Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Filiala Galaţi**

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri” **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
Galaţi , 26 noiembrie 2005

Clasa a V-a

Subiectul I

Sa se determine un numar de 3 cifre, stiind ca produsul lui cu 7 se termina cu 164.

Prof. MARIANA ANTON,Sc Generala Nr 11

Subiectul II

a) Sa se determine numarul numerelor cu 4 cifre care au cifra miilor si cifra unitatilor 1.

b) Sa se determine numarul numerelor cu 5 cifre care indeplinesc conditiile : cifra zecilor de mii si cifra unitatilor sunt 1, iar cifra miilor, sutelor si respectiv zecilor sunt distincte intre ele.

***

Subiectul III

a) De-a lungul unui gard sunt 12 pomi fructiferi. Numarul fructelor din oricare 2 pomi vecini difera cu 1. Se culeg toate fructele din toti pomii. Numarul total al fructelor poate fi 4217? Justificati raspunsul.

b) Sa se determine toate numerele naturale nenule n pentru care 1!+2!+3!+…+n! este patrat perfect.(se defineste n!=1•2•3…•n,unde n este numar natural nenul)

***

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Cristian S. Calude”
Galaţi , 26 noiembrie 2005

Clasa a VI - a

Problema 1

Fie $S = 1007 + 1008 + ... + 2005 - 8 - 9 - .... - 1006$

a) Câte numere naturale sunt în acest şir finit de adunări şi scăderi?
b) Arătaţi că S este pătrat perfect.
c) Este numărul natural S divizibil cu 1369?

Gheorghe Huţanu, Galaţi (problema G:877 din RMG nr.25/2005)

Problema 2

I. Să se afle cardinalul mulţimii $A = \left\{ (x, y) \in N \times N \,\middle|\, \frac{2005!}{7^y \cdot 11^x} \in N \right\}$.

Romeo Zamfir, Galaţi

II. Se ordonează crescător numerele naturale scrise în baza 10 numai cu cifrele 0,1,2,3 şi 4.
a) Câţi dintre primii 1000 de termeni ai şirului au ultima cifră egală cu 2.
b) Precizaţi care este al 2005-lea termen al şirului.
c) Să se scrie numărul natural $2202021_{(3)}$ în baza 5, unde indicele reprezintă baza de numeraţie.

Mariana Coadă, Galaţi

Problema 3

I. Fie $n \in N$, $n \geq 2$. Să se determine numerele naturale impare nenule $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ştiind că:
$a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 + 2$ şi $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Rodica şi Dumitru Bălan, Galaţi

II. Un număr de şase cifre de forma $\overline{abcdef}$ se numeşte *interesant* dacă $a \cdot f + b \cdot e + c \cdot d = 66$. Să se arate că suma tuturor numerelor interesante de şase cifre se divide cu 13.

Ioana şi Gheorghe Crăciun, Plopeni, Prahova (problema CG:008 din RMG nr.25/2005)

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Şcolar al Județului Galați

Societatea de Ştiințe Matematice din România **Colegiul Național „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galați **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

Concursul Interjudețean de Matematică
„Cristian S. Calude”
Galați , 26 noiembrie 2005

Clasa a VII-a

1. Fie patratul ABCD si E mijlocul laturii [AB]. Dreapta DE interseacteaza perpendiculara in A pe [AC] in punctul F. Sa se arate ca punctele C,B,F sunt coliniare.

Profesor Ionel Patriche

2. In interiorul triunghiului ABC se considera punctele M si N astfel incat $A\hat{B}M \equiv M\hat{B}N \equiv N\hat{B}C$ si $A\hat{C}M \equiv M\hat{C}N \equiv N\hat{C}B$. Stiind ca $B\hat{A}C \equiv C\hat{M}N$, aflati masura $B\hat{A}C$.

Profesor Petre Batrânetu

3. a) Aratati ca $(\forall)$ $k \in \mathrm{N}^*$ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b) Scrieti fractia $\frac{1}{2005}$ ca o suma de 2005 unitati fractionare diferite.

c) Determinati 2005 fractii mai mici ca fractia $\frac{1}{2005}$ si mai mari decat fractia $\frac{1}{2006}$, astfel incat toate fractiile sa aiba acelasi numarator si numitorii numere naturale consecutive. Cate din fractiile gasite sunt reductibile?

