Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2017

Clasele primare

P387. *Într-o farfurie sunt patru mere şi şapte pere. Se consumă cinci fructe. Pot rămâne pe farfurie patru pere? Justificaţi!*
(*Clasa pregătitoare*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă se consumă 3 pere şi 2 mere, adică 5 fructe, pe farfurie rămân 4 pere.

P388. *Un elev de la clasa pregătitoare observă şi reţine următoarele imagini: un elev intră în curtea şcolii, un copil jucându-se în parc, un elev aşezat în bancă şi un copil privind cerul cu stele. Precizaţi ordinea derulării evenimentelor din aceste imagini într-o zi.*
(*Clasa pregătitoare*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

Soluţie. Ordinea este: un elev intră în curtea şcolii, un elev aşezat în bancă, un copil jucându-se în parc şi un copil privind cerul cu stele.

P389. *O pâine costă* 1 *leu şi* 50 *bani, iar o carte costă cât şase pâini şi jumătate. Cât costă o carte?*
(*Clasa I*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. O jumătate de pâine costă jumătate dintr-un leu şi încă jumătate din 50 bani, adică 50 bani + 25 bani = 75 bani. O carte costă 9 lei şi 75 bani.

P390. *O veveriţă duce ghinde la două scorburi vecine. La fiecare transport ea duce trei ghinde. După câte transporturi sunt câte nouă ghinde în fiecare scorbură?*
(*Clasa I*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

Soluţie. $9-3=6$, $6-3=3$, $3-3=0$. Pentru o singură scorbură sunt necesare 3 drumuri, iar pentru ambele scorburi, ververiţa trebuie să facă 6 drumuri.

P391. *Un vehicul se deplasează, pe rând, în următoarele direcţii: înainte, stânga, înapoi, stânga, înainte, dreapta, înainte, stânga ş.a.m.d. Cum se deplasează vehiculul la a treisprezecea schimbare de direcţie?*
(*Clasa I*) **Maria Crăcană, elevă, Iaşi**

Soluţie. După 6 schimbări de direcţie, direcţiile de deplasare se repetă. După a 12-a direcţie de deplasare, vehiculul se deplasează înainte. Deci, la a 13-a schimbare de deplasare, vehiculul se deplasează spre stânga.

P392. *Scrieţi numărul* 55 *utilizând de şase ori cifra* 2.
(*Clasa a II-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $55 = 22 \times 2 + 22 : 2$.

P393. *Arataţi că suma tuturor numerelor formate din două cifre cu suma* 9 *se împarte exact la* 9.
(*Clasa a II-a*) **Mădălina Baciu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Suma numerelor este: $18 + 27 + 36 + 45 + 54 + 63 + 72 + 81$. Această sumă se împarte exact la 9 deoarece fiecare termen se împarte exact la 9.

P394. *Trei fraţi s-au născut la diferenţă de* 1 *an şi* 6 *luni, al doilea faţă de primul cât şi al treilea faţă de al doilea. Peste câţi ani de la naşterea celui de-al doilea copil vor avea, împreună,* 19 *ani şi* 6 *luni?*

(*Clasa II-a*) **Mădălina Apopei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Când s-a născut al treilea copil, primii doi aveau împreună 4 ani şi 6 luni. 19 ani şi 6 luni - 4 ani şi 6 luni = 15 ani. 15 ani : 3 = 5 ani. Peste 5 ani, de la naşterea celui de-al treilea copil, au împreună 19 ani şi 6 luni.

P395. *Arătaţi că numărul* $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ *se împarte exact la* 3.

(*Clasa a III-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$. Deoarece $111 = 3 \cdot 37$, deducem că suma $111a + 111b + 111c$ se împarte exact la 3.

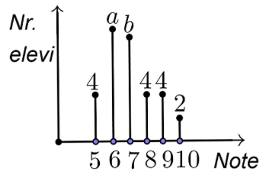
P396. *În şase pungi sunt* 38 *bomboane roşii, verzi, albastre şi portocalii. Ştiind că în fiecare pungă sunt bomboane de toate culorile, să se arate că există cel puţin două pungi cu acelaşi număr de bomboane.*

(*Clasa a III-a*) **Sînziana Huţanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă am avea în fiecare pungă un alt număr de bomboane, atunci $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ ar fi numărul minim de bomboane din toate pungile, fals!

P397. *La un concurs de matematică au participat* 33 *elevi de clasa a III-a. Rezultatele sunt date în graficul cu coloane alăturat. Stabiliţi câţi elevi au luat nota* 6 *sau nota* 7.

