Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati , 03-05 noiembrie 2006

Clasa a VII – a

Problema 1 a) Fie $B\in(CD)$ si A un punct nesituat pe CD astfel încât $[AB]\equiv[AC]\equiv[BD]$, M este mijlocul segmentului $[AC]$ si $DM\perp AC$. Daca E este simetricul lui D fata de punctul M, atunci sa se determine masurile unghiurilor triunghiului ACE.

b) Fie ABC un triunghi de arie $10\ cm^2$. Daca $AM \parallel BC$ si N este mijlocul segmentului $[CM]$, atunci sa se afle aria triunghiului BMN.

Marin Dolteanu, Galati

Problema 2

Un numar natural de sase cifre de forma $\overline{ababab}$ se numeste „prieten cu sase” daca si numai daca $\frac{a\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)}{6}\in\mathbb{N}$. Câte numere naturale de sase cifre sunt prietene cu sase?

Ioana si Gheorghe Craciun, Plopeni, Prahova

Problema 3

Fie A multimea numerelor naturale de doua cifre, care nu sunt multipli ai lui 10 sau ai lui 11. Spunem ca doua numere naturale sunt în relatia $\Re$ daca si numai daca suma lor este egala cu suma rasturnatelor lor. Aflati probabilitatea ca luând simultan doua numere din A, acestea sa fie în relatia $\Re$.

Gheorghe Padurariu, Galati

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acorda maximum 7 puncte.
Nu se acorda nici un punct din oficiu. Fiecare teza va fi evaluata cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati , 03-05 noiembrie 2006

Clasa a VIII – a

Problema 1 Sa se rezolve in R_+ sistemul $\begin{cases} x^2 = y + z \\ y^2 = z + x \\ z^2 = x + y \end{cases}$

Profesor Vasile Popa, Galati

Problema 2 a) Descompuneti in factori: $a^4 + 4b^4$

b) Stabiliti daca : i) numarul $A = 2005^{2004} + 2^{2006}$ este numar compus

v) numarul A este patrat perfect

Profesor Petre Batrânetu, Galati

Problema 3 Fie M un punct interior triunghiului echilateral ABC si A', B', C' proiectiile sale pe laturile $BC, AC,$ respectiv AB. Daca $AC' = 3cm$, $BA' = 4cm$ si $CB' = 5cm$ aflati aria triunghiului ABC.

Profesor Petre Batrânetu, Galati

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acorda maximum 7 puncte.
Nu se acorda nici un punct din oficiu. Fiecare teza va fi evaluata cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati
Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati , 03-05 noiembrie 2006

Clasa a IX-a

Problema 1

Fie $ABCD$ un patrulater convex, $M \in (AD)$ si $N \in (BC)$ cu $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ si $MN \cap BD = \{P\}$, $MN \cap AC = \{Q\}$. Sa se arate ca $[MP] \equiv [QN]$ daca si numai daca $AB \parallel CD$.

Vasile Popa, Galati

Problema 2

Determinati numerele reale pozitive a, b, c stiind ca îndeplinesc simultan conditiile:
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ si $\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{a^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \leq 2 \cdot \sqrt{3}$.

Petre Batrânetu, Galati

Problema 3

a) Aratati ca daca $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x + y + z = 0$, atunci $x^3 + y^3 + z^3 = 3 \cdot x \cdot y \cdot z$.

b) Fie $a, b, c > 0$, distincte doua câte doua. Notam cu

$$S(a,b,c) = \frac{\left(a^2 - b^2\right)^3 + \left(b^2 - c^2\right)^3 + \left(c^2 - a^2\right)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}.$$

i) daca $a \cdot b \cdot c = 1$, atunci $S(a, b, c) \geq 8$.

ii) daca $a + b + c = 1$, atunci $S(a, b, c) \leq \frac{8}{27}$.

iii) daca $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 1$, atunci $S(a, b, c) \geq \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9}$.

Zdravko Starc, Serbia

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acorda maximum 7 puncte.
Nu se acorda nici un punct din oficiu. Fiecare teza va fi evaluata cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati

Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National "Vasile Alecsandri"**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr.41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
"Cristian S. Calude"
Galati, 03-05 noiembrie 2006

Clasa a X-a

Problema 1 Fie patrulaterul *ABCD* în care punctele *M* si *N* sunt situate pe laturile [*AB*] si [*CD*] astfel încât perechile ordonate (*MA*,*MB*) si (*ND*,*NC*) sunt proportionale. Sa se demonstreze ca mijloacele segmentelor [*BC*],[*MN*] si [*AD*] sunt puncte coliniare.