Profesor Petre Batrânetu

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Cristian S. Calude”
Galaţi , 26 noiembrie 2005

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Să se determine mulţimea:

$$A = \{(x,y) \in Z \times Q \,/\, \sqrt{4x+2005} + \sqrt{x+502} = y\}$$

Prof. Totolici Mihai, CNVA Galaţi

Subiectul 2

Tăiem o piramidă triunghiulară SABC priuntr-un plan paralel cu baza ABC. Fie D, E, F punctele de intersecţie ale acestui plan cu muchiile SA, SB, SC. Dacă planul secant se deplasează paralel cu el însuşi, să se afle locul geometric descris de punctul de intersecţie al planelor AEF, BFD, CDE.

****

Subiectul 3

Se dă un segment [AB] în plan. Spunem că un punct C din plan este „acceptabil pentru segmentul [AB]” dacă pentru orice punct D de pe segmentul (AC) avem: CB < DB.

Se cere să se găsească toate punctele C din plan care sunt acceptabile pentru segmentul [AB] şi pentru care AC + CB este maximă.

Prof. Univ. Dr. Cristian S. Calude, Universitatea Auckland, Noua Zeelandă

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Cristian S. Calude”
Galaţi , 26 noiembrie 2005

Clasa a IX-a

Subiectul I:
a)Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei:

„a,b numere reale, $|a|<1$ şi $|b|<1 \quad \Rightarrow \left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$ ”

prof. Dumbravă Vasile, Liceul „Emil Racoviţă”,Galaţi

b)Să se determine numerele reale a pentru care:

$x^2+(a+1)x+2\geq 0$, pentru orice x număr întreg.

prelucrare prof. Constantin Ursu, Galaţi

Subiectul II:
Să se determine punctele P din interiorul triunghiului ascuţitunghic ABC pentru care:

$$a\left|\overrightarrow{PA}\right|+b\left|\overrightarrow{PB}\right|+c\left|\overrightarrow{PC}\right|=4S$$

unde a,b,c sunt lungimile laturilor, iar S este aria triunghiului ABC.

prof. Constantin Ursu, Galaţi

Subiectul III:
a) Se consideră mulţimea $M=\{(i,k)/\ i<k,\ i,k\in\{1,2,3,\ldots\ldots,n\}, n\in N,\ n\geq 2\}$ cu proprietatea:
dacă $(i,k)\in M$, atunci $(k,m)\notin M$, pentru orice $m\in\{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$.

Care este numărul maxim de elemente din mulţimea M? Justificare.

b) Pe o dreaptă sunt marcate 2005 puncte diferite. Fiecare punct este colorat cu o singură culoare dintre patru culori date.

Să se demonstreze că există un segment (inchis) care conţine câte un punct de două culori diferite şi cel puţin un punct colorat cu o culoare din celelalte două culori rămase.

prelucrare prof. Constantin Ursu, Galaţi

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Cristian S. Calude”
Galaţi , 26 noiembrie 2005

Clasa a X-a

Subiectul nr. 1
Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater convex cu vârfurile A_1, A_2, A_3, A_4, de afixe z_1, z_2, z_3 respectiv z_4, astfel incat

a) $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=r$
b) $|z_1-z_2|=2r$
c) $\min\limits_{a\in R}|az_1+(1-a)z_2-z_3|=\frac{1}{2r}|z_4-z_1|\cdot|z_4-z_2|$
Sa se arate ca $A_1A_2A_3A_4$ este trapez isoscel.

Bălan Dumitru si Rodica Dumitru,
profesori, Galaţi

Subiectul nr. 2
Sa se afle $k\in Z$ daca este adevărata egalitatea:
$[2kx]=[2kx-x+\frac{1}{2}]$, $\forall$ $x\in[0,1)$.

