Soluţiile problemelor propuse pentru pregătirea concursurilor în nr. 2/2017

A. Nivel gimnazial

G326. *Pentru a-şi face provizii pentru iarnă, spiriduşii trebuie să culeagă ciuperci din pădure. Ciupercile cresc în* 2017 *poieniţe, însă în una dintre acestea toate ciupercile sunt otrăvite, otrava acţionând după o zi. Vraciul are exact* 10 *doze de poţiune, cu ajutorul cărora poate vindeca* 10 *spiriduşi care au mâncat o ciupercă otrăvită. Cum pot proceda spiriduşii pentru a identifica poieniţa blestemată, într-o singură zi şi fără victime?*

Armand Anuşcă-Popa, elev, Iaşi

Soluţie. Spiriduşii vor alege un detaşament de 11 voluntari. Numerotăm poieniţele $1, 2, ..., 2017$ şi vom scrie numărul de ordine al fiecărei poieniţe în baza 2; fie $a_{10}^i a_9^i ... a_1^i a_0^i$ numărul asociat poieniţei i (cum $2017 < 2^{11}$, fiecare $i \in \{1, 2, ..., 2017\}$ se poate scrie în baza 2 ca număr de 11 cifre, adăugând eventual câteva zerouri nesemnificative). Spiriduşul cu numărul k va mânca câte o ciupercuţă din fiecare poieniţă i pentru care $a_{k-1}^i = 1$ şi nu va mânca nimic din poieniţele j pentru care $a_{k-1}^j = 0$; toată acţiunea trebuie să dureze mai puţin de o zi! La sfârşitul acelei zile, vor fi otrăviţi spiriduşii care au mâncat din poiana otrăvită şi vor fi teferi toţi ceilalţi. Observăm că nu vor fi otrăviţi mai mult de 10 spiriduşi: numărul $\underbrace{\overline{11...1}_{(2)}}_{11 \text{ cifre}}$ este, în baza 10, 2047, iar numărul poieniţelor este doar 2017. Dacă piticii otrăviţi sunt cei cu numerele $n_1, n_2, ..., n_i$, $i \leq 10$, numărul poieniţei blestemate este $2^{n_1} + 2^{n_2} + ... + 2^{n_i}$.

G327. *Demonstraţi că există numere naturale care sunt pătrate perfecte şi au suma cifrelor* 2017.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Numărul natural $a = \dfrac{10^n + 5}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are proprietatea că $a^2 = \dfrac{1}{9}(10^{2n} + 10^{n+1} + 25) = \dfrac{1}{9}(10^{2n} - 1 + 10^{n+1} - 1 + 27) = \underbrace{\overline{11...1}}_{2n \text{ cifre}} + \underbrace{\overline{11...1}}_{n+1 \text{ cifre}} + 3 = \overline{\underbrace{11...1}_{n-1 \text{ cifre}}\underbrace{22...2}_{n \text{ cifre}}5}$. Suma cifrelor lui a^2 este $n - 1 + 2n + 5 = 3n + 4$ şi, pentru $n = 671$, această sumă va egală cu 2017. Prin urmare, există pătratul perfect $\overline{\underbrace{11...1}_{670 \text{ cifre}}\underbrace{22...2}_{671 \text{ cifre}}5}$ cu suma cifrelor 2017.

G328. *Arătaţi că nu există numere naturale x, y, z, t cu proprietatea că $x^{2016} + y^{2016} + z^{2016} - t^{2016} = 2017$.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie (Gheorghe Iurea). Dacă x este număr natural par, atunci $x^{2016} \equiv 0$ $(mod\ 64)$. Dacă x este număr natural impar, atunci $x^2 = (M_2 + 1)^2 = M_4 + 1$, $x^4 = (M_4 + 1)^2 = M_8 + 1$, $x^8 = (M_8 + 1)^2 = M_{16} + 1$, $x^{16} = (M_{16} + 1)^2 = M_{32} + 1$, $x^{32} = (M_{32} + 1)^2 = M_{64} + 1$, deci $x^{2016} = (x^{32})^{63} = (M_{64} + 1)^{63} = M_{64} + 1$. În aceste condiţii, posibilele resturi modulo 64 ale membrului stâng sunt $0, 1, 2, 3$ şi 63. Cum $2017 \equiv 33 (mod\ 64)$, obţinem cerinţa problemei.

G329. *Determinaţi numerele naturale nenule p cu proprietatea că* $\left[\sum_{k=1}^{p} \sqrt{n^2 + \frac{kn}{p}}\right] = pn$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$*. (Am notat cu* $[a]$ *partea întreagă a numărului real a.)*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Se observă că $n < \sqrt{n^2 + \frac{kn}{p}} < n + \frac{k}{2p}$, $\forall k \in \{1, 2, ..., p\}$ de unde, prin sumare, obţinem că $pn < \sum_{k=1}^{p} \sqrt{n^2 + \frac{kn}{p}} < pn + \frac{p+1}{4}$. Cum $\frac{p+1}{4} \leq 1$ pentru $p \in \{1, 2, 3\}$, relaţia din enunţ este adevărată pentru $p \in \{1, 2, 3\}$. Vom arăta că, dacă $p \geq 4$, există $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\left[\sum_{k=1}^{p} \sqrt{n^2 + \frac{kn}{p}}\right] \geq pn + 1$. Luăm $n = p^2$; atunci $\sqrt{p^4 + kp} > p^2$, $\forall k \in \{1, 2, ..., p-4\}$, $\sqrt{p^4 + (p-3)p} > p^2 + \frac{1}{10}$, $\sqrt{p^4 + (p-2)p} > p^2 + \frac{2}{10}$, $\sqrt{p^4 + (p-1)p} > p^2 + \frac{3}{10}$ şi $\sqrt{p^4 + p^2} > p^2 + \frac{4}{10}$. Adunând aceste relaţii, obţinem că $\sum_{k=1}^{p} \sqrt{p^4 + kp} > p \cdot p^2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = p \cdot n + 1$, ceea ce doream. În concluzie, valorile căutate ale lui p sunt 1, 2 şi 3.

G330. *Pentru* a, b, c, d *reale pozitive cu* $abcd = 1$*, demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{1}{ab + bc + ca + 1} + \frac{1}{bc + cd + db + 1} + \frac{1}{cd + da + ac + 1} + \frac{1}{da + ab + bd + 1} \leq 1.$$

Veronica Huiban, Bârlad şi Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$, $t = \sqrt{d}$; atunci $\frac{1}{ab + bc + ca + 1} = \frac{1}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1} \leq \frac{1}{xyz(x + y + z) + xyzt} = \frac{1}{xyzt} \cdot \frac{t}{x + y + z + t} = \frac{t}{x + y + z + t}$ (am folosit binecunoscuta $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$). Scriem încă trei inegalităţi analoage şi, prin sumarea tuturor, obţinem inegalitatea din enunţ.

G331. *Determinaţi valoarea maximă a expresiei*

$$E = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - x^2} + x + y + z,$$

când numerele reale x, y *şi* z *parcurg intervalul* $[-1, 1]$.

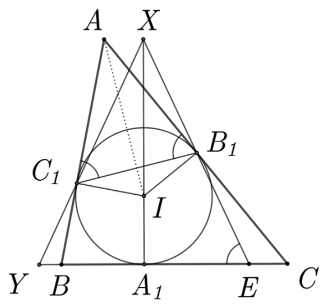
Nguyen Viet Hung, Hanoi

Soluţie. Cum $2ab \leq a^2 + b^2$, avem că $2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - y^2} \leq \frac{x^2}{3} + 1 - y^2$, deci $x\sqrt{1 - y^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x^2}{3} + 1 - y^2\right)$. Scriem încă două inegalităţi similare şi, prin sumarea lor, obţinem că $\sum x\sqrt{1-y^2} \le -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum x^2\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Pe de altă parte, $\sum x = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum (x^2 + \frac{3}{4})\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\sum x^2\right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Combinând cele două relaţii, deducem că $E = \sum x\sqrt{1-y^2} + \sum x \le \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Egalitatea se atinge pentru $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{2}$, aşadar $E_{max} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

G332. *Cercul de centru I este tangent laturilor triunghiului ABC în punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Pe latura BC se consideră punctul E astfel încât $\widehat{BEB_1} \equiv \widehat{C_1B_1A}$. Dacă $\{X\} = EB_1 \cap A_1I$ şi $\{Y\} = XC_1 \cap BC$, arătaţi că patrulaterul YCB_1C_1 este inscriptibil.*

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

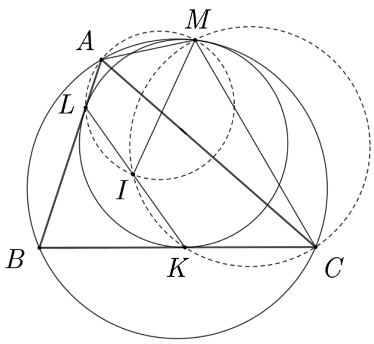
Soluţie. Cum AI este bisectoarea bazei triunghiului isoscel AB_1C_1, rezultă că $m(\widehat{IAB_1}) = 90° - m(\widehat{C_1B_1A})$. Din triunghiul dreptunghic XA_1E, obţinem că $m(\widehat{IXB_1}) = 90° - m(\widehat{BEA_1}) = 90° - m(\widehat{C_1B_1A})$, prin urmare $\widehat{IAB_1} \equiv \widehat{IXB_1}$, deci patrulaterul $IAXB_1$ este inscriptibil. Pe de altă parte, patrulaterul AC_1IB_1 este şi el inscriptibil şi atunci punctele A, C_1, I, B_1, X vor fi conciclice. Deducem că $\widehat{B_1XI} \equiv \widehat{B_1AI} \equiv \widehat{C_1AI} \equiv \widehat{C_1XI}$, deci XI este bisectoarea unghiului $\widehat{YXE}$. În triunghiul XYE, XI este bisectoare şi înalţime, prin urmare $\triangle XYE$ este isoscel cu $\widehat{Y} \equiv \widehat{E}$. Rezultă că $Y \equiv \widehat{C_1B_1A}$, aşadar patrulaterul YCB_1C_1 este inscriptibil.



G333. *Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$. Cercul $\mathcal{C}_1$ este tangent cercului $\mathcal{C}$ şi segmentelor AB şi BC în punctele M, L şi respectiv K. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor AML şi CMK trec prin centrul cercului înscris în triunghiul ABC.*

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Fie $\{M, I\} = \mathcal{C}(AML) \cap \mathcal{C}(CMK)$. Trebuie să arătăm că I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Avem: $m(\sphericalangle BLI) + m(\sphericalangle BKI) = m(\sphericalangle AMI) + m(\sphericalangle CMI) = 180° - m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle BLK) + m(\sphericalangle BKL)$, deci $\sphericalangle BLI \equiv \sphericalangle BLK$, adică punctele L, I, K sunt coliniare. Astfel, $m(\sphericalangle ICK) = m(\sphericalangle IMK) = m(\sphericalangle IMC) - m(\sphericalangle KMC)$. Dar $m(\sphericalangle IMC) = m(\sphericalangle BKL) = \frac{180° - m(\sphericalangle ABC)}{2} = 90° - \frac{B}{2}$ şi $m(\sphericalangle KMC) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC) = \frac{A}{2}$, prin urmare

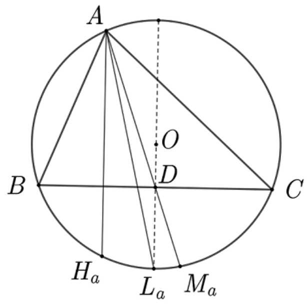


$m(\sphericalangle ICK) = 90^\circ - \dfrac{B}{2} - \dfrac{A}{2} = \dfrac{C}{2}$, adică CI este bisectoarea $\sphericalangle ACB$.

Analog se arată că AI este bisectoarea $\sphericalangle BAC$, deci I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

G334. *Fie dat un triunghi ABC şi fie M_a, H_a şi L_a intersecţiile cercului său circumscris cu dreptele suport ale medianei, înălţimii, respectiv bisectoarei ce corespund vârfului A. Reţinem în planul figurii punctele M_a, H_a, L_a şi ştergem celelalte elemente. Să se reconstruiască triunghiul ABC utilizând rigla şi compasul.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi



Soluţie. Vom parcurge următorii paşi (ce pot fi executaţi cu rigla şi compasul):

1. Construim cercul circumscris triunghiului $M_aH_aL_a$ şi centrul său O, care vor avea aceeaşi semnificaţie şi relativ la triunghiul ABC căutat.

2. Paralela prin H_a la dreapta OL_a intersectează cercul într-un punct (diferit de H_a) ce va fi vârful A căutat; într-adevăr, $AH_a \perp BC$ şi $OL_a \perp BC$ (deoarece L_a este mijlocul arcului $\widehat{BC}$), ceea ce justifică construcţia indicată.

3. În punctul D de intersecţie a dreptelor OL_a şi AM_a (D este pe diametrul prin L_a, deoarece L_a este între H_a şi M_a) construim perpendiculara pe OL_a şi notăm intersecţiile acestei drepte cu cercul circumscris cu B şi C. Punctele B şi C sunt vârfurile triunghiului de construit, căci $AH_a \perp BC$ şi D este mijlocul coardei BC.

4. Unim punctele A, B, C şi obţinem triunghiul ABC dat iniţial. Observăm faptul că triunghiul construit are unghiul A ascuţit, drept sau obtuz după cum $AD > DM_a$, $AD = DM_a$, respectiv $AD < DM_a$.

G335. *Fie $ABCD$ un tetraedru şi punctele arbitrare $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$, $R \in (BD)$ şi $S \in (CD)$. Notăm cu X, Y, Z şi T centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, MQR, NQS, respectiv PRS. Arătaţi că $\mathcal{V}_{XBCD} + \mathcal{V}_{YACD} + \mathcal{V}_{ZABD} + \mathcal{V}_{TABC} = 2\mathcal{V}_{ABCD}$. (În legătură cu problema E:15144 din Gazeta Matematică 2/2017.)*

Mihai Miculiţa, Oradea

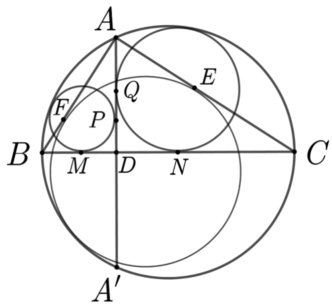
Soluţie. Notăm cu M', N', P' şi X' proiecţiile punctelor M, N, P şi X pe planul BCD. Cum X este centrul de greutate al triunghiului MNP, se arată că $XX' = \frac{1}{3}(MM' + NN' + PP')$. Deducem că $\mathcal{V}_{XBCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{BCD} \cdot XX' = \dfrac{1}{9} \cdot \mathcal{A}_{BCD} \cdot (MM' + NN' + PP') = \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{MBCD} + \mathcal{V}_{NBCD} + \mathcal{V}_{PBCD})$. Scriem încă trei relaţii analoage; prin sumarea tuturor ;i rearanjarea termenilor, obţinem: $\mathcal{V}_{XBCD} + \mathcal{V}_{YACD} + \mathcal{V}_{ZABD} + \mathcal{V}_{TABC} = \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{MACD} + \mathcal{V}_{MBCD}) + \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{NABD} + \mathcal{V}_{NBCD}) + \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{PABC} + \mathcal{V}_{PBCD}) + \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{QABD} + \mathcal{V}_{QACD}) + \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{RABC} + \mathcal{V}_{RACD}) + \dfrac{1}{3}(\mathcal{V}_{SABC} + \mathcal{V}_{SABD}) = \dfrac{1}{3} \cdot 6\mathcal{V}_{ABCD} = 2\mathcal{V}_{ABCD}$.

B. Nivel liceal

L326. *Fie ABC un triunghi dreptunghic înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi D piciorul înălţimii din vârful unghiului drept A. Cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_3$ de raze r_1, r_2 şi, respectiv, r_3 tangente interior cercului $\mathcal{C}$ mai sunt tangente şi segmentelor $[AD]$ şi $[BD]$, $[AD]$ şi $[CD]$ şi, respectiv, $[AB]$ şi $[AC]$. Arătaţi că $r_1 + r_2 = r_3$.*

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţia 1 (Neculai Roman, Marius Olteanu). Fie $\{M\} = \mathcal{C}_1 \cap BC$, $\{N\} = \mathcal{C}_2 \cap BC$, $\{P\} = \mathcal{C}_1 \cap AD$, $\{Q\} = \mathcal{C}_2 \cap AD$, $\{E\} = \mathcal{C}_3 \cap AB$, $\{F\} = \mathcal{C}_3 \cap AC$ şi $\{A'\} = (AD \cap \mathcal{C}$.



Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile A, B, A' şi $\mathcal{C}_2$ (A, B, A' degenerate) şi obţinem:

$AB \cdot A'Q + AQ \cdot A'B = AA' \cdot BN \Leftrightarrow$

$AB \cdot A'Q + AQ \cdot AB = AA' \cdot BN \Leftrightarrow$

$AB \cdot AA' = AA' \cdot BN \Leftrightarrow BN = AB$.

Analog, $CM = AC$ şi vom avea:

$$BN + CM = BC + MN \Leftrightarrow b + c = a + MN \Leftrightarrow MN = 2p - 2a = 2r.$$

Dar $MN = r_1 + r_2$, prin urmare $r_1 + r_2 = 2r$.

Aplicăm teorema lui Casey pentru cercurile $A, B, \mathcal{C}_3$ şi C (A, B, C degenerate) şi obţinem: $AB \cdot CF + AC \cdot BE = AE \cdot BC \Leftrightarrow c(b - AE) + b(c - AE) = AE \cdot a \Leftrightarrow AE = \dfrac{bc}{p}$.

Dar $AE = r_3$, aşadar $r_3 = \dfrac{bc}{p} = \dfrac{2S}{p} = \dfrac{2pr}{p} = 2r$, ceea ce încheie rezolvarea.

Soluţia 2 (Titu Zvonaru). Notăm cu O mijlocul ipotenuzei BC, cu I_1 centrul cercului $\mathcal{C}_1$ şi cu M punctul de tangenţă cu BD a cercului $\mathcal{C}_1$. Evident, $I_1M = I_1D = r_1$. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $b \geq c$. Cum $DO = \dfrac{a}{2} - \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{b^2 - c^2}{2a}$, din triunghiul dreptunghic OI_1M obţinem: $r_1^2 + \left(\dfrac{b^2 - c^2}{2a} + r_1\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2} - r_1\right)^2 \Rightarrow a^2 r_1^2 + 2ab^2 r_1 - b^2c^2 = 0 \Rightarrow r_1 = \dfrac{ab - b^2}{a}$ şi, analog, $r_2 = \dfrac{ac - c^2}{a}$.

Dacă r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, conform formulei fundamentale pentru cercurile mixtliniar înscrise (aşa cum este cercul $\mathcal{C}_3$), avem că $r_3 = \dfrac{r}{\cos^2 \frac{A}{2}} = 2r = \dfrac{2bc}{a + b + c}$. Relaţia de demonstrat se scrie, echivalent, astfel: $r_1 + r_2 = r_3 \Leftrightarrow \dfrac{ab - b^2 + ac - c^2}{a} = \dfrac{2bc}{a + b + c} \Leftrightarrow (b + c - a)(b + c + a) = 2bc \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 2bc$, adevărat.

Soluţia 3 (Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota). Considerăm reperul cartezian cu originea în D şi dreptele BC, AD ca axe Ox, respectiv Oy. Avem aşadar $D(0,\ 0)$, $A(0,\ 2a)$, cu $a > 0$. Dacă alegem ca unitate de măsură $\frac{BD}{2}$, atunci $B(-2,\ 0)$ şi din condiţia ca dreptele AB, AC să fie perpendiculare obţinem simplu $C\left(2a^2, 0\right)$.

Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este $O\left(a^2-1,0\right)$, iar raza acestui cerc este $R=a^2+1$. Centrele cercurilor $\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2$ se află pe a doua, respectiv prima bisectoare, deci ele sunt $O_1\left(-r_1,\ r_1\right)$, respectiv $O_2\left(r_2,\ r_2\right)$. Din condiţia $OO_1 = R-\ r_1$ avem

$$\left(r_1+a^2-1\right)^2+\ r_1^2=\ \left(r_1-a^2-1\right)^2,$$

de unde rezultă $r_1=-2a^2+2a\sqrt{a^2+1}$. Similar, $r_2=-2+2\sqrt{a^2+1}$.

Bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ este dreapta AM, unde M este mijlocul arcului BC care nu conţine punctul A, deci $M\left(a^2-1,\ -a^2-1\right)$. Dacă $a\neq 1$, atunci panta dreptei AM este $\dfrac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=-\dfrac{a+1}{a-1}$, deci ecuaţia dreptei AM este $y-2a=-\dfrac{a+1}{a-1}x$. Centrul O_3 al cercului $\mathcal{C}_3$ se află pe dreapta AM, deci $O_3\left(x_0,\ 2a-\dfrac{a+1}{a-1}x_0\right)$. Segmentul AO_3 este diagonala unui pătrat, celelalte două vârfuri ale pătratului fiind punctele de tangenţă ale cercului $\mathcal{C}_3$ cu dreptele AB şi AC, deci $AO_3=r_3\sqrt{2}$, de unde $x_0=\pm\dfrac{(a-1)\,r_3}{\sqrt{a^2+1}}$. Vom alege semnul astfel ca r_3 să fie un număr pozitiv. Din $OO_3=R-r_3$, se obţine

$$\left(\varepsilon\frac{(a-1)\,r_3}{\sqrt{a^2+1}}-a^2+1\right)^2+\left(\varepsilon\frac{(a+1)\,r_3}{\sqrt{a^2+1}}-2a\right)^2=\left(r_3-a^2-1\right)^2,$$

unde $\varepsilon=\pm1$. După eliminarea parantezelor, coeficientul lui r_3^2 este egal cu 1, iar termenul care nu conţine r_3 este nul. Cum $r_3>0$, se deduce

$$r_3=2\varepsilon\frac{(a-1)\left(a^2-1\right)}{\sqrt{a^2+1}}+4a\varepsilon\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}-2\left(a^2+1\right)$$

şi $r_3>0$ impune alegerea $\varepsilon=1$, astfel că $r_3=2\,(a+1)\sqrt{a^2+1}-2\left(a^2+1\right)=r_1+r_2$.

Dacă $a=1$, atunci $r_1=r_2=2\sqrt{2}-2$, iar r_3 este raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de lungime 8, astfel că $r_3=4\sqrt{2}-4$, deci egalitatea din enunţ se verifică şi în acest caz.

L327. *Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC, CA, AB în punctele D, E, respectiv F. Să se demonstreze că, dacă ortocentrul triunghiului DEF aparţine înălţimii din A a triunghiului ABC, atunci triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic. (O reciprocă a problemei M2447 din Kvant 1/2017.)*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţia 1 (a autorului). Folosind notaţiile obişnuite într-un triunghi, avem

$$BD=p-b,\ DC=p-c,\ DF=2(p-b)\sin\frac{B}{2},\ DE=2(p-c)\sin\frac{C}{2},$$

$$\widehat{DEF}=\frac{A+C}{2},\ \widehat{DEF}=\frac{A+B}{2}.$$

Notăm cu D' piciorul înălţimii din D a $\triangle DEF$ şi cu A' intersecţia dintre AD' şi latura BC; obţinem

$$\frac{D'E}{D'F}=\frac{DE\cos(FED)}{DF\cos(EFD)}=\frac{2(p-c)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+C}{2}}{2(p-b)\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{p-c}{p-b}.$$

Vom folosi relaţia (*) din T. Zvonaru, N. Stanciu, *Alte proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral*, Recreaţii matematice nr. 2/2011, unde

$$k_1 = \frac{p-b}{p-c},\ k_2 = \frac{p-c}{p-a},\ k_3 = \frac{p-a}{p-b},\ p_1 = \frac{p-c}{p-b},\ p_2 = \frac{p-a}{p-c},\ p_3 = \frac{p-b}{p-a}.$$

Rezultă
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c(a+b)(p-b)}{b(a+c)(p-c)}.$$

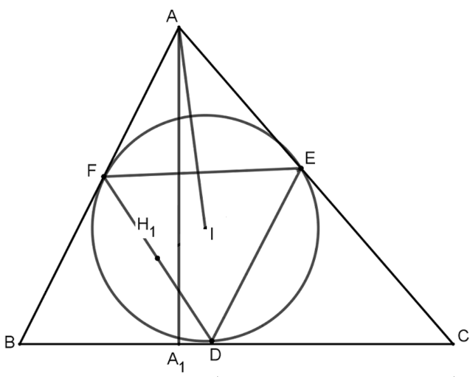
Dacă A' este piciorul înălţimii din A a $\triangle ABC$, obţinem succesiv

$$\frac{c(a+b)(p-b)}{b(a+c)(p-c)} = \frac{c\cos B}{b\cos C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3(b-c) - a(b^3-c^3) + a^2(b^2-c^2) - (b^4-c^4) + abc(b-c) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-c)(a^2-b^2-c^2)(a+b+c) = 0,$$

de unde concluzia.

Soluţia 2 (Marius Olteanu). Fie H_1 ortocentrul triunghiului DEF şi A_1 proiecţia punctului A pe BC. Evident, I este centrul cercului circumscris triunghiului DEF, prin urmare $\overrightarrow{IH_1} = \overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}$ (Sylvester).



I. $m(\widehat{BAC}) \leq 90°$. Cum AI este mediatoarea segmentului EF, rezultă că $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \lambda\overrightarrow{IA}$, cu $\lambda \in (0,1]$, deci $\overrightarrow{IH_1} = \overrightarrow{ID}+\lambda\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{ID}+\lambda(\overrightarrow{IH_1}+\overrightarrow{H_1A}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IH_1}(1-\lambda) = \overrightarrow{ID}+\lambda\overrightarrow{H_1A}$. Pe de altă parte, AH_1 şi ID sunt perpendiculare pe BC, adică $AH_1 \| ID$, de unde $\overrightarrow{ID} = \alpha\cdot\overrightarrow{AH_1}$, cu $\alpha > 0$; obţinem că $\overrightarrow{IH_1}(1-\lambda) = (\lambda-\alpha)\overrightarrow{H_1A}$.

(i) Dacă $\lambda \neq 1$, atunci $\overrightarrow{IH_1} = \beta\overrightarrow{H_1A}$, cu $\beta = \dfrac{\lambda-\alpha}{1-\lambda}$, prin urmare $I \in AH_1$. Cum bisectoarea şi înălţimea din A se suprapun, triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$.

(ii) Dacă $\lambda = 1$, atunci $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA}$. Rezultă că $AFIE$ este paralelogram, cu $m(\widehat{AFI}) = 90°$ şi $AI \perp FE$. Astfel, $AFIE$ este chiar pătrat, adică $m(\widehat{A}) = 90°$.

II. $m(\widehat{BAC}) > 90°$. Procedăm ca în cazul I(i), doar că $\lambda > 1$, fapt care nu deranjează.

Soluţia 3 (Nicuşor Zlota). Alegem sistemul de coordonate complexe în plan pentru care cercul înscris în triunghiul ABC este cerc unitate. Avem $D\,(a)$, $E\,(b)$, $F\,(c)$, cu $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ distincte şi $|a| = |b| = |c| = 1$. Ecuaţiile laturilor triunghiului ABC sunt:

$$AB:\ z + c^2\overline{z} = 2c, \quad BC:\ z + a^2\overline{z} = 2a, \quad CA:\ z + b^2\overline{z} = 2b.$$

Rezultă că vârfurile triunghiului ABC au, respectiv, coordonatele $A\left(\dfrac{2bc}{b+c}\right)$, $B\left(\dfrac{2ca}{c+a}\right)$, $C\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$. Aceste coordonate sunt bine definite: dacă, de exemplu, $b+c=0$, atunci punctele E, F sunt diametral opuse, astfel că tangentele la cerc în aceste puncte sunt paralele, deci nu se intersectează în A, contradicţie.

Demonstrăm acum următoarele echivalenţe:

$\triangle ABC$ isoscel $\Leftrightarrow$ $a^2 = bc$ (1); $\triangle ABC$ dreptunghic $\Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 = 0$ (2).

Într-adevăr, triunghiul ABC este isoscel ($AB = AC$) dacă şi numai dacă punctul D este mijlocul laturii BC, condiţie echivalentă cu $p - AC = p - AB$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC. Avem $\dfrac{ac}{a+c} + \dfrac{ab}{a+b} = a \;\Leftrightarrow a^2 = bc$, ceea ce demonstrează (1).

Dreptele AB, AC sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{b^2} = 0$, de unde rezultă (2).

Ortocentrul $H(h)$ al triunghiului DEF are afixul $h = a + b + c$, iar înălţimea din A a triunghiului ABC are ecuaţia $z - \dfrac{2bc}{b+c} = a^2\left(\overline{z} - \overline{\dfrac{2bc}{b+c}}\right)$. Punctul H aparţine acestei înălţimi dacă şi numai dacă $h - a^2\overline{h} - \dfrac{2\left(bc-a^2\right)}{b+c} = \dfrac{\left(b^2+c^2\right)\left(bc-a^2\right)}{bc\,(b+c)} = 0$, deci dacă şi numai dacă sunt adevărate (1) sau (2), ceea ce încheie demonstraţia.

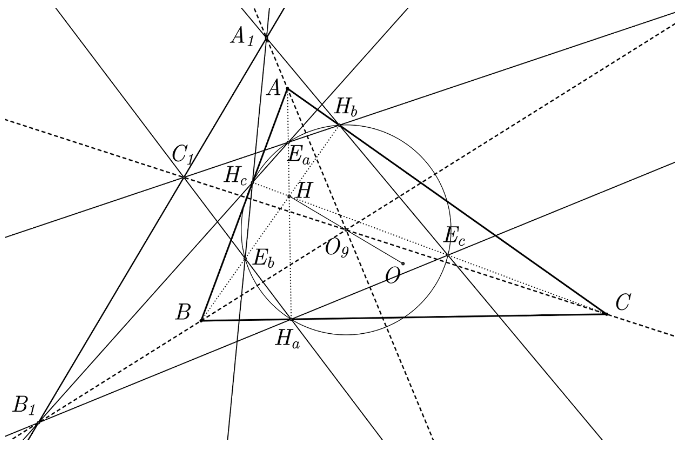
L328. *Fie ABC un triunghi oarecare şi H ortocentrul său. Notăm cu E_a mijlocul segmentului AH şi cu H_a proiecţia punctului H pe latura BC; analog se introduc punctele E_b, H_b, E_c, H_c. Notăm $\{A_1\} = E_bH_c \cap E_cH_b$, $\{B_1\} = E_cH_a \cap E_aH_c$ şi $\{C_1\} = E_aH_b \cap E_bH_a$. Arătaţi că*

a) *dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului dat şi*

b) *punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.*

Petru Braica, Satu Mare

Soluţie (Temistocle Bîrsan).



a) Utilizăm coordonatele baricentrice. Avem: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Se ştie că $H(\mathrm{tg}A, \mathrm{tg}B, \mathrm{tg}C)$ şi $O_9(a\cos(B-C), b\cos(C-A), c\cos(A-B))$. Ca urmare, $H_a(0, \mathrm{tg}B, \mathrm{tg}C)$, $H_b(\mathrm{tg}A, 0, \mathrm{tg}C)$, $H_c(\mathrm{tg}A,\ \mathrm{tg}B, 0)$. Pentru punctele euleriene E_a, E_b, E_c obţinem: $E_a(\mathrm{tg}A(1+\ \mathrm{tg}B\ \mathrm{tg}B),\ \mathrm{tg}B, \mathrm{tg}C))$ etc. Ecuaţia dreptei H_bE_c este dată de

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \mathrm{tg}A & 0 & \mathrm{tg}C \\ \mathrm{tg}A & \mathrm{tg}B & \mathrm{tg}C(1+\ \mathrm{tg}A\ \mathrm{tg}B) \end{vmatrix} = 0,$$

adică

(1) $$\mathrm{tg}C\alpha + \mathrm{tg}^2 A\mathrm{tg}C\beta - \mathrm{tg}A\gamma = 0.$$

La fel, ecuaţia dreptei H_cE_b este

(2) $$\mathrm{tg}B\alpha - \mathrm{tg}A\beta + \mathrm{tg}^2 A\mathrm{tg}B\gamma = 0.$$

Rezolvând sistemul (1)+(2), obţinem coordonatele baricentrice ale punctului A_1, anume

$$A_1(\mathrm{tg}A(1-\mathrm{tg}A\sum\mathrm{tg}A),\ \mathrm{tg}B(1+\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C),\ \mathrm{tg}C(1+\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B)).$$

Faptul că dreapta AA_1 trece prin O_9 revine la a vedea că punctele A, A_1, O_9 sunt coliniare, adică a verifica că determinantul format cu coordonatele baricentrice ale acestor puncte este nul, ceea ce se face uşor. Analog, se arată că BB_1 şi CC_1 trec prin O_9.

b) Cunoscând coordonatele baricentrice ale punctelor A_1, B_1, C_1, putem stabili coliniaritatea lor arătând că determinantul coordonatelor lor este nul. De altfel, coliniaritatea rezultă şi direct, prin aplicarea teoremei lui Pascal la hexagonul $H_1E_cH_bE_aH_cE_b$ înscris în cercul lui Euler.

Notă. Am primit încă o soluţie, din partea d-lui **Marius Olteanu**.

L329. *Dacă w_a, w_b şi w_c sunt lungimile bisectoarelor unui triunghi ABC, demonstraţi că*

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Marius Drăgan, Bucureşti

Soluţie. Avem că $w_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$. Se arată uşor că tripletele $(a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b))$ şi $\left(\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}, \dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}, \dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$ sunt la fel ordonate. Folosind inegalitatea lui Cebîşev, obţinem:

$$\sum\frac{a}{w_a} = \sum\frac{a}{\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{2abc}\sum\frac{a^2(b+c)}{\cos\frac{A}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2abc}\cdot\frac{1}{3}\sum a^2(b+c)\cdot\sum\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\geq\sum\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}.$$

(La ultimul pas, am folosit faptul că $\sum a^2(b+c)\geq 6abc$, după cum reiese uşor din inegalitatea mediilor.) Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Notă (a autorilor). Această inegalitate este o rafinare a problemei 11945 din *American Mathematical Monthly*, care spune că $\frac{a}{w_a}+\frac{b}{w_b}+\frac{c}{w_c}\geq 2\sqrt{3}$.

Notă. Soluţii asemănătoare am primit din partea d-lor **Neculai Roman**, **Marius Olteanu**, **Marian Chirciu** şi **Ioan Viorel Codreanu**. Într-o manieră diferită, a mai rezolvat problema d-l **Titu Zvonaru**.

L330. *Cu notaţiile uzuale într-un triunghi, arătaţi că* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{p^2}{9r^2}$.

Marin Chirciu, Piteşti

Soluţie (Neculai Roman). Este cunoscută inegalitatea $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\leq\frac{R}{r}$ (V. Băndilă, C:474 în Gazeta Matematică 2/1985). Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $a\geq b\geq c$; folosind inegalitatea rearanjărilor, obţinem: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=a\cdot\frac{1}{b}+b\cdot\frac{1}{c}+c\cdot\frac{1}{a}\leq a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{a}=1+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\leq 1+\frac{R}{r}$.

În continuare, arătăm că $1+\frac{R}{r}\leq\frac{p^2}{9r^2}\Leftrightarrow 9r^2+9Rr\leq p^2$. Cum $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$, $ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr$ şi $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, obţinem că $p^2\geq 3r^2+12Rr$, prin urmare $p^2\geq 3r^2+9Rr+3Rr\geq 3r^2+9Rr+6r^2=9r^2+9Rr$, ceea ce încheie soluţia problemei.

Notă. În aceeaşi manieră rezolvă problema d-nii **Marius Olteanu**, **Ioan Viorel Codreanu** şi **Mircea Lascu**: inegalitatea Băndilă-Lascu $\frac{R}{2r}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$ (Gazeta Matematică 4-5/1990) este mai tare decât inegalitatea din enunţ, deoarece $\frac{3R}{2r}\leq\frac{p^2}{9r^2}$ (echivalent cu $2p^2\geq 27Rr$, în C. Coşniţă, F. Turtoiu - *Culegere de probleme de matematică*, Ed. Tehnică, 1968).

Autorul problemei şi d-nii **Corneliu Mănescu-Avram** şi **Nicuşor Zlota** arată că $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3abc}$, apoi dovedesc faptul că $\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3abc}\leq\frac{p^2}{9r^2}$ folosind inegalitatea lui Gerretsen.

Asemănător procedează dl **Marian Cucoaneş**, care însă intercalează între doi membri cantitatea $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

D-nii **Marius Drăgan** şi **Neculai Stanciu** folosesc inegalitatea lui Klamkin $\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\leq\left(\frac{ax+by+cz}{4S}\right)^2$. Luând $x=b$, $y=c$, $z=a$, rezultă că $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{(p^2+r^2+4Rr)^2}{16r^2p^2}$, iar faptul că $\frac{p^2+r^2+4Rr}{4rp}\leq\frac{p}{3r}$ se obţine din inegalitatea lui Gerretsen.

Am mai primit o soluţie calculatorie din partea d-lui **Titu Zvonaru**.

L331. *Demonstraţi că, într-un tetraedru $ABCD$, sunt adevărate inegalităţile:*
a) $\dfrac{h_a-\alpha r}{h_a+\alpha r}+\dfrac{h_b-\alpha r}{h_b+\alpha r}+\dfrac{h_c-\alpha r}{h_c+\alpha r}+\dfrac{h_d-\alpha r}{h_d+\alpha r}\geq 4\cdot\dfrac{4-\alpha}{4+\alpha}$, $\alpha\in[0,3]$;
b) $\dfrac{r_a-\beta r}{r_a+\beta r}+\dfrac{r_b-\beta r}{r_b+\beta r}+\dfrac{r_c-\beta r}{r_c+\beta r}+\dfrac{r_d-\beta r}{r_d+\beta r}\geq 4\cdot\dfrac{2-\beta}{2+\beta}$, $\beta\in[0,1]$.

Nicuşor Zlota, Focşani

Soluţie (Nicuşor Zlota, Ioan Viorel Codreanu). Se ştie că, într-un tetraedru $ABCD$, au loc relaţiile (notaţiile sunt cele uzuale):

$$h_a=\frac{3V}{S_a},r=\frac{3V}{S},r_a=\frac{3V}{S-2S_a},S=\sum S_a$$

a) Observăm că $\sum\dfrac{h_a-\alpha r}{h_a+\alpha r}=\sum\dfrac{S-\alpha S_a}{S+\alpha S_a}=-4+2S\cdot\sum\dfrac{1}{S+\alpha S_a}$. Inegalitatea de demonstrat devine $2S\cdot\sum\dfrac{1}{S+\alpha S_a}\geq\dfrac{32}{4+\alpha}\Leftrightarrow\left(\sum(S+\alpha S_a)\right)\left(\sum\dfrac{1}{S+\alpha S_a}\right)\geq 16$, fapt care reiese conform inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-Schwartz.

b) Analog, $\sum\dfrac{r_a-\beta r}{r_a+\beta r}=\sum\dfrac{S-\beta(S-2S_a)}{S+\beta(S-2S_a)}=-4+2S\cdot\sum\dfrac{1}{S+\beta(S-2S_a)}$. Inegalitatea de demonstrat devine $2S\cdot\sum\dfrac{1}{S+\beta(S-2S_a)}\geq\dfrac{16}{2+\beta}\Leftrightarrow\left(\sum(S+\beta(S-2S_a))\right)\cdot\left(\sum\frac{1}{S+\beta(S-2S_a)}\right)\geq 16$, fapt care reiese aplicând aceeaşi inegalitate C-B-S.

Notă. D-l **Marius Olteanu** foloseşte, în soluţia sa, inegalitatea lui Jensen, fapt care îi permite să observe că inegalitatea de la a) este adevărată pentru $\alpha\in[-2,\infty)$, iar cea de la b) este adevărată pentru $\beta\in[-1,\alpha)$.

L332. *Să se demonstreze că, dacă $a,b,c>0$, este adevărată inegalitatea*

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc+\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (Marius Olteanu, Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota). Cu notaţiile $r=abc$, $u=ab^2+bc^2+ca^2$, $v=a^2b+b^2c+c^2a$, avem

$$(a+b)(b+c)(c+a)=2r+u+v,\ (a-b)(b-c)(c-a)=u-v.$$

Eliminând numitorul, inegalitatea din enunţ devine

$$(*)\qquad (2r+u+v)^2\geq 8r(2r+u+v)+(u-v)^2\Leftrightarrow(u-r)(v-r)\geq 4r^2.$$

Din inegalitatea $MA\geq MG$ avem $u\geq 3r,\ v\geq 3r$, deci $(u-r)(v-r)\geq 2r\cdot 2r=4r^2$, astfel că (*) este adevărată, ceea ce încheie demonstraţia.

L333. *Fie s un număr real din intervalul $[-1,1]$, iar a,b,c,d numere reale astfel încât $\sum a=4s$ şi $\sum a^2=4$. Notăm cu M_s valoarea maximă a expresiei $E=(\sum a)-(\sum abc)$. Determinaţi $\min\{M_s\mid s\in[-1,1]\}$.*

Leonard Giugiuc, Drobeta-Turnu Severin şi Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie (a autorilor)**.** Cum $3(\sum a)^2 \geq 8\sum ab$, rezultă că $\sum ab \leq 6s^2$, prin urmare există $t \geq 0$ pentru care $\sum ab = 6(s^2 - t^2)$. Notăm $\sum abc = 4q$ şi $abcd = p$ şi considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 4sx^3 + 6(s^2 - t^2)x^2 - 4qx + p$. Evident, f este polinomul normat, de grad minim, care admite ca rădăcini numerele a, b, c şi d. Din teorema lui Rolle, polinomul f' are toate rădăcinile reale. Avem:

$$f'(x) = 4\left(x^3 - 3sx^2 + 3(s^2 - t^2)x - q\right);$$

$$f''(x) = 12\left(x^2 - 2sx + (s^2 - t^2)\right) = 12(x - x_1)(x - x_2),$$

unde $x_1 = s - t \leq s + t = x_2$. Cum $f'(-\infty) = -\infty < 0, f'(+\infty) = +\infty > 0$ şi f' are toate rădăcinile reale, rezultă că $f'(x_1) \geq 0$ şi $f'(x_2) \leq 0$. Din $f'(s + t) \leq 0$ deducem că $q \geq (s + t)^2(s - 2t) = -2t^3 - 3st^2 + s^3$. Observăm că, dacă $a = b = c = s + t$ şi $d = s - 3t$, atunci $\sum a = 4s, \sum ab = 6(s^2 - t^2)$ şi $\sum abc = 4(-2t^3 - 3st^2 + s^3)$. În concluzie, $\min q = -2t^3 - 3st^2 + s^3$.

Avem: $\sum a^2 = 4 \Rightarrow 16s^2 - 12(s^2 - t^2) = 4 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1-s^2}{3}}$, deci $(\sum a) - (\sum abc) \leq 4s + 8\left(\frac{1-s^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + 12\cdot\frac{1-s^2}{3} - 4s^3 = 8\left(s - s^3 + (\frac{1-s^2}{3})^{\frac{3}{2}}\right) = M_s$. Rămâne să determinăm minimul acestei expresii, când $s \in [-1, 1]$.

Considerăm funcţia $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, g(s) = s - s^3 + (\frac{1-s^2}{3})^{\frac{3}{2}}$. Atunci $g'(s) = -s\sqrt{\frac{1-s^2}{3}} + 1 - 3s^2$, iar $g'(s) = 0 \Leftrightarrow s\sqrt{\frac{1-s^2}{3}} = 1 - 3s^2$. Observăm că $s^2 \leq \frac{1}{3}$ dacă $0 \leq s \leq 1$ şi $s^2 \geq \frac{1}{3}$ dacă $-1 \leq s \leq 0$. Ridicând la pătrat, obţinem ecuaţia $28s^4 - 19s^2 + 3 = 0$, de unde $s^2 \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{7}\}$. Cum $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3}{7} < 1$, rezultă că $s \in \{\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\}$. Însă $g'(-1) = -2 < 0, g'(0) = 1 > 0$ şi $g'(1) = -2 < 0$, prin urmare $\min g(s) \in \left\{g\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right), g(1)\right\}$. Deoarece $g\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{21}}$ şi $g(1) = 0$, înseamnă că $\min g = -\frac{4}{3\sqrt{21}}$, aşadar $\min\{M_s | s \in [-1, 1]\} = -\frac{32}{3\sqrt{21}}$.

L334. *Determinaţi funcţia monotonă $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, ştiind că $f(0) \in \mathbb{Z}$ şi că există o primitivă $F : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ a lui f astfel încât $F(x - y) - F(x)F(y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cu $x - y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie (Gabriel Popa). Cum f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux, rezultă că f este continuă.

Avem că $F(0) - F^2(0) = f^2(0) \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq F(0) - F^2(0) = F(0)(1 - F(0)) \leq \left(\dfrac{F(0) + 1 - F(0)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, prin urmare $F(0) - F^2(0) = 0$, deci $F(0) \in \{0, 1\}$.

Dacă $F(0) = 0$, rezultă că $f(0) = 0$ şi, pentru $y = x$, $-F^2(x) = f^2(x)$, de unde $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dacă $F(0) = 1$, din nou obţinem că $f(0) = 0$ şi, cum f este monotonă, această funcţie are semn constant pe fiecare dintre intervalele $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ şi $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pe de altă parte, pentru $x = 0$ în relaţia din enunţ, obţinem că $F(-y) = F(y)$, de unde, prin derivare, $f(-y) = -f(y)$, adică F este pară şi f este impară. Astfel, este suficient să determinăm funcţia f pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Cu aceste precizări, să revenim la cazul în discuţie şi să distingem două subcazuri: 1. $F(x) = 1$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi 2. există $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât $F(t) < 1$. Evident, primul subcaz conduce la soluţia $f(x) = 0$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obţinută şi mai sus. În cel de-al doilea, aplicând teorema creşterilor finite funcţiei F pe intervalul $[0, t]$, obţinem $1 - F(t) = -tf(c_t)$, cu $c_t \in (0, t)$ şi deducem că $f(c_t) < 0$. Ca urmare, f are valori negative sau nule pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ şi este descrescătoare pe acest interval.

Fie $A = \left\{x \in [0, \frac{\pi}{2}];\ f(x) = 0\right\}$ şi $\alpha = \sup A$; din continuitatea lui f, avem că $f(\alpha) = 0$, iar $f(x) < 0$, $\forall x \in (\alpha, \frac{\pi}{2}]$, aşadar $F(x) < 1$, $\forall x \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$.

Luăm $y = x$ în egalitatea din enunţ şi găsim că $f^2(x) = 1 - F^2(x)$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pentru $x > \alpha$, avem: $-f(x) = \sqrt{1 - F^2(x)} \Rightarrow \dfrac{-f(x)}{\sqrt{1 - F^2(x)}} = 1 \Rightarrow (\arccos F(x))' = 1 \Rightarrow F(x) = \cos(x + c)$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = -\sin(x + c)$, $c \in \mathbb{R}$; prin urmare $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \alpha] \\ -\sin(x + c), & x \in (\alpha, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$. Din continuitatea lui f în $x = \alpha$ şi faptul că f ia valori negative pe $(\alpha, \frac{\pi}{2}]$, deducem că $c = -\alpha + 2k\pi$, $c \in \mathbb{Z}$. Aşadar, avem:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \alpha] \\ -\sin(x - \alpha), & x \in (\alpha, \frac{\pi}{2}] \end{cases}, F(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \alpha] \\ -\cos(x - \alpha), & x \in (\alpha, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Dacă $\alpha > 0$, în relaţia din enunţ luăm $x = y + \frac{\alpha}{n}$ cu $y \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$ şi n suficient de mare astfel încât $y + \frac{\alpha}{n} < \frac{\pi}{2}$. Obţinem că $F(\frac{\alpha}{n}) = F(y + \frac{\alpha}{n})F(y) + f(y + \frac{\alpha}{n})f(y) \Leftrightarrow 1 = \cos(y + \frac{\alpha}{n})\cos y + \sin(y + \frac{\alpha}{n})\sin y \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha}{n} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$, contradicţie. Rămâne că $\alpha = 0$, deci $f(x) = -\sin x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi, din imparitate, $f(x) = -\sin x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

În concluzie, ecuaţia funcţională din enunţ admite două soluţii: $f_1(x) = 0$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi $f_2(x) = -\sin x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Notă. Am primit o soluţie parţială din partea d-lui **Marius Olteanu**.

L335. *Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care*

$$f(f(f(x))) - f(f(x)) - f(x) - 2x = 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie (a autorului)**.** Orice asemenea funcţie este evident injectivă; vom demonstra că este şi surjectivă. Într-adevăr, fie $m = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ şi fie (x_n) un şir de numere reale astfel încât şirul $(f(x_n))$ este convergent la m. Să presupunem $m \in \mathbb{R}$. Rezultă, din continuitatea lui f, că $\lim\limits_{n\to\infty} f(f(x_n)) = f(m)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(f(f(x_n))) = f(f(m))$. Din ecuaţia funcţională (scrisă pentru fiecare x_n) rezultă că (x_n) este convergent, iar dacă x este limita sa, vom obţine $m = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Acest rezultat contrazice însă monotonia strictă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$, care rezultă din continuitate şi injectivitate. Contradicţia arată că m nu poate fi finit şi, analog, demonstrăm că supremumul lui f este infinit. Cum f este continuă, strict monotonă şi cu marginile pe $\mathbb{R}$ infinite, deducem că este surjectivă.

Notăm, mai departe, cu $f^{[n]}$ a $n-$a compunere iterată a lui f (adică $f^{[n]} = f\circ\ldots\circ f$, unde f apare de n ori), cu $f^{[0]}$ funcţia identică şi cu $f^{[-n]}$ a $n-$a compunere iterată a inversei lui f (se poate, f fiind bijectivă).

După cum deja am spus, orice soluţie continuă a ecuaţiei funcţionale din enunţ trebuie să fie strict monotonă. Arătăm că nu poate fi strict descrescătoare. Într-adevăr, dacă f verifică ecuaţia din enunţ, trebuie să verifice şi

$$f^{[4]}(x) - f^{[3]}(x) - f^{[2]}(x) - 2f(x) = 0$$

(care se obţine înlocuind x cu $f(x)$ în ecuaţia iniţială), deci şi

$$f^{[4]}(x) - 2f^{[3]}(x) - f(x) + 2x = 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (obţinută scăzând ecuaţia iniţială din precedenta). Dar asta nu se poate, deoarece f strict descrescătoare implică $f^{[n]}$ strict descrescătoare (respectiv strict crescătoare), după cum n este impar (respectiv par), adică egalitatea de mai sus ar fi între o funcţie strict descrescătoare şi funcţia identic nulă, imposibil. Rămâne, atunci, că f este strict crescătoare.

Egalitatea

$$f^{[n]}(x) = \frac{1}{7}(x + f(x) + f(f(x))) \cdot 2^n + \frac{1}{7}(6x - f(x) - f(f(x))) \cdot \cos\frac{2n\pi}{3} +$$

$$+\frac{1}{7\sqrt{3}}(2x + 9f(x) - 5f(f(x))) \cdot \sin\frac{2n\pi}{3}$$

se verifică prin inducţie pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in \mathbb{R}$. Tot inductiv, înlocuind mereu x cu $f^{-1}(x)$, rezultă valabilitatea acestei egalităţi şi pentru oricare n întreg negativ (şi orice $x \in \mathbb{R}$).

Să mai remarcăm că ecuaţia funcţională dată se mai poate scrie şi în forma

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) + f(x) = 2(f(f(x)) + f(x) + x),$$

sau $g(f(x)) = 2g(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$, unde $g = f^{[2]} + f^{[1]} + f^{[0]} = f^{[2]} + f + 1_{\mathbb{R}}$. Inductiv (în ambele sensuri) rezultă de aici că $g(f^{[n]}(x)) = 2^n g(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Asta înseamnă că, pentru x fixat (dar, altminteri, arbitrar), avem $\lim\limits_{n\to-\infty}(g(f^{[n]})(x)) = 0$.

E clar că g este tot o funcţie continuă, strict crescătoare şi cu limita ∞ la ∞ (respectiv $-\infty$ la $-\infty$), deci şi bijectivă; obţinem $\lim\limits_{n\to-\infty} f^{[n]}(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Examinând însă expresia lui $f^{[n]}$, vedem că asta conduce la convergenţa şirului cu termenul general

$$\frac{1}{7}(6x - f(x) - f(f(x))) \cdot \cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{7\sqrt{3}}(2x + 9f(x) - 5f(f(x))) \cdot \sin\frac{2n\pi}{3}$$

pentru $n \to -\infty$. Aceasta însă (nu e greu de justificat) nu e posibilă decât dacă

$$6x - f(x) - f(f(x)) = 2x + 9f(x) - 5f(f(x)) = 0,$$

ceea ce implică $f(x) = 2x$. Dar x este arbitrar, deci obţinem o singură soluţie, anume $f(x) = 2x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, care, într-adevăr, verifică ecuaţia funcţională din enunţ.