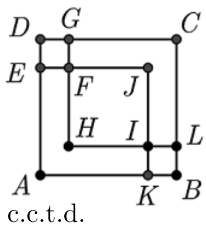
(*Clasa a III-a*) **Gabriela Timofte, elevă, Iaşi**



Soluţie. Numărul elevilor care au luat nota 6 sau nota 7 este $a + b$. Conform graficului, $a + b = 33 - (4 + 4 + 4 + 2) = 19$.

P398. *În configuraţia geometrică alăturată, patrulaterele* $ABCD$, $DEFG$, $FHIJ$, $IKBL$ *sunt pătrate. Arătaţi că suma perimetrelor pătratelor* $DEFG$, $FHIJ$ *şi* $IKBL$ *este egală cu perimetrul pătratului* $ABCD$.

(*Clasa a III-a*) **Adelin Nicolae Bechet, elev, Iaşi**



Soluţie. $AD = KI + IJ + ED \Rightarrow 4AD = 4IJ + 4KI + 4ED$, c.c.t.d.

P399. *Două feţe opuse ale unui cub pot fi acoperite cu pătrate de latură* 1 *cm, alte două feţe opuse pot fi acoperite cu pătrate de latura* 2 *cm, iar celelalte două feţe opuse pot fi acoperite cu pătrate de latură* 3 *cm. Arătaţi că suma lungimilor tuturor muchiilor cubului nu poate fi* 96 *cm.*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Lungimea muchiei cubului este 96 cm : 12 = 8 cm. Cum 8 nu se împarte exact la 3, înseamnă că suma celor 12 muchii nu poate fi 96 cm.

P400. *În clasa a IV-a elevii învaţă* 12 *discipline. La sfârşitul anului şcolar, elevii clasei a IV-a A au avut un total de* 241 *calificative FB anuale, pe discipline, iar cei*

din clasa a IV-a B au avut 239 de calificative FB. Premiul întâi s-a acordat numai elevilor care au avut calificativul FB la toate disciplinele. Care clasă a avut şansa să aibă cele mai multe premii întâi?
(*Clasa a IV-a*) **Bianca Ţugui, elevă, Iaşi**

Soluţie. $241 = 12 \times 20 + 1$, $239 = 12 \times 19 + 11$. Deci, clasa a IV-a A a avut şansa să ia cele mai multe premii întâi (deşi, nu obligatoriu se întâmplă acest lucru: e posibil ca în clasa a IV-a A doar 18 elevi să aibă doar FB, iar celelalte 25 calificative FB să se împartă între ceilalţi elevi ai clasei, în timp ce în IV B să existe 19 elevi numai cu FB).

P401. *Numerele a, b, c şi d îndeplinesc egalităţile $a + b + c + d = 15$ şi $2a + 2b + 4c + d = 30$. Să se arate că $a + b$ se împarte exact la 3.*
(*Clasa a IV-a*) **Cristina Ionela Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem $2a + 2b + 2c + 2d = 2a + 2b + 4c + d$, de unde $d = 2c$. Astfel, $2a + 2b + 4c + d = 2a + 2b + 6c = 30$ şi obţinem $2a + 2b = 30 - 6c$, deci $2(a + b)$ se împarte exact la 3. Concluzionăm că $a + b$ se împarte exact la 3.

P402. *Să se afle numerele naturale a, b, c ştiind că au loc egalităţile: $a+b+c = 48$, $2a - 2b = 2b - c = 2c + b - a$.*
(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $(2a - 2b) + (2b - c) + (2c + b - a) = a + b + c = 48$. Prin urmare, $2a - 2b = 2b - c = 2c + b - a = 16$ şi $a = 22, b = 14, c = 12$.

Clasa a V-a

V.221. *Demonstraţi că fracţia* $\dfrac{3^{2016} + 3^{2017}}{5^{2018}}$ *este ireductibilă.*
Tinuţa Bejan, Iaşi

Soluţie. Descompunând în factori primi numărătorul, el devine $2^2 \cdot 3^{2016}$ şi este evident că numărătorul şi numitorul vor fi numere prime între ele.

V.222. *Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care fracţia* $\dfrac{2n^2 - n + 6}{3n^2 + n + 5}$ *se simplifică prin 17.*
Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, fracţia dată nu se simplifică prin 17. Pentru $n = 5$ fracţia este $\dfrac{51}{85}$ şi se simplifică prin 17.

V.223. *Demonstraţi că nu există numere naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{abc}$ sau cu proprietatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{acb}$, dar există numere $\overline{abc}$ cu proprietatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{bac}$.*
Valeriu Braşoveanu, Bârlad

Soluţie. Egalitatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{abc}$ revine la $\overline{ab}(c - 10) = c$ şi este imposibilă, deoarece $c \leq 9$. Analog, egalitatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{acb}$ se poate scrie sub forma $10a(c-10)+c(b-10) = b$ şi este imposibilă, întrucât $b \leq 9$ şi $c \leq 9$. Egalitatea $\overline{ab} \cdot c = \overline{bac}$ are loc, de exemplu, pentru $\overline{abc} = 216$, când $21 \cdot 6 = 126$.

V.224. *Determinaţi numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c + d = 2017$.*
Cătălin Calistru, Iaşi şi Veronica Huiban, Bârlad

Soluţie. Observăm că numărul $2017 - d$, $d \in \{0, 1, ..., 9\}$ nu admite alţi divizori decât $2, 3$ sau 7. Singura variantă convenabilă este $d = 1$, când $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, prin urmare $\overline{abcd} = 5211$.

V.225. *Prin împărţirea numărului $\overline{ab}$ la un multiplu comun al numerelor a şi b se obţine un cât c egal cu restul, $c \geq 2$. Determinaţi $\overline{ab}$.*

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie n împărţitorul, cu $2 \leq c < n$. Dacă n ar fi impar, atunci $n + 1$ va fi par, deci $\overline{ab}$ va fi par. Obţinem că b trebuie să fie par şi, cum $b|n$, ajungem la o contradicţie. În concluzie, n trebuie să fie par, $n \geq 4$. În plus, $n \leq 48$ (deoarece $c \geq 2$) şi n nu se poate termina în 4 (ar rezulta că $5|\overline{ab}$, deci $5|b$, prin urmare $5|n$, contradicţie). Verificând pentru fiecare n posibil, obţinem soluţiile: $21 = 6 \cdot 3 + 3$, $18 = 8 \cdot 2 + 2$, $22 = 10 \cdot 2 + 2$, $55 = 10 \cdot 5 + 5$, $26 = 12 \cdot 2 + 2$, $42 = 20 \cdot 2 + 2$, $62 = 30 \cdot 2 + 2$, $82 = 40 \cdot 2 + 2$.

V.226. *Demonstraţi că* $\underbrace{44...4}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{88...8}_{n \text{ cifre}} = \underbrace{44...4}_{n-1 \text{ cifre}}3\underbrace{55...5}_{n-1 \text{ cifre}}6$.

Radu Ghenghiu, Oradea

Soluţie. (**Cezar Tulceanu**, elev, Constanţa) Adunând în ambii membri $\underbrace{44...4}_{n \text{ cifre}}$, cele două cantităţi vor fi egale cu $\underbrace{44...4}_{n \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{n \text{ cifre}}$.

V.227. *Se pot ordona numerele $1, 2, 3, ..., 100$ astfel încât suma oricăror zece numere consecutive să se dividă cu 9?*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Preupunem că o astfel de ordonare ar fi posibilă; atunci $(a_1 + ... + a_{10}) + (a_{11} + ... + a_{20}) + ... + (a_{91} + ... + a_{100}) = M_9 + M_9 + ... + M_9 = M_9$. Rezultă că $1 + 2 + ... + 100 = 5050 = M_9$, contradicţie.

Clasa a VI-a

VI.221. *Determinaţi numerele prime p şi q care verifică relaţia $p^3q^3 = p^3 + 3q^3 + 127$.*

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

Soluţie. Relaţia din enunţ se poate scrie sub forma $(p^3 - 3)(q^3 - 1) = 130$, de unde $p = 2$ şi $q = 3$.

VI.222. *Numerele raţionale pozitive x, y, z, t sunt astfel încât $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{2+y} = \frac{z}{3+z} = \frac{t}{4+t}$ şi $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} + \frac{4}{t} = \frac{1}{6}$. Calculaţi $4x + 3y + 2z + t$.*

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Soluţie. În prima relaţie, inversăm rapoartele şi extragem întregii; obţinem că $1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z} = 1 + \frac{4}{t}$, de unde $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z} = \frac{4}{t} = \frac{1}{6} : 4 = \frac{1}{24}$. Deducem că $x = 24$, $y = 48$, $z = 72$, $t = 96$, prin urmare $4x + 3y + 2z + t = 480$.

VI.223. *Trei numere naturale x, y şi z nu au niciun factor prim comun şi satisfac relaţia* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. *Arătaţi că $x + y$ este pătrat perfect.*

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Dacă $d = (x, y)$, atunci $x = da$, $y = db$, cu $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Cum x, y şi z nu au niciun factor prim comun, rezultă că $(d, z) = 1$. Relaţia din enunţ devine $\frac{1}{da} + \frac{1}{db} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{d}{z}$. Deoarece $(d, z) = (a, b) = 1$, ambele fracţii sunt ireductibile; deducem că $a + b = d$, $ab = z$. În aceste condiţii, $x + y = da + db = d(a + b) = d^2$, deci $x + y$ este pătrat perfect.

VI.224. *Demonstraţi că fracţia* $F = \frac{31^{2017} - 5}{31^{2017} - 18}$ *este reductibilă.*

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Întrucât $F = 1 + \frac{13}{31^{2017} - 18}$, fracţia F este reductibilă dacă şi numai dacă 13 divide $31^{2017} - 18$. Avem: $31^{2017} = (26+5)^{2017} = M_{13} + 5^{2017} = M_{13} + 5 \cdot (26 - 1)^{1008} = M_{13} + 5 \cdot (M_{13} + 1) = M_{13} + 5$, prin urmare $31^{2017} - 18 = M_{13} + 5 - 18 = M_{13}$.

VI.225. *Determinaţi numerele naturale x, y şi z pentru care $2018^x - y^{2018} = 2017^z$.*

Cecilia Deaconescu, Piteşti şi Radu Deaconescu, student, Piteşti

Soluţie. Observăm că $2017^z = (M_4 + 1)^z = M_4 + 1$, $\forall z \in \mathbb{N}$ şi $2018^x = M_4$, $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; rezultă că, pentru $x \geq 2$, $y^{2018} = M_4 - (M_4 + 1) = M_4 + 3$, contradicţie ($y^{2018}$ este pătrat perfect!). Astfel, ecuaţia din enunţ nu are soluţii cu $x \geq 2$.

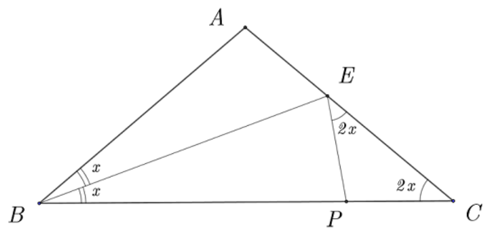
Dacă $x = 0$, ecuaţia devine $2017^z + y^{2018} = 1$, cu unica soluţie $y = z = 0$. Dacă $x = 1$, ecuaţia devine $2017^z + y^{2018} = 2018$ şi nu are soluţii pentru $z \geq 2$. Dacă $z = 0$, obţinem că $y^{2018} = 2017$, fals, iar dacă $z = 1$ obţinem că $y^{2018} = 1$, deci $y = 1$.

În concluzie, tripletele convenabile sunt $(0, 0, 0)$ şi $(1, 1, 1)$.

VI.226. *În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, se consideră bisectoarea $BE, E \in AC$ şi punctul P pe segmentul BC astfel încât $PE = PC$. Ştiind că triunghiul BEP este isoscel, determinaţi măsura unghiului $\widehat{ABC}$.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Notăm $x = m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBE})$; atunci $m(\widehat{C}) = m(\widehat{ABC}) = 2x$, $m(\widehat{PEC}) = m(\widehat{C}) = 2x$, $m(\widehat{EPB}) = m(\widehat{C}) + m(\widehat{PEC}) = 4x$, $m(\widehat{PEB}) = 180° - m(\widehat{EPB}) - m(\widehat{CBE}) = 180° - 5x$. Cum triunghiul BEP este isoscel şi $m(\widehat{EBP}) < m(\widehat{EPB})$, există două situaţii: (i) $x = 180° - 5x \Rightarrow x = 30°$ şi (ii) $4x = 180° - 5x \Rightarrow x = 20°$. În concluzie, măsura unghiului $\widehat{ABC}$ este fie $60°$, fie $40°$.

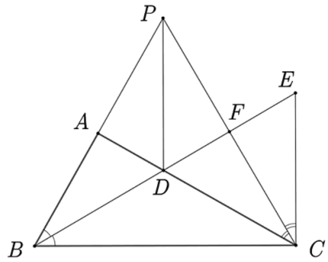


VI.227. *Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ intersectează latura AC în D şi perpendiculara în C pe BC în E. Bisectoarea*

unghiului $\widehat{ACE}$ intersectează dreapta AB în P. Dacă $AD + DP = AB$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{B}$.

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Notăm $\alpha = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$. Cum $m(\widehat{ACE}) = 90° - m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{B}) = 2\alpha$, deducem că $m(\widehat{ACP}) = m(\widehat{PCE}) = \alpha$. Dacă $\{F\} = BE \cap CP$, atunci $m(\widehat{BFC}) = 180° - \alpha - (\alpha + m(\widehat{ACB})) = 180° - m(\widehat{B}) - m(\widehat{ACB})) = 90°$; rezultă că BF este înălţime în $\triangle PBC$. Însă CA este, de asemenea, înălţime, prin urmare D este ortocentrul $\triangle PBC$. Obţinem că $PD \perp BC$, deci $PD \| CE$, de unde $m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{PCE}) = \alpha$. Astfel, $\triangle DPC$ este isoscel cu $DP = DC$. Condiţia $AD + DP = AB$ devine $AC = AB$, aşadar $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel, cu $m(\widehat{B}) = 45°$.



Clasa a VII-a

VII.221. *Un program lucrează cu triplete de numere naturale şi face două operaţii:*
I. transformă tripletul (a, b, c) în $(a + 1, b + 1, c + 1)$;
II. transformă tripletul (a, b, c) în $(a + 1, b + 3, c + 5)$.
Este posibil ca, plecând de la tripletul $(1, 2, 3)$, să se obţină, după un număr de paşi, un triplet de forma (x, y, y)?

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Notăm cu a numărul operaţiilor de tip I şi cu b numărul operaţiilor de tip II care se efectuează; se obţine, plecând de la $(1, 2, 3)$, tripletul $(1 + a + b, 2 + a + 3b, 3 + a + 5b)$. Este evidnt că $2 + a + 3b < 3 + a + 5b$, $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, deci răspunsul la întrebarea problemei este negativ.

VII.222. *Fie a, b, c trei numere naturale şi $n = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$. Demonstraţi că $x = \sqrt{2017^n}$ este număr raţional.*

Nicolae Ivăşchescu, Canada

Soluţie. Se observă că $n = (a - b)(b - c)(c - a)$, prin urmare n este număr întreg par (măcar două dintre numerele a, b şi c au aceeaşi paritate). Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $x = 2007^k \in \mathbb{Q}$.

VII.223. *Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $N = (1!)^2 \cdot 1 \cdot 3 + (2!)^2 \cdot 2 \cdot 4 + ... + (n!)^2 \cdot n(n + 2)$ este pătrat perfect.*

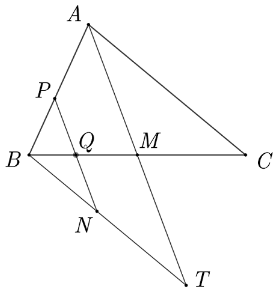
Alessandro Ventullo, Milano

Soluţia 1 (**Matei Dumitrescu**, elev, Iaşi)**.** Toţi termenii, încpând cu cel de-al doilea, sunt divizibili cu 4. Astfel, $N = M_4 + 3$, număr care nu poate fi pătrat perfect.

Soluţia 2. Observăm că, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, avem: $(k!)^2 \cdot k \cdot (k + 2) = (k!)^2 \cdot [(k + 1)^2 - 1] = ((k + 1)!)^2 - (k!)^2$. Dând lui k valorile $1, 2, ..., n$ şi sumând, obţinem că $N = ((n + 1)!)^2 - 1$. Cum, evident, $n \geq 1$, înseamnă că N nu poate fi pătrat perfect pentru nicio valoare a lui n.

VII.224. *Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, iar punctele P şi Q se află pe laturile AB, respectiv BC, astfel încât $PQ \parallel AM$. Dacă N este simetricul lui P faţă de Q, demonstraţi că $BN \parallel AC$.*

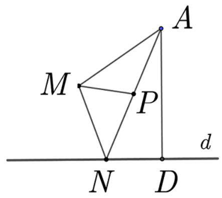
Gheorghe Iurea, Iaşi



Soluţie. Notăm $\{T\} = BN \cap AM$. Cum Q este mijlocul lui PN şi $PN \| AT$, rezultă că M este mijlocul lui AT. Deducem că $ABTC$ este paralelogram, prin urmare $BN \| AC$.

VII.225. *Se consideră punctul A, dreapta d care nu trece prin A şi notăm cu D proiecţia lui A pe d. Arătaţi că, oricare ar fi punctul M din plan şi oricare ar fi N pe dreapta d, este adevărată inegalitatea $2(MA^2 + MN^2) \geq AD^2$.*

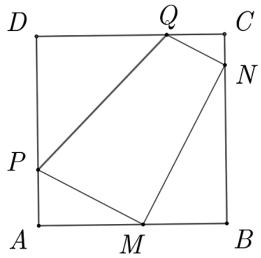
Constantin Petrea, Paşcani



Soluţie. Fie P mijlocul segmentului AN; din teorema medianei, $2(MA^2 + MN^2) = 4MP^2 + AN^2 \geq AN^2 \geq AD^2$. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă M este mijlocul segmentului AD, iar N coincide cu D.

VII.226. *Pe laturile AB şi BC ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $BM \neq BN$. Perpendiculara în M pe MN intersectează latura AD în P, iar perpendiculara în N pe MN intersectează latura CD în Q. Ştiind că triunghiul DPQ este isoscel, arătaţi că $\mathcal{P}_{BMN} = \mathcal{P}_{AMP} + \mathcal{P}_{CNQ}$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti



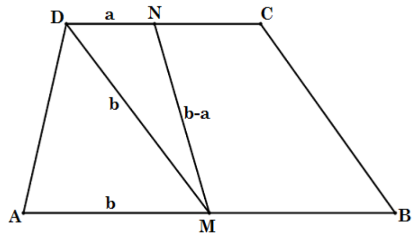
Soluţie. Este evident că $\widehat{AMP} = \widehat{BNM} \equiv \widehat{CQN}$, prin urmare triunghiurile AMP, BNM şi CQN sunt asemenea. Luăm unitatea de măsură egală cu latura pătratului şi fie $a = BM$, $b = BN$, $a \neq b$. Avem: $\dfrac{AP}{1-a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1-b}{CQ} \Rightarrow AP = \dfrac{a-a^2}{b}$, $CQ = \dfrac{b-b^2}{a}$. Cum $DP = DQ$, rezultă: $AP = CQ \Rightarrow a^2 - a^3 = b^2 - b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+b^2+ab-a-b) = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + ab - a - b = 0$. Din asemănările iniţiale, obţinem că $\mathcal{P}_{AMP} = \dfrac{AM}{BN} \cdot \mathcal{P}_{BMN} = \dfrac{1-a}{b} \cdot \mathcal{P}_{BMN}$ şi $\mathcal{P}_{CNQ} = \dfrac{CN}{MB} \cdot \mathcal{P}_{BMN} = \dfrac{1-b}{a} \cdot \mathcal{P}_{BMN}$. Astfel, $\mathcal{P}_{AMN} + \mathcal{P}_{CNQ} = \left(\dfrac{1-a}{b} + \dfrac{1-b}{a}\right) \cdot \mathcal{P}_{BMN} = \dfrac{a-a^2+b-b^2}{ab} \cdot \mathcal{P}_{BMN} = \dfrac{ab}{ab} \cdot \mathcal{P}_{BMN} = \mathcal{P}_{BMN}$.

Nota redacţiei. Există poziţii ale punctelor M şi N pentru care ipoteza problemei este consistentă: de exemplu, putem considera $a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{8}$, $b = \dfrac{3}{4}$.

VII.227. *Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB = 2b$ şi $CD = 2a$, $b > a$. Punctele M şi N sunt mijloacele bazelor. Dacă $MN = b - a$, arătaţi că unghiul $\widehat{ADB}$ nu poate fi drept.*

Marian Ciuperceanu şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că $AD \perp DB$; atunci $DM = b$, pentru că DM ar fi mediana ipotenuzei în $\triangle DAB$. În triunghiul MND am avea că $DM = b = DN + NM$, ceea ce contrazice inegalitatea triunghiului.



Clasa a VIII-a

VIII.221. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}^2$ ecuaţia $26x^2 + 101y^2 + 100xy - 8x + 4y + 20 = 0$.*

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Ecuaţia se scrie sub forma $(x-4)^2 + (y+2)^2 + 25(x+2y)^2 = 0$ şi, cum $x, y \in \mathbb{R}$, obţinem că $x = 4$, $y = -2$.

VIII.222. *Dacă $n \geq 2$ este un număr natural, arătaţi că*

$$2n\left[\sqrt{4 - \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2}}\right] - \left[\sqrt{4n^2 - 6n + 4}\right] = 2.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Pentru $n \geq 2$ este clar că $2n - 2 < \sqrt{4n^2 - 6n + 4} < 2n - 1$, de unde $2 - \dfrac{2}{n} < \sqrt{4 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{4}{n^2}} < 2 - \dfrac{1}{n}$. Deducem că $[\sqrt{4n^2 - 6n + 4}] = 2n - 2$, respectiv $\left[\sqrt{4 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{4}{n^2}}\right] = 1$ şi egalitatea din enunţ se verifică.

VIII.223. *Fie a, b, c, d patru numere reale pozitive cu $a+b+c+d = 4$. Arătaţi că $\dfrac{bcd}{bcd+bc+cd+db} + \dfrac{acd}{acd+ac+cd+da} + \dfrac{abd}{abd+ab+bd+da} + \dfrac{abc}{abc+ab+bc+ca} \leq 1$.*

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Folosind inegalitatea mediilor $MH \leq MA$, obţinem: $\dfrac{bcd}{bcd+bc+cd+db} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \dfrac{1+d+b+c}{16}$. Scriem încă trei relaţii analoage şi, prin adunarea acestora, găsim inegalitatea din enunţ.

VIII.224. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $abc \geq a+b+c$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}(a+b+c)$.*

Florin Rotaru, Focşani

Soluţie. Folosind ipoteza şi inegalitatea mediilor, avem: $abc \geq a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq \sqrt{3}$. Utilizând inegalitatea lui Bergström şi, din nou, inegalitatea mediilor, obţinem: $\dfrac{a^2}{1} + \dfrac{b^2}{1} + \dfrac{c^2}{1} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = \dfrac{a+b+c}{3} \cdot (a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc} \cdot (a+b+c) \geq \sqrt{3} \cdot (a+b+c)$. Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = \sqrt{3}$.

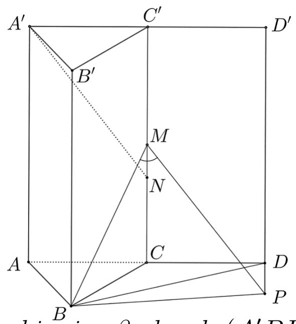
VIII.225. *Determinaţi numerele naturale n pentru care numerele* $\sqrt{2n}$, $\sqrt{2n+1}$, ..., $\sqrt{3n}$ *sunt, toate, iraţionale.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Numerele $\sqrt{2n}, \sqrt{2n+1}, ..., \sqrt{3n}$ sunt, toate, iraţionale atunci când $2n, 2n+1, ..., 3n$ sunt cuprinse între două pătrate perfecte consecutive: există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $m^2 < 2n < 3n < (m+1)^2$, deci $\dfrac{m^2}{2} < n < \dfrac{(m+1)^2}{3}$. Din $\dfrac{m^2}{2} < \dfrac{(m+1)^2}{3}$ deducem că $m^2 - 4m < 2 \Leftrightarrow (m-2)^2 < 6$, deci $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Găsim soluţiile $m \in \{1, 3\}$, apoi $n \in \{1, 5\}$.

VIII.226. *Se consideră prisma triunghiulară regulată* $ABCA'B'C'$ *cu latura bazei de* 6 *cm şi înălţimea de* 12 *cm. Punctele* M *şi* N *se află pe muchia* CC' *astfel încât* $CM = 6$ *cm şi* $CN = 4$ *cm. Determinaţi cosinusul unghiului dintre dreptele* BM *şi* $A'N$.

Gabriela Buzea, Bucureşti



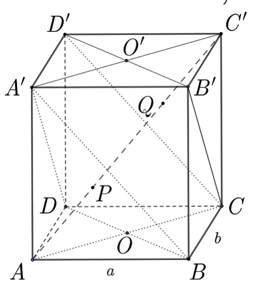
Soluţie. Prelungim AC cu $CD = 6$ cm, $A'C'$ cu $C'D' = 6$ cm şi DD' cu $DP = 2$ cm. Se observă că $A'NPM$ este paralelogram, prin urmare $(\widehat{A'N, BM}) = (\widehat{MP, BM}) = \widehat{BMP}$. Avem: $MP = 10$cm, $BM = 6\sqrt{2}$ cm, $BD = 6\sqrt{3}$ cm (din triunghiul ABD, care este dreptunghic în B), $BP = 4\sqrt{7}$ cm (din triunghiul BDP, dreptunghic în D). Folosind teorema cosinusului în triunghiul MBP, obţinem $\cos \widehat{BMP} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

VIII.227. *Fie* $ABCDA'B'C'D'$ *un paralelipiped dreptunghic şi* α, β *planele* $(A'BD)$, *respectiv* $(CB'D')$. *Să se arate că:*

a) $d(\alpha, \beta) = d(A, \alpha) = d(C', \beta)$;

b) $ABCDA'B'C'D'$ *este cub dacă şi numai dacă* $d(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{3} AC'$ *(cu* $d(\alpha, \beta)$ *s-a notat distanţa dintre planele* α *şi* β*).*

Temistocle Bîrsan, Iaşi



Soluţie. Fie O şi O' instersecţiile diagonalelor dreptunghiurilor $ABCD$ şi $A'B'C'D'$. Notăm $\{P\} = AC' \cap \alpha$ şi $\{Q\} = AC' \cap \beta$.

a) Din faptul că $(ACC'A') \cap \alpha = A'O$, rezultă că $\{P\} = AC' \cap A'O$. Analog, $\{Q\} = AC' \cap CO'$. În dreptunghiul $ACC'A'$ avem $OP \| CQ$ şi $OA \equiv OC$, deci $AP \equiv PQ$. Analog stabilim că $C'Q \equiv QP$. Obţinem că $AP = PQ = C'Q = \frac{1}{3}AC'$. Aceste egalităţi şi faptul că $\alpha \| \beta$ conduc la $d(A, \alpha) = d(\alpha, \beta) = d(C', \beta)$.

b) Să calculăm mai întâi $d = d(\alpha, \beta)$. În acest scop, calculăm în două moduri volumul V al piramidei tridreptunghice $ABDA'$; obţinem:

$$V = \frac{abc}{6} = \frac{1}{3} S_{A'BD} \cdot d \quad (a, b, c \text{ fiind muchiile paralelipipedului}).$$

Cum laturile triunghiului $A'BD$ se calculează uşor cu teorema lui Pitagora: $BD^2 = a^2+b^2$, $A'D^2 = b^2+c^2$ şi $A'B^2 = a^2+c^2$, putem utiliza formula lui Heron pentru arie (sub forma $16S^2 = 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$) şi găsim că $2S_{A'BD} = \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. ca urmare,

$$d = \frac{abc}{2S_{A'BD}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub, atunci AC' este perpendiculară pe α şi pe β şi, deci, $d = AP = \frac{1}{3}AC'$. Reciproc, dacă $d = \frac{1}{3}AC'$, urmează că

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2 \Leftrightarrow a=b=c,$$

de unde conchidem că paralelipipedul dreptunghic este cub.