Milu Cârmaciu, profesor, Galati

Problema 2 a). Fie multimea $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\,|\,10^x\cdot 6^y+2^{x+y}\cdot 3^y=6\cdot 15^x+2\cdot 3^{x+1}\right\}$.
Sa se determine numarul elementelor multimii *M*.

Emil Dumitrescu, profesor, Galati

b).Sa se determine multimea numerelor naturale $n\geq 6$, pentru care exista inegalitatea $\sqrt[n]{2}+\sqrt[3]{3^n}>\sqrt[n]{3}+\sqrt{2^n}$ este adevarata.

Razvan Satnoianu, Bucuresti

Problema 3 În interiorul triughiului *ABC* se considera un punct variabil *M*. Dreapta *AM* intersecteaza cercul circumscris triunghiului *ABC* în punctul A_1. Sa se determine pozitia punctului *M* pentru care raportul $\frac{MB\cdot MC}{MA_1}$ este minim si sa se calculeze valoarea acestui minim.

Prelucrare Constantin Ursu, Galati

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acorda maximum 7 puncte.
Nu se acorda nici un punct din oficiu. Fiecare teza va fi evaluata cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati
Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati, 03-05 noiembrie 2006

Clasa a XI-a

Problema 1

Pentru permutarile $s, j \in \mathrm{S}_n \left(n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right)$ consideram expresia $\mathrm{E}\left(s, j\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(s\left(k\right)+1\right)}{j\left(k\right)}$.

Sa se determine valoarea minima si maxima a expresiei $\mathrm{E}\left(s, j\right)$, dupa toate perechile $\left(s, j\right) \in \mathrm{S}_n \times \mathrm{S}_n$ si sa se arate ca: $\frac{2}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{3}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{n-1}} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}} < 1.$

Iuliana Duma, Galati

Problema 2

Fie $f, g \in \mathbb{Q}\left[X\right]$, $f = 8X^3 - 6X + 1$. Sa se arate ca, daca $g\left(\sin \frac{p}{18}\right) = 0$ atunci f divide g.

Iuliana Duma, Galati

Problema 3

Fie sirul $\left(\mathrm{a}_n\right)_{n \geq 0}$, $\mathrm{a}_n > 0$, $\mathrm{a}_n \to 0$ si multimile $\mathrm{A} = \left\{\mathrm{m} \cdot \mathrm{a}_n \ / \ \mathrm{m} \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathrm{K} = \left\{\mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} / \ \mathrm{a,b,c} \in \mathbb{Q}\right\}$

i) Sa se arate ca $\left(\forall\right) \mathrm{x,y} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{x<y} \Rightarrow \left(\mathrm{x,y}\right) \cap \mathrm{A} \neq \Phi$ si $\left(\mathrm{x,y}\right) \cap \mathrm{K} \neq \Phi$.

ii) Sa se determine $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monotona si $\mathrm{f}\left(x\right) = x$, $\left(\forall\right) x \in \mathrm{K}$.

Iuliana Duma, Galati

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acorda maximum 7 puncte.
Nu se acorda nici un punct din oficiu. Fiecare teza va fi evaluata cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Scolar al Judetului Galati
Societatea de Stiinte Matematice din România **Colegiul National „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
„Cristian S. Calude”
Galati , 03-05 noiembrie 2006

Clasa a XII-a

SUBIECTUL I.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o functie cu urmatoarele proprietati:

a) Functia $f\circ f$ admite primitive;

b) $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

Demonstrati ca functia f admite primitive.

CRISTINEL MORTICI

SUBIECTUL II.

Fie M o submultime a lui $\mathbb{R}$ cu proprietatile:

(i) $\{1,\sqrt{2}\}\subset M$;

(ii) $x,y\in M\Rightarrow x-y\in M$.

Sa se arate ca:

a) $(\forall)a\in\mathbb{R},\ M\neq a\cdot\mathbb{Z}$;

b) $(\forall)\ e\ \rangle\ 0,\ (\exists)x\in M\cap(0,e)$.

MARIAN ALEXANDRU BARONI

SUBIECTUL III.

Sa se arate ca ecuatia algebrica :

$$x^n-qx^{n-1}+1=0,$$

(unde $n\geq 2$ este natural si $q\geq 2$ este real)

a) are radacini multiple daca si numai daca $n=q=2$, si

b) ca orice radacina z a ecuatiei are $|z|\ \langle\ q$.

CRISTIAN S. CALUDE, ION CHITESCU

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acorda maximum 7 puncte.
Nu se acorda nici un punct din oficiu. Fiecare teza va fi evaluata cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore