{BMC}=A_{ABC}=10\ cm^2$. Din faptul ca $[BN]$ este mediana obtinem ca $A_{BMN}=\frac{1}{2}\cdot A_{BMC}=5\ cm^2$.

Problema 2

Consideram $\overline{ababab}$ un numar natural „prieten cu sase”. Este evident ca $a\geq b$. Daca a sau b sunt pare, atunci $2\,|\,a\cdot b$, iar daca a si b sunt impare, atunci $a-b$ si $a+b$ sunt pare si, prin urmare, $2\,|\,(a-b)\cdot(a+b)$. Deci, 2 divide produsul $a\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)$ pentru orice doua numere naturale a si b.

Daca a sau b sunt divizibile cu 3, atunci 3 divide produsul $a\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)$. Daca a si b nu se divid cu 3, atunci a si b sunt de forma $3\cdot k+1$ sau $3\cdot k+2$. Daca a si b sunt de aceeasi forma, atunci 3 divide $a-b$, iar daca a si b sunt de forme diferite, atunci 3 divide $a+b$. Prin urmare, 3 divide produsul $a\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)$ pentru orice doua numere naturale a si b. Cum 2 si 3 sunt prime între ele deducem ca 6 divide $a\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)$. Deci, singura conditie care trebuie impusa cifrelor a si b este $a\geq b$. Prin urmare, avem în total $2+3+4+...+10=54$ numere „prietene cu sase”.

Problema 3

Din definitia lui A rezulta ca $A=\{12,13,...,19,21,23,...98\}$ si $card\ A=72$. Daca $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}\in A$ si $a<a'$ sunt în relatia $\Re$, atunci $\overline{aa'}+\overline{bb'}=\overline{a'a}+\overline{b'b}\Leftrightarrow a+b=a'+b'$. Din ultima relatie rezulta ca $b'=b-(a'-a)$ si tinând cont de faptul ca b este cifra obtinem $b\in\{1+(a'-a);\ 2+(a'-a);\ldots;9\}$ si corespunzator $b'\in\{1;\ 2\ ;\ \ldots;9-(a'-a)\}$. Daca $\overline{aa'}$ este fixat, atunci el este în relatia $\Re$ cu $9-(a'-a)$

numere de tipul $\overline{bb'}$. Se observa ca pentru orice $\overline{aa'} \in A$, exista $9-|a'-a|$ numere de tipul $\overline{bb'}$ în relatia $\Re$ cu $\overline{aa'}$. De aici rezulta ca lui 12 îi corespund 8 numere, lui 13 îi corespund 7 numere s. a. m. d. Din tabelul de mai jos

$12 \to 8$ $13 \to 7$ $14 \to 6$ .... $19 \to 1$	$23 \to 8$ $24 \to 7$ .... $29 \to 2$	$34 \to 8$ $35 \to 7$ .... $39 \to 3$	$45 \to 8$ $46 \to 7$ .... $49 \to 4$	$56 \to 8$ $57 \to 7$ $58 \to 6$ $59 \to 5$	$67 \to 8$ $68 \to 7$ $69 \to 6$	$78 \to 8$ $79 \to 7$	$89 \to 1$

obtinem ca pentru aceste numere din A, numarul cazurilor favorabile este:

$$n=(1+2+...+8)+(2+3+...+8)+...+(7+8)+8=204.$$

Numarul cazurilor favorabile evenimentului din problema este $2\cdot n=2\cdot 204=408$, iar numarul cazurilor posibile este $72\cdot 72-72=72\cdot 71$. Deci, probabilitatea realizarii evenimentului este $p=\frac{408}{72\cdot 71}=\frac{17}{213}$.

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri"**

Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude"
Galati , 03-05 noiembrie 2006

Clasa a VIII – a

Solutii

Problema 1

Scadem primele doua ecuatii membru cu membru si obtinem:

$x^2 - y^2 = y - x \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = -(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

deoarece $x + y + 1 \rangle 0$

Scadem ultimele doua ecuatii membru cu membru si obtinem

$y^2 - z^2 = z - y \Leftrightarrow (y-z)(y+z) = -(y-z) \Leftrightarrow (y-z)(y+z+1) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$

deoarece $y + z + 1 \rangle 0$

Deci $x = y = z \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, x = 2$ deci solutia este $(0,0,0),(2,2,2)$.

Problema 2 a) $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$

b) $A = 2005^{2004} + 2^{2006} = (2005^{1002} + 2^{1003} - 2^{502} \cdot 2005^{501})(2005^{1002} + 2^{1003} + 2^{502} \cdot 2005^{501})$

i)Primul factor are $u.c. = u.c.(5 + 8 - 4 \cdot 5) = 3$ deci este diferit de 1, iar al doilea este evident diferit de $1 \Rightarrow A$ este numar compus(se scrie ca un produs de doi factori diferiti de 1).

v) $A = (M_3 + 1)^{2004} + (M_3 - 1)^{2006} = M_3 + 1 + M_3 + 1 = M_3 + 2 \Rightarrow A$ nu este patrat perfect (nu exista patrate perfecte de forma $M_3 + 2$).

Problema 3

În triunghiul ABC aplicam relatia lui Carnot (in orice triunghi ABC, M punct interior triunghiului si proiectiile lui M, A', B', C' pe laturile BC, AC, AB avem îndeplinita relatia:

$AC'^2 + BA'^2 + CB'^2 = BC'^2 + CA'^2 + AB'^2$ (eventual o demonstreaza)

Vom avea

$AC'^2 - BC'^2 + BA'^2 - CA'^2 + CB'^2 - AB'^2 = 0 \Leftrightarrow (AC' - BC')(AC' + BC') + (BA' - CA')(BA' + CA') + (CB' - AB')(CB' + AB') = 0$

$\Leftrightarrow (AC' - BC') \cdot AB + (BA' - CA') \cdot BC + (CB' - AB') \cdot AC = 0$ si cum

$AB = BC = AC \Rightarrow AC' - BC' + BA' - CA' + CB' - AB' = 0$ (am împartit cu latura triunghiului)

$\Leftrightarrow AC' + BA' + CB' = BC' + CA' + AB' = 3 + 4 + 5 = 12 \Rightarrow P_{\Delta ABC} = 24cm \Rightarrow l = 8cm \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}cm^2$

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati
Facultatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati, 03-05 noiembrie 2006

Clasa a IX-a
Solutii

Problema 1

Notam $\frac{MD}{MA}=\frac{NC}{NB}=k$.

"$\Rightarrow$" $AB\parallel CD$, avem $\frac{MP}{AB}=\frac{QN}{AB}=\frac{k}{k+1}$, rezulta ca $(MP)\equiv(QN)$.
"$\Leftarrow$" Presupunem ca $AB\nparallel CD$. Ducem $MU \parallel AB$ si $NV \parallel AB$, $U\in(BD)$, $V\in(AC)$. Obtinem ca mai sus $(MU)\equiv(NV)$, iar $\sphericalangle UMP \equiv \sphericalangle QNV$ (unghiuri alterne interne). Folosind si ipoteza deducem ca $\Delta MUP\equiv\Delta NVQ$, rezulta ca $\sphericalangle PUM \equiv \sphericalangle QVN$ (1),
Dar $\sphericalangle PUM \equiv \sphericalangle DBA$, (2) si $\sphericalangle QVN \equiv \sphericalangle BAE$ (3), $A\in(CE)$.
Din (1), (2) si (3) rezulta $\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle BAE$, contradictie, caci $\sphericalangle EAB>\sphericalangle ABD$ (un unghi exterior unui triunghi este mai mare decât un unghi al triunghiului neadiacent lui).

Problema 2

Aratam ca $\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\geq 2\sqrt{3}$, (1).
Din relatia $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, rezulta ca $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$.
Notam cu $S=a+b+c$.
Vom arata ca: (2), $\frac{9}{S}-S\geq 2\sqrt{3}\Leftrightarrow S^2+2\sqrt{3}S-9\leq 0\Leftrightarrow\left(S-\sqrt{3}\right)\cdot\left(S+3\sqrt{3}\right)\geq 0$.
Avem $1=a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2\Rightarrow S\leq\sqrt{3}$.
Deci inegalitatea (2) este adevarata.
În concluzie inegalitatea (1) este adevarata folosind (2).

Folosind ipoteza, obtinem egalitate când $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3

a) Din $x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$.

Urmeaza ca $x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-\left(x+y\right)^3=-3xy\left(x+y\right)=3xyz$.

b) Folosind punctul a) deducem ca $S\left(a,b,c\right)=\dfrac{3(a^2-b^2)\cdot(b^2-c^2)\cdot(c^2-a^2)}{3(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)}=(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$.

i) Daca $abc=1$, utilizând inegalitatea mediilor obtinem $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ac}$, iar prin înmultirea acestora membru cu membru se deduce ca $S(a,b,c)\geq 8$.

ii) Daca $ab+bc+ca=1$, folosind inegalitatea mediilor deducem

$$S(a,b,c)=(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\leq\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

iii) Avem $(a+b)\cdot(a+c)=a^2+1$ si analoagele; urmeaza ca relatia din enunt este echivalenta cu $\left(a^2+1\right)\cdot\left(b^2+1\right)\cdot\left(c^2+1\right)\geq\frac{64}{27}$(prin ridicare la patrat) sau $a^2b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2\geq\frac{37}{27}$.
(1)

Folosind inegalitatea mediilor deducem ca: $\frac{1}{3}\left(a^2b^2c^2+\frac{a^2}{9}\right)\geq\frac{2a^2bc}{9}$ si analoagele, iar prin înmultirea acestora membru cu membru deducem ca: $a^2b^2c^2+\frac{1}{27}\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\frac{2}{9}abc(a+b+c)$. (2)

Vom arata ca:

$\frac{2}{9}abc\left(a+b+c\right)+\frac{26}{27}\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\frac{37}{27}$. (3)

Cum $1=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right)$, urmeaza ca $2abc\cdot\left(a+b+c\right)=1-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.

Asa ca relatia (3) devine $\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\frac{26}{27}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\frac{37}{27}$.

Sau $\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\cdot\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\frac{26}{27}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\frac{37}{27}$. (4)

Însa $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)$ si $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

Asa ca inegalitatea (4) este adevarata, deci (3) este adevarata. Adunând membru cu membru inegalitatile (2) si (3) rezulta ca relatia (1) este adevarata.

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National "Vasile Alecsandri"**

Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr.41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
"Cristian S. Calude"
Galati, 03-05 noiembrie 2006

Clasa a X-a
Solutii

Problema 1

-se foloseste rezultatul: M mijlocul lui AB, N mijlocul lui CD in patrulaterul $ABCD$ avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}\,(1)$.

Se noteaza $\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=k\in\mathbb{R}$, . atunci $\overrightarrow{MA}=k\cdot\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}=k\cdot\overrightarrow{NC}$,

de unde $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{ND}=k\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}\right)\,(2)$.Fie P,Q,R mijloacele laturilor $[BC],[MN],[AD]$ atunci (1)

implica $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{ND}=2\overrightarrow{QR}\,(3)\\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{QP}\,(4)\end{matrix}\right\}\overset{(2),(3),(4)}{\Rightarrow}\overrightarrow{QR}=k\cdot\overrightarrow{QP}$ adica P,Q,R sunt coliniare.

Problema 2

a)Ecuatia este echivalenta : $\left(5^x+1\right)\cdot\left(2^{x+y}\cdot 3^y-2\cdot 3^{x+1}\right)=0\Leftrightarrow 2^{x+y-1}=3^{x-y+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x+y-1)\cdot\lg 2=(x-y+1)\cdot\lg 3.$

Daca presupunem $x+y-1\neq 0$ atunci $\log_3 2=\frac{x-y+1}{x+y-1}$, contradictie ($\log_3 2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)!

Deci $\left.\begin{matrix}x+y-1=0\\ x-y+1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=0\\ y=1\end{matrix}\Leftrightarrow M=\{(0,1)\}$, card. M=1.

b).Se demonstreaza ca $n\in\mathbb{N}: n\geq 6\Rightarrow\sqrt[3]{3^n}-\sqrt{2^n}\geq 1$.

Fie $n=6\cdot k+r, k\in\mathbb{N}^*, r\in\{0,1,2,3,4,5\}, \sqrt[3]{3^n}-\sqrt{2^n}=\sqrt[6]{9^n}-\sqrt[6]{8^n}=9^k\cdot\sqrt[6]{9^r}-8^k\cdot\sqrt[6]{8^r}=$

$=\left(9^k-8^k\right)\cdot\sqrt[6]{9^r}+8^k\cdot\left(\sqrt[6]{9^r}-\sqrt[6]{8^r}\right)\geq 1+0$ deoarece $k\geq 1$. Se arata ca $\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}<1$.

În concluzie, $\sqrt[3]{3^n}-\sqrt{2^n}\geq 1$ si $\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}<1$, de unde rezulta ca $\sqrt[n]{2}+\sqrt[3]{3^n}>\sqrt[n]{3}+\sqrt{2^n}$.
Multimea cautata este formata din toate numerele naturale mai mari sau egale decât 6.

Problema 3

Se noteaza cu $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ABC; $BM\cap\mathcal{C}=\{B_1\}$, $MC\cap\mathcal{C}=\{C_1\}$,
$MA'\perp BC,\ MC'\perp AB,\ MB'\perp AC,\ A'\in BC,\ B'\in AC,\ C'\in AB$.

Din patrulaterul inscriptibil $AB'MC'$ avem $B'C'=AM\cdot\frac{BC}{2\cdot R}$ (1), unde R este raza cercului $\mathcal{C}$.

Notam $r(M)=MC_1\cdot MC\rightarrow MC_1=\frac{r(M)}{MC}$. (2)

Din asemanarea: $\Delta BMC \sim \Delta C_1MB_1$ avem $B_1C_1 = BC \cdot \frac{MC_1}{MB}$ (3)

Din (2) si (3) rezulta $B_1C_1 = BC \cdot \frac{r(M)}{MB \cdot MC}$ (4).

Calculam $\frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{2 \cdot R \cdot r(M)}$ (4')

Notam $k = \frac{MB \cdot MC}{MA_1}$, atunci $k = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{MA \cdot MA_1} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{r(M)}$. Din (4') avem

$\frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{A'C'}{A_1C_1} = \frac{k}{2 \cdot R}$ (6).

Din (6) rezulta $\Delta A'B'C' \sim \Delta A_1B_1C_1$, deci $\frac{R'}{R} = \frac{k}{2 \cdot R} \Rightarrow 2 \cdot R' = k$.

k este minim daca si numai daca R' este minim (R' este raza cercului circumscris $\Delta A'B'C'$). Se arata ca R' este minim daca si numai daca M=1=punctual de intersectie al bisectoarelor ΔABC. Minimul lui k este $2r$, unde r = raza cercului înscris în ΔABC si are loc daca M=I.

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati, 03-05 noiembrie 2006

Clasa a XI-a
Solutii

Problema 1

Pentru j fixat determinam s astfel încât $\mathrm{E}(s,j)$ max (sau min) $\Rightarrow (\forall)$ i $\neq$ j, $\mathrm{E}(s\cdot t_{\mathrm{ij}},j)\le \mathrm{E}(s,j)$

(sau $\geq$) $\Leftrightarrow$ $(j(\mathrm{j})-j(\mathrm{i}))\cdot(s(\mathrm{j})-s(\mathrm{i}))\cdot\dfrac{\ln(s(\mathrm{j})+1)-\ln(s(\mathrm{i})+1)}{j(\mathrm{i})\cdot j(\mathrm{j})\cdot(s(\mathrm{j})-s(\mathrm{i}))}\le 0$ (sau ≥ 0)

$\Leftrightarrow (s(\mathrm{j})-s(\mathrm{i}))\cdot(j(\mathrm{j})-j(\mathrm{i}))\le 0 \Rightarrow s\cdot j^{-1}=a$ unde $a(k)=n+1-k \Rightarrow s=a\cdot j$

$\Rightarrow E(a\cdot j,j)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(n+2-j(k))}{j(k)}=E(a,e)$ unde e este permutarea identica $\Rightarrow$

max $\mathrm{E}(s,j)=\ln(n+1)\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n-1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{2}$

$(s(\mathrm{j})-s(\mathrm{i}))\cdot(j(\mathrm{j})-j(\mathrm{i}))\ge 0\ (\forall)i,j=\overline{1,n} \Rightarrow s=j \Rightarrow E(j,j)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(j(k)+1)}{j(k)}=E(e,e)$

$\Rightarrow$ min $E(s,j)=E(e,e)=\ln 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n+1}$. $E(e,e)\le E(s,j)\le E(a,e)\Rightarrow$ inegalitatea ceruta.

Problema 2

$\sin 3\cdot\dfrac{p}{18}=3\sin\dfrac{p}{18}-4\sin^2\dfrac{p}{18}\Rightarrow f\left(\sin\dfrac{p}{18}\right)=0$. f nu are radacini rationale $\Rightarrow$ f ireductibil in $\mathbb{Q}[x]$.

$g(\sin\dfrac{p}{18})=f(\sin\dfrac{p}{18})=0\Rightarrow (g,f)\neq 1$ si $(g,f)\in\mathbb{Q}[x]$, f ireductibil $\Rightarrow (g,f)=f\Rightarrow f/g$

Problema 3

i) $x<m\cdot a_n<y\Rightarrow\dfrac{x}{a_n}<m<\dfrac{y}{a_n}$. Daca $\dfrac{y}{a_n}-\dfrac{x}{a_n}>1\Rightarrow\exists m\in\mathbb{Z}$ în intervalul $\left(\dfrac{x}{a_n},\dfrac{y}{a_n}\right)$.Conditia revine la $a_n<y-$

Cum $a_n\to 0\Rightarrow\exists n_1\in\mathbb{N},\ n>n_1\Rightarrow a_n<e=y-x\Rightarrow$ pentru $n_1\in\mathbb{N}\ \exists m_1=\left[\dfrac{x}{a_{n_1}}\right]+1$ (sau $\left[\dfrac{y}{a_{n_1}}\right]$) astfel încât

$x<m_1\cdot a_{n_1}<y$

Fie $B=\left\{m\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^n / m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}\Rightarrow B\cap(x,y)\neq\Phi$. Dar $B\subset K\Rightarrow K\cap(x,y)=\Phi$

ii) Fie $x \in R \Rightarrow$ pentru $n \in \mathbb{N}$ $\left(x-\frac{1}{n}, x\right) \cap K=\{a_n\}$ si $\left(x, x+\frac{1}{n}\right) \cap K=\{b_n\}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow a_n<x<b_n \\ f \text{ crescatoare}\end{array}\right\} \Rightarrow f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n) \Rightarrow x-\frac{1}{n}<a_n<f(x)<b_n<x+\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x)-x|<\frac{1}{n},(\forall) n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f(x)=x,(\forall) x \in \mathbb{R}$

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati
Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr.41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude"
Galati , 03-05 noiembrie 2006

SOLUTII – CLASA A XII-A

PROBLEMA I

Din $|f(f(x))-f(f(y))| \geq |f(x)-f(y)| \geq |x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ rezulta $f \circ f$ injectiva si cum $f \circ f$ are Darboux $\Rightarrow f \circ f$ strict monotona. Cum $f \circ f$ are Darboux si $f \circ f$ strict monotona $\Rightarrow f \circ f$ continua. Folosind si relatia $|f(f(x))-f(f(y))| \geq |f(x)-f(y)|$ rezulta f continua. Deci f admite primitive.

PROBLEMA II

Se observa ca $0=1-1 \in M, -x=0-x \in M$ daca $x \in M$ si $x+y=y+(-x) \in M, \ \forall x, y \in M$.

a) Prin reducere la absurd, daca exista $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $M = a\mathbb{Z}$, pentru $\sqrt{2} \in M$ rezulta $\sqrt{2} = a \cdot n$ pentru un anumit $n \in \mathbb{Z}$ deci $a = \dfrac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Pentru $1 \in M \Rightarrow 1 = a \cdot m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \dfrac{1}{m} \in \mathbb{Q}$, contradictie.

b) Prin reducere la absurd, daca exista $e_0 \rangle 0$ astfel incât $M \cap (0, e_0) = \varnothing$, fie $a = \inf (M \cap (0, +\infty))$. Evident $a \geq e_0$. Se demonstreaza ca $M = a\mathbb{Z}$, contradictie cu a).
Se observa ca $a \in M$ (astfel din conditia de infimum rezulta ca exista $x, y \in M$ astfel încât $a \langle x \langle y \langle a + e_0$, deci $0 \langle y - x \langle e_0$ si $y - x \in M$, contradictie)
Daca $a \in M \Rightarrow a\mathbb{Z} \subseteq M$. Pentru $M \subseteq a\mathbb{Z}$ se procedeaza tot prin reducere la absurd.
Daca ar exista $x \in M - a\mathbb{Z}$ fie p=$\left[\dfrac{x}{a}\right]$. Atunci $x - a \cdot p \in M \cap (0, a)$ contradictie cu alegerea lui a.

PROBLEMA III

a) Radacinile multiple sunt radacinile comune ale polinoamelor $f, f' \in \mathbb{R}[x], f = x^n - qx^{n-1} + 1, f' = x^{n-2}[nx - (n-1)q]$. Cum $x=0$ nu este radacina a lui f,
rezulta ca ecuatia are radacina multipla $x_0 = \dfrac{(n-1)q}{n}$, daca si numai daca $f(x_0) = 0$.
Se demonstreaza ca $f(x_0) \leq 0$, cu egalitate daca si numai daca $n = q = 2$.
$f(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow n^n \leq q^n (n-1)^{n-1} \quad (1)$.
Daca $n = q = 2 \Rightarrow f(x_0) = 0$, deci $x_0 = 1$ radacina dubla.

Daca $n \geq 3, q^n (n-1)^{n-1} \geq 2^n (n-1)^{n-1} \rangle\; n^n$, deoarece ultima inegalitate este echivalenta cu

$\frac{2^n}{n-1} \rangle \left(\frac{n}{n-1}\right)^n, n \geq 3,$ adevarat deoarece $a_n = \frac{2^n}{n-1}$ este sir strict crescator cu

$\min a_n = 4$ pentru $n = 3$ iar $b_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ sir strict descrescator catre e cu $\max b_n = b_3 \langle 4$, deci *(1)* este stricta pentru $n \geq 3$.

b) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = x^n - q \cdot x^{n-1} + 1$. Presupunem $n \geq 3(n = 2$ este evident$)$. Derivata F' are radacinile $0, x_0$. Daca n este impar, semnul derivatei da trei solutii pentru ecuatia $F(x) = 0$, aflata în intervalele $(-q, 0), (0, x_0)$ si (x_0, q). Daca n este par, avem doua solutii în intervalele $(0, x_0)$ si (x_0, q). Deci b) este adevarata daca $z \in \mathbb{R}$.

Pentru orice radacina nereala $z = r(\cos q + i \sin q)$, unde $r = |z|$, scriem ca z satisface ecuatia si obtinem relatiile

$r^n \cos nq - q r^{n-1} \cos(n-1)q + 1 = 0$ (1) si $r^n \sin nq - q r^{n-1} \sin(n-1)q = 0$ (2).

Din *(2)* rezulta $q = \frac{r \sin nq}{\sin(n-1)q}$ $(\sin nq \neq 0, \sin(n-1)q \neq 0$ justificare!$)$.

Introducând în *(1)* rezulta

$r^n = \frac{\sin(n-1)q}{\sin q}$, si utilizând $|\sin kq| \leq k|\sin q|,\ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow r^n \leq n-1$, de unde $r \langle 2 \leq q$

(altfel, daca $r \geq 2$, ar rezulta $2^n \leq n-1$, pentru $n \geq 3$, fals).