Vasile Popa,
profesor, Galaţi

Subiectul nr. 3
Fie ABCD un patrulater inscriptibil, $I\in AC\cap BD$, $AD \nparallel BC$, E= $pr_{AD}I$, F= $pr_{BC}I$, $M\in(AB)$, $N\in(CD)$ cu $\frac{AM}{MB}=\frac{DN}{NC}=k$, $MN\cap EF=\{O\}$, unde k>0.
a) Sa se determine k astfel încât $MN\perp EF$.
b) Pentru valoarea lui k, aflata la a), sa se arate ca $\frac{AE}{ED}=\frac{MO}{ON}=\frac{BF}{FC}$ si ca O este mijlocul segmentului (EF)

Vasile Popa,
profesor, Galaţi

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Şcolar al Județului Galați
Societatea de Ştiințe Matematice din România **Colegiul Național „Vasile Alecsandri"**
Filiala Galați **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

Concursul Interjudețean de Matematică
„Cristian S. Calude"
Galați , 26 noiembrie 2005

Clasa a XI - a

Subiectul nr. 1
Fie $A, B \in M_n(R)$. Să se demonstreze că:

a). Dacă $AB=BA$, atunci : $\det(A^2+B^2) \geq 0$.
b). Dacă $A^2=I_n$, unde $n \in 2N+1$, atunci : $\det(A+I_n) \geq \det(A-I_n)$.
c). Dacă $AB=O_n$, atunci : $\det(I_n + A + B + A^2 + B^2) \geq 0$.

SILVIU STŐSSEL

Subiectul nr.2
Să se demonstreze că dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n \in N}$ satisface condițiile:
$a_{n+1}^2 < a_n^2$ şi $a_{n+1}^3 + a_n^3 < 1 < a_{n+1} + a_n$, $(\forall)\, n \in N$, atunci şirul este convergent.

D.M.BĂTINEȚU

Subiectul nr.3
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale monoton crescător, astfel încât $a_n \geq 1$ $(\forall) n \geq 1$, iar $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale, definite prin

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1 + [k\, a_k]}{k} \right], \quad y_n = \sum_{k=1}^{n} [a_k],$$

unde $[\cdot]$ reprezintă funcția parte întreagă. Dacă $(z_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2a_n + 1)}{z_n} = 0,$$

să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{z_n}$.

DAN SECLĂMAN

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore

Inspectoratul Scolar al Judetelui Galati
Societatea de Stiinte Matematice din Romania **Colegiul National “Vasile Alecsandri”**
Filiala Galati **str. Nicolae Balcescu, nr. 41, Galati**

Concursul Interjudetean de Matematica
“Cristian S. Calude”
Galati, 26 noiembrie 2005

Clasa a XII-a

Subiectul I.

Se da functia $f : I \to R$, $f(x)=\arcsin x + 3\arccos x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, $(\forall)x \in I = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
Fie $(F_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii, $F_n: I \to R$, F_n, functie derivabila, pentru orice $n \in N^*$,
$F_1'(x)=f(x)$, $F_{n+1}'(x)=F_n(x)$, $\forall x \in I$ si $\forall n \in N^*$. Daca $F_1\left(\frac{2}{3\Pi}\right)=1$ si $F_n\left(\sqrt[n]{\frac{2n!}{3\Pi}}\right)=1; \forall n \geq 2$, sa se determine $\lim\limits_{n->\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} F_k(x)$.

Emil Dumitrescu,
profesor, Galati

Subiectul II

Fie M, o multime nevida si o lege de compozitie “$\bullet$” , $M \times M \to M$, $(x,y) \to xy$ asociativa, cu proprietatea ca exista $n \in N^*, n \geq 2$, astfel incat $(xy)^n = yx$, $(\forall)x,y, \in M$.

1)Sa se arate ca $xy=yx$, $(\forall)$ $x,y \in M$.
2)Daca in plus legea “$\bullet$” are element neutru si orice element din M este simetrizabil(inversabil), atunci functia $f: M \to M$, $f(x)=x^p$, $(\forall)x \in M$ unde $p \in N^*$, $(n-1,p)=1$, este o functie surjectiva.

Prof. Marin Dolteanu

Subiectul III

Fie $a,b \in R$, $a<b$, $I=(a,b)$ si functiile continue $f,g,h: I \to I$, h bijectiva cu proprietatea $f_{\left(g_{(x)}\right)} = h_{(x)}, (\forall)x \in I$.

1)Sa se arate ca functiile f si g sunt bijective.
2)Aratati ca daca $I=[a,b)$, sau $I=(a,b]$, sau $I=[a,b]$ rezultatul de mai sus nu se mai pastreaza.

Profesor Vasile Popa

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore