Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Cristian S. Calude”

Galaţi , 26 noiembrie 2005

Solutii

Clasa a V-a

Problema I

Problema revine la a gasi cifrele a, b, c ,d astfel incat $\overline{abc}$ * 7 = $\overline{d164}$

7 * c = $\overline{e4}$ => c = 2

$\overline{ab2}$ * 7 = $\overline{d164}$

7 * b + 1 se termina in 6 , adica 7 * b se termina in 5 => b = 5

$\overline{a52}$ * 7 = $\overline{d164}$

7 * a + 3 se termina in 1 (3 este numarul pe care l-am retinut in minte de la 7 * 5 = 35)

Deci 7 * a se termina in 8 => a = 4

Numarul cerut este 452

Problema II

a) Numarul are forma $\overline{1ab1}$ a, b – cifre

a – ia valori de la 0 la 9

b – ia valori de la 0 la 9

Sunt 10 * 10 = 100 de numere

b) Numarul are forma $\overline{1abc1}$ a, b, c - cifre

a $\neq$ b $\neq$ c

a – ia 10 valori

b – ia 9 valori

c – ia 8 valori

Sunt 10 * 9* 8 = 720 de numere

Problema III

a) Numarul fructeleor din doi pomi vecini difera prin 1. Din doi pomi vecini se pot culege doar un numar impar de fructe. Atunci, numarul total de fructe din cei 12 pomi este egal cu suma a sase numere impare, deci numarul este par.

Rezulta ca nu se pot culege 4217 fructe.

b) 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + ….+n!

n = 1 1! = 1 => n = 1 solutie

n = 2 1! + 2! = 3

n = 3 1! + 2! + 3! =9 => n = 3 solutie

n = 4 $\quad$ 1! + 2! +3! + 4! =33

n $\geq$ 5 $\quad$ U(5! + 6! + … + n!) = 0

n $\geq$ 4 $\quad$ U(1! + 2! + …+ n!) = 3 => nu exista patrate perfecte

Clasa a VI-a

Problema 1

a) De la 1007 la 2005 sunt 2005 – 1006 = 999, iar de la 8 la 1006 sunt 1006 – 7 = 999. Deci, în şir sunt în total 999 + 999 = 1998 numere

b) $S=\underbrace{(1007-8)+(1008-9)+.....+(2005-1006)}_{999\ de\ paranteze}=\underbrace{999+999+...+999}_{de\ 999\ ori}=999^2$, deci S este pătrat perfect.

c) $1369=37^2$ şi $S=3^6\cdot 37^2$, deci S este divizibil cu 1369.

Problema 2

I. Avem că $7^y \mid 2005!$ şi $11^x \mid 2005!$. De la 1 la 2005 nu este nici un număr care se divide cu $7^4=2401$, dar sunt 5 numere care se divid cu 7^3 (343, 686, 1029, 1372, 1715), 35 de numere care se divid cu 7^2 şi nu se divid cu 7^3 şi 246 de numere care se divid cu 7 şi nu se divid cu 7^2. Prin urmare, $y\leq 5\cdot 3+35\cdot 2+246=331$. Analog, $x\leq 199$. Deci, $card(A)=200\cdot 332=66400$.

Această problemă se poate rezolva şi cu teorema lui Legendre: exponentul numărului prim p în descompunerea în factori primi a numărului $n!$ este $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+.....$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului raţional *a.*

II. a) Cele mai mici 1000 de numere naturale scrise în baza 10 sunt 0,1,2,3,….,999. Dacă scriem aceste numere în baza 5, atunci ele se vor scrie numai cu cifrele 0,1,2,3 şi 4. Cele 1000 numere scrise în baza 5, dacă le considerăm ca fiind scrise în baza 10, atunci ele sunt cele mai mici 1000 de numere din baza 10 care se pot scrie numai cu cifrele 0,1,2,3şi 4. Un număr din baza 10 va avea în baza 5 ultima cifră 2, dacă în baza 10 are ultima cifră 2 sau 7. De la 0 la 999 sunt 200 de numere care au ultima cifră 2 sau 5. Răspuns: 200 de numere.

b) Al 2005-lea termen al şirului este 31004, deoarece $2004_{(5)}=31004$.

c) $2202020_{(3)}=2\cdot 3^6+2\cdot 3^5+2\cdot 3^3+2\cdot 3=2004_{(10)}=31004_{(5)}$

Problema 3

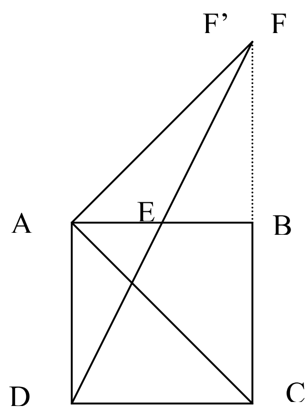
I. $n^2+2=a_1+a_2+....+a_n\geq 1+3+5+...+(2\cdot n-1)=n^2$.

Sigura posibilitate este $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,...,a_{n-1}=2\cdot n-3,\ a_n=2\cdot n+1$.

II. Fie S suma cerută .Observăm ca dacă $\overline{abcdef}$ este interesant atunci şi numărul $\overline{defabc}$ este interesant, iar $\overline{abcdef}+\overline{defabc} = \overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}+\overline{def}\cdot 1000+\overline{abc}=1001\cdot(\overline{abc}+\overline{def})$. Deci, $1001 \mid S$ şi $13 \mid 1001$, de unde rezultă că $13 \mid S$.

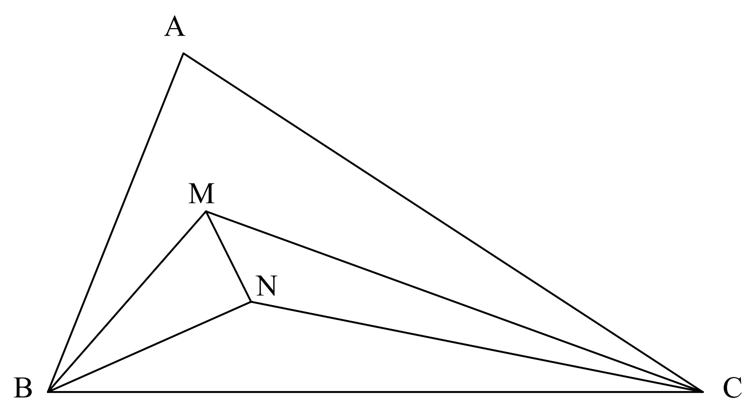
Clasa a VII-a

1.



Fie DE $\cap$ BC={F'}. Daca vom arata ca m$\angle(F'AC)$=90^0 atunci F=F'. Segmentul [EB] este linie mijlocie in triunghiul F'DC, rezulta F'B=BC=AB, rezulta triunghiul F'AC dreptunghic (AB=$\frac{1}{2}$F'C, deci F$\in$BC) rezulta C,B,F coliniare.

2.



m($\hat{B}$) + m($\hat{C}$) = 180^0- m($\hat{A}$) => m($M\hat{B}C$) + m($M\hat{C}B$)=$\frac{2}{3}[180^0-m(\hat{A})]$

=> m($B\hat{M}C$) = 180^0- $\frac{2}{3}[180^0-m(\hat{A})]$=$60^0$+$\frac{2}{3}m(\hat{A})$ (in triunghiul BMC).

In triunghiul BMC , BN si CN sunt bisectoare => MN este a treia bisectoare

=> m($C\hat{M}N$)= $\frac{1}{2}[60^0+\frac{2}{3}m(\hat{A})]=30^0+\frac{1}{3}m(\hat{A})$. Deci avem m($\hat{A}$)=$30^0+\frac{1}{3}m(\hat{A})$ => $m(\hat{A})=45^0$.

3. a) $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Se obtine prin amplificarea fractiilor din membrul stang si reducerea lui k.

=> $\frac{1}{k}=\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{k+1}$.

b) $\frac{1}{2005}=\frac{1}{2005*2006}+\frac{1}{2006*2007}+....+\frac{1}{4008*4009}+\frac{1}{4009}$.

c) $\frac{1}{2005}>\frac{1}{2006}$ => $\frac{2006}{2005*2006}>\frac{2006}{2006^2}$. Deci fractiile cautate sunt

$\frac{2006}{2005*2006+1}>\frac{2006}{2005*2006+2}>...>\frac{2006}{2005*2006+2005}$. Avem 2006=2*17*59 si 2005*2006+k , unde k$\in${1,2,…,2005}. De la 1 la 2005 avem 1002 numere divizibile cu 2, apoi 17*1, 17*3,…., 17*117, adica 59 numere divizibile cu 17 ,dar nu cu 2 si 59, si 59*1,59*3,…,59*33, (fara 59*17) , adica 16 numere divizibile cu 59, dar nu cu 2 si cu 17. Deci numarul fractiilor reductibile este 1002+59+16=1077.

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Se arată $\sqrt{4x+2005} \in N$ şi $\sqrt{x+502} \in N$

Se rezolvă: $\begin{cases} x+502 = l^2 \\ 4x+2005 = k^2 \end{cases} \Rightarrow l = k = 1$

Finalizare:A={(-501,2)}

Subiectul 2

Fie {P}= DB$\cap$AE şi SP$\cap$AB = {C'}

Dreapta care uneşte punctul de intersecție al diagonalelor cu punctul de intersecție al laturilor neparalele din trapez conține mijloacele bazelor(demonstrație).

(DBC)$\cap$(EAC) = CP şi CP$\subset$(SCC'),   AC' = C'B

(DBC)$\cap$(FAB) = BR unde {R} = AF$\cap$DC şi BR$\subset$(SBB'),   AB' = B'C

(EAC)$\cap$(FAB) = AQ unde {Q} = EC$\cap$BF şi AQ$\subset$(SAA'),   A'B = A'C

(DBC)$\cap$(EAC)$\cap$(FAB)$\subseteq$ (SAA')$\cap$(SBB')$\cap$(SCC') = SG

Locul geometric căutat este [SG] (orice punct L de pe [SG] este intersecția planelor AEF, BFD, CDE).

Subiectul 3

Arătăm că orice punct din exteriorul cercului de diametru AB nu este acceptabil pentru segmentul AB.

Arătăm că orice punct din interiorul cercului de centru mijlocul lui AB şi rază AB/2 nu poate fi soluție pentru că suma AC + CB nu este maximă .

Rămâne că soluțiile se află pe cercul de diametru AB.

Din condiția AC + CB maximă rezultă că ΔABC este isoscel şi singurele soluții sunt extremitățile diametrului perpendicular pe [AB] .

CLASA a IX-a

Barem de notare:

Subiectul I:

a) 3 puncte **1 punct daca se demonstreaza: |a|<1 si |b|<1 => 1+ab>0**

1 punct daca se demonstreaza: |a|<1 si |b|<1 => $\frac{a+b}{1+ab}$ **<1**

1 punct pentru: |a|<1, |b|<1 => $\frac{a+b}{1+ab}$ **> -1**

b) 4 puncte **1 punct daca justifica conditia** $a \geq -4$

1 punct daca justifica $a \leq 2$

2 puncte daca demonstreaza $a \in [-4,2] \Rightarrow x^2 + (a+1)x + 2 \geq 0, \forall\ x \in Z$

Subiectul II: **1 punct daca indica un punct cu proprietatea din enuntul problemei.**

2 puncte – justificarea afirmatiei de mai sus

1 punct daca precizeaza multimea cautata

3 puncte daca justifica faptul ca alte puncte nu mai exista.

Observatie: orice solutie vectoriala sau cu coordonate baricentrice este acceptata.

Subiectul III:

a) 4 puncte **1 punct daca noteaza** $A=\{i\ /(i,k) \in M\}$; $B=\{k\ /(i,k) \in M\}$

1 punct daca noteaza $|A|=a$; $|B|=b$ **si justifica** $i \leq a$, $k \leq b$;

$|M| \leq a+b$, $a+b \leq n$, $ab \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$

1 punct daca pentru n par justifica $|M| = \frac{n^2}{4} = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ **si**

$M=\{(i,k)/\ i \leq \frac{n}{2}, k > \frac{n}{2}\}$

1 punct daca considera n impar si $|M| = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} = \left[\frac{n^2}{4}\right]$ **si**

$M=\{(i,k), i < \frac{n}{2}\}$ **si** $k > \frac{n}{2}\}$; $|M| = \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

b) 3 puncte **1 punct pt ordonarea punctelor pe o axa**

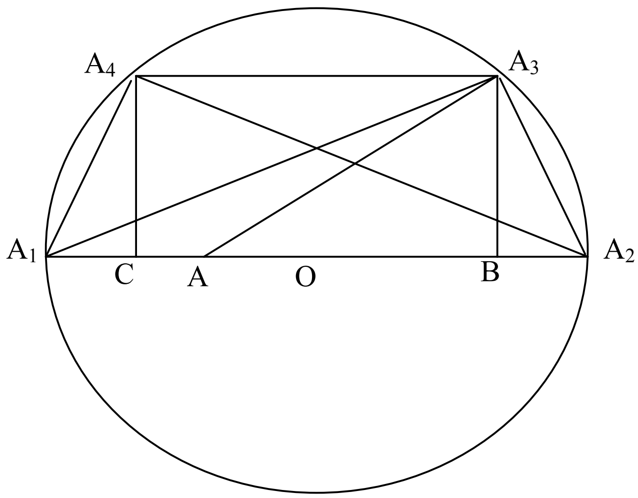
1 punct daca alege cel mai mic indice i astfel incat $\{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ **contine puncte de toate culorile**

1 punct daca alege j cel mai mare indice cu proprietatea $A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i$ **sa contina puncte din toate cele patru culori si precizeaza solutia segmentul** $[A_jA_i]$.

SOLUTII

CLASA a X-a

Subiectul 1:



Din condiția a), $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=r$, rezulta ca patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ este înscris in cercul de centru O si raza r, unde O este originea unui reper cartezian XOY de axe ortogonale fixat in plan.

Din condiția b) avem $A_1A_2=|z_1-z_2|=2r$ deci A_1A_2 este diametrul si atunci $O \in A_1A_2$. Notam cu B si C picioarele perpendicularelor din A_3 respectiv A_4 pe dreapta A_1A_2.

Triunghiurile $A_3A_1A_2$ si $A_4A_1A_2$ sunt dreptunghice cu unghiul drept in A_3 respectiv in A_4 deoarece aceste unghiuri cu vârful pe cerc subîntind un semicerc.

Fie $z=az_1+(1-a)z_2$, $a \in R$, iar A imaginea geometrica a lui z. Din teorema dreptei rezulta ca $A \in A_1A_2$.

Avem $A_3A \geq A_3B$ si atunci in mod necesar $\min\limits_{a\in R} A_3A=A_3B \Leftrightarrow \min\limits_{a\in R} |az_1+(1-a)z_2-z_3|=A_3B$, (1)

Notam cu S aria triunghiului $A_4A_1A_2$.Avem $S=\frac{1}{2} A_1A_2\ \ A_4C = \frac{1}{2} 2r\ A_4C=r\ A_4C$, (2)

Pe de alta parte $S=\frac{1}{2} A_1A_2\ \ A_4A_2=\frac{1}{2} |z_4-z_1|\ |z_4-z_2|$, (3)

Din (2) si (3) $\Rightarrow r\ A_4C = \frac{1}{2} |z_4-z_1|\ |z_4-z_2|$, de unde obținem: $A_4C=\frac{1}{2r} |z_4-z_1|\ |z_4-z_2|$, (4)

Din (1) si (4) si condiția c) $\Rightarrow$ $A_3B=A_4C$ deci $d(A_3, A_1A_2)= d(A_4, A_1A_2)$. Rezulta $A_1A_2 \parallel A_4A_3$, (5)$\Rightarrow$ $< A_1A_2A_4 \equiv < A_2A_4A_3$ ca unghiuri alterne interne. Rezulta $m(< A_1A_2) = 2\ m(<A_2A_4A_3)= m\ (< A_1A_2A_4) = m\ (<A_2A_3)$ de unde $<A_1A_4 \equiv < A_2A_3$, (6)

Din (5) si (6)$\Rightarrow$ $A_1A_2A_3A_4$ trapez isoscel.

Subiectul 2:

Daca $k \geq 2$; luam $x = \frac{2k-1}{2k}; \frac{2k-1}{2k} \in [0,1)$

$\frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k-1 > k \Leftrightarrow k > 1$; adevarat.

Inlocuind, obtinem : $2k-1 = \left[2k-1-\frac{2k-1}{2k}+\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0 = \left[\frac{1}{2}-\frac{2k-1}{2k}\right] \Leftrightarrow 0 = -1$ fals. Daca k=0, avem:

$0 = \left[-x+\frac{1}{2}\right], (\forall) x \in [0,1)$ fals.

Daca k=1, avem: $[-2x] = \left[-3x+\frac{1}{2}\right]$, luam $x = \frac{1}{6} : \left[-\frac{1}{3}\right] = 0$ fals.

Pentru $k \le -2$, luam $x = \frac{2k+1}{2k} \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, caci

$\frac{2k+1}{2k} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2k+1 < k \Leftrightarrow k < -1$ adevarat

$\frac{2k+1}{2k} > 1 \Leftrightarrow 2k+1 < 2k$ adevarat

Inlocuind avem $2k+1 = \left[2k+1-\frac{2k+1}{2k}+\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0 = \left[\frac{1}{2}-\frac{2k+1}{2k}\right] \Leftrightarrow 0 = -1$ fals

Pentru k=1, $[2x] = \left[x+\frac{1}{2}\right]$

Daca $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2x \in [0,1)$ si $x+\frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2},1\right)$. Egalitatea se stabileste; daca

$x \in \left[\frac{1}{2},1\right), [2x] = 1 = \left[x+\frac{1}{2}\right]$. Deci k=1

Subiectul 3:

a)

Cazul I:

$E \in (AD)$ si $F \in (BC)$.

Avem:

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN} = -\frac{k}{k+1}\vec{AB} + \vec{AD} + \frac{k}{k+1}\vec{DC}$

$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN} = \frac{1}{k+1}\vec{AB} + \vec{BC} - \frac{1}{k+1}\vec{DC}$ / :k

rezulta (1+k) $\vec{MN} = \vec{AD} + k\vec{BC}$

$\vec{EF} = (\vec{IF} - \vec{IE})$. Conditia $MN \perp EF \Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{EF} = 0 \Leftrightarrow$

$(\vec{AD} + k\vec{BC})(\vec{IF} - \vec{IE})) = 0 \Leftrightarrow \vec{AD} \cdot \vec{IF} - k \cdot \vec{BC} \cdot \vec{IE} = 0$

Constatam ca ΔIAD~ΔIBC => $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = u$; $\frac{EI}{AD} = \frac{IF}{BC}$ =>EI ·BC=IF ·AD, iar

m(<($\vec{AB}$, $\vec{IF}$))=m(<($\vec{IE}$, $\vec{BC}$))au masura 90+α, α=m(<SIF), $S \in IE \cap BC$.

Rezulta $\vec{AD} \cdot \vec{IF} = \cdot \vec{BC}\ \vec{IE}$ ($\neq 0$). Rezulta k=1, deci Msi N sunt mijloacele (AB), respectiv (CD).

Cazul II: Analog $E \notin (AD)$.

b)

Fie O_1 astfel incat $O_1 \in (MN)$, $\frac{MO_1}{O_1N} = u$, deducem:

$\vec{EO_1}$ =(u $\vec{DN} + \vec{AM}$)/(u+1) $= \frac{1}{2(k+1)}$ (u $\vec{DC} + \vec{AB}$)= $\frac{1}{2}$ $\vec{EF}$ urmeaza ca O_1 este mijlocul segmentului (EF), iar O=O_1 si $\frac{MO}{ON}$ =u.

Clasa a XI-a

Problema 1

a) $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)=(A+iB)\overline{(A+iB)} \Rightarrow \det(A^2+B^2)=...=|\det(A+iB)|^2 \geq 0$

b) $0 \leq (\det(A+I_n))^2=\det(A+I_n)^2=\det(A^2+2A+I_n)=\det(2A+2I_n)=2^n\det(A+I_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A+I_n) \geq 0$ (1)

Apoi, $\det(A-I_n)=\det(-(I_n-A))=(-1)^n\det(I_n-A)= (-1)^n\det(\frac{1}{2}(2I_n-2A))= (-1)^n\frac{1}{2^n}\det(2I_n-2A)=$

$=\frac{(-1)^n}{2^n}\det(I_n-2A+A^2)= \frac{(-1)^n}{2^n}\det(I_n-A)^2=\frac{(-1)^n}{2^n}(\det(I_n-A))^2 \leq 0 \Rightarrow \det(A-I_n) \leq 0$ (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow \det(A+I_n) \geq \det(A-I_n)$.

c) $I_n+A+B+A^2+B^2=(I_n+A+A^2)(I_n+B+B^2)=\left[\left(A+\frac{1}{2}I_n\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right]\cdot\left[\left(B+\frac{1}{2}I_n\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2\right]$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(I_n+A+B+A^2+B^2) \geq 0$, conform (a).

Problema 2

Din ipoteza $\Rightarrow a_{n+1}^3 < 1 - a_n^3$ si $1-a_n < a_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow (1-a_n)^3 < a_{n+1} < 1-a_n^3$, $(\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow ... \Rightarrow 3a_n(a_n-1)<0$,

$(\forall) n \in \mathbb{N}$. Singura posibilitate este $a_n>0$ si $a_n-1<0 \Rightarrow a_n \in (0,1)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deci sirul este marginit. (1)

Din $a_n \in (0,1) \Rightarrow a_{n+1}+a_n>0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Insa $a_{n+1}^2 < a_n^2$, $(\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1}<a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deci sirul este strict descrescator. (2)

Conform teoremei lui Weierstrass, din (1) si (2) $\Rightarrow$ sirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Problema 3

Din $k \cdot a_k - 1 < [k \cdot a_k] \leq k \cdot a_k \Rightarrow [a_k] < \left[\frac{1+[k \cdot a_k]}{k}\right] \leq [2a_k]$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

Se dau valori lui k de la 1 la n, se insumeaza inegalitatile obtinute si rezulta :

$$\sum_{k=1}^{n}[a_k] < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+[k \cdot a_k]}{k}\right] \leq \sum_{k=1}^{n}[2a_k] \Rightarrow y_n < x_n \leq \sum_{k=1}^{n}[2a_k] \Rightarrow 0 < x_n - y_n \leq \sum_{k=1}^{n}[2a_k] - y_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[2a_k] - \sum_{k=1}^{n}[a_k] = \sum_{k=1}^{n}([2a_k]-[a_k]) \underline{\underline{Hermite}} \sum_{k=1}^{n}[a_k + \frac{1}{2}] \leq \sum_{k=1}^{n}(a_k + \frac{1}{2}) \leq n \cdot a_n + \frac{n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x_n - y_n}{z_n} \leq \frac{n \cdot (2a_n + 1)}{z_n}, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - y_n}{z_n} = 0 \qquad , q.e.d.$$

Clasa a XII-a

Problema 1

Se arata ca $f'_{(x)}=0$; $(\forall)x \in I$. Se calculeaza $f_{(0)}=\frac{3\pi}{2}$. Deci $f_{(x)}=\frac{3\pi}{2}$, $(\forall)x \in I$. Se arata prin inductie ca $F_{n(x)}=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}$ $(\forall)$ $n \geq 1$, $x \in I$.

In concluzie $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n} F_{k(x)}) = \frac{3\pi}{2}(e^x - 1)$.

Problema 2

a) $(xy)=(yx)^n=(xy)^{n^2} = ((xy)\cdot(xy)^{n-1})^n = (xy)^{n-1}\cdot(xy) = (xy)^n = yx$

b) $x^n = (xe)^n = ex = x \Rightarrow x^{n-1} = e; (\forall)x \in M$. (n-1,p)=1 $\Rightarrow (\exists)k, l \in \mathrm{Z}$ astfel incat $\mathrm{kp + l(n-1) = 1}$. Pentru orice $x \in M$, avem $x = x^{kp+l(n-1)} = x^{kp} = (x^k)^p$. Pentru orice $y \in M$; avem $f_{\left(y^k\right)}$=y. Deci f este surjectie.

Problema 3

1) Din $f \circ g = h$ si h- bijectiva, rezulta g- injectiva. Cum g este continua, rezulta ca g este strict monotona. De asemenea h este functie strict monotona. Fie $g_{(a+0)} = l_1$. Presupunem ca $a<l_1<b$ si fie $(x_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{C} a$, $x_n \in (a,b), (\forall)n \in \mathrm{N}^*$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} g_{(x_n)} = l_1 \in (a,b)$. Functia f continua in l_1, rezulta ca $\lim\limits_{n} f_{(g(x_n))} = f_{(l_1)}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} h_{(x_n)} = f_{(l_1)}$ si $f_{(l_1)} \in (a,b)$ (1). Insa $\lim\limits_{n\to\infty} h_{(x_n)} = h_{(a+0)}$. Deoarece h este strict monotona si bijectiva, avem $h_{(a+0)}$=a sau $h_{(a+0)}$=b (2), iar $f_{(l_1)} = h_{(a+0)}$ (3). Din (1), (2) si (3) obtinem contradictie. Deci $g_{(a+0)}$=a sau $g_{(a+0)}$=b. La fel se arata ca $g_{(b-0)}$=a sau $g_{(b-0)}$=b. Deoarece g este strict monotona $\Rightarrow$ $g_{(a+0)} \neq g_{(a-0)}$. Deci g este bijectiva. Din $f \circ g = h \Rightarrow f = h \circ g^{-1} \Rightarrow$ f este bijectiva.

2) Pentru contraexemple: $h_{(x)}=x, (\forall)x \in I$

Pentru $I = [a,b)$ se considera $f_{(x)} = \begin{cases} a, x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ 2x - b, x \in [\frac{a+b}{2}, b) \end{cases}$, $g_{(x)} = \frac{x+b}{2}$, $x \in [a,b)$.

Pentru $I = (a,b]$ se considera functiile $f_{(x)} = \begin{cases} 2x - a, x \in (a, \frac{a+b}{2}] \\ b, x \in (\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$, $g_{(x)} = \frac{x+a}{2}$, $x \in (a,b]$.

Pentru $I = [a,b]$ se considera $f_{(x)} = \begin{cases} a, x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ 2x - b, x \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$, $g_{(x)} = \frac{x+b}{2}$, $x \in [a,b]$.