Clasa a IX-a

IX.181. *Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă ale expresiei* $a_1+a_2+\ldots+a_n+(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)$, *când* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *parcurg intervalul* $[0,1]$.

Nguyen Viet Hung, Hanoi

Soluţie. Fixăm $a_2, a_3, \ldots, a_n$ şi gândim expresia din enunţ ca funcţie având variabila a_1: $f(a_1) = [1-(1-a_2)\ldots(1-a_n)]a_1 + (1-a_2)\ldots(1-a_n) + (a_2+\ldots+a_n)$. Dacă $a_2, \ldots, a_n$ sunt toate nule, atunci $f(a_1) = 1$. Dacă măcar unul dintre numerele $a_2, \ldots, a_n$ este nenul, funcţia de gradul întâi $a_1 \mapsto f(a_1)$ are coeficientul dominant pozitiv, deci este strict crescătoare; rezultă că $f(0) \le f(a_1) \le f(1)$. Afirmaţii asemănătoare sunt adevărate dacă înlocuim a_1 cu $a_2, \ldots, a_n$.

Fie $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ expresia din enunţ. Din cele de mai înainte, $F_{\min} = 1$, pentru $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x, 0, \ldots, 0)$ sau permutări, cu $x \in [0,1]$, iar $F_{\max} = n$, pentru $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (1, 1, \ldots, 1)$.

IX.182. *Dacă* x, y *şi* z *sunt numere reale pozitive astfel încât* $xyz \ge 7+5\sqrt{2}$, *arătaţi că* $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge 6$.

Marius Drăgan, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Inegalitatea din enunţ revine la $x^2+y^2+z^2-2(x+y+z) \ge 3$. Cum $3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2$, ar fi suficient să arătăm că $(x+y+z)^2-6(x+y+z)-9 \ge 0$. Această ultimă relaţie este adevărată pentru $x+y+z \ge 3(1+\sqrt{2})$, inegalitate care se verifică în ipoteza problemei: $x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \ge 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = 3(1+\sqrt{2})$. Egalitatea se atinge pentru $x=y=z=1+\sqrt{2}$.

IX.183. *Fie* ABC *un triunghi cu* $m(\widehat{A}) = 60^\circ$. *Dacă* $\frac{AM}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{6}$, *unde* M *este mijlocul lui* BC, *determinaţi măsurile unghiurilor* $\widehat{B}$ *şi* $\widehat{C}$.

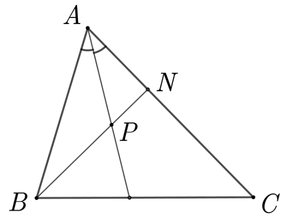
Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

Soluţie. Avem: $\dfrac{AM^2}{BC^2}=\dfrac{21}{36}\Rightarrow\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4a^2}=\dfrac{7}{12}\Rightarrow 5a^2=3(b^2+c^2)$. Din teorema cosinusului, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60°\Rightarrow\dfrac{3}{5}(b^2+c^2)=b^2+c^2-bc\Rightarrow$ $2b^2-5bc+2c^2=0\Rightarrow(2b-c)(b-2c)=0\Rightarrow b=2c$ sau $c=2b$. Dacă $b=2c$, obţinem că $a=c\sqrt{3}$ şi triunghiul ABC va fi dreptunghic, cu $m(\widehat{B})=90°$ şi $m(\widehat{C})=30°$. Dacă $c=2b$, găsim că $m(\widehat{C})=90°$ şi $m(\widehat{B})=30°$.

IX.184. *Fie ABC un triunghi cu unghiul $\widehat{A}$ ascuţit. Bisectoarea din A intersectează înălţimea BN în punctul P. Ştiind că $AP=\dfrac{2}{3}BN$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{A}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

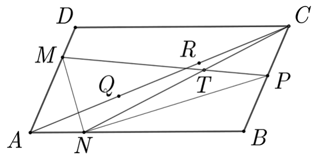
Soluţie. Avem că $BN=c\sin A$, iar $AP=\dfrac{AN}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{c\cos A}{\cos\frac{A}{2}}$. Cu notaţia $t=\sin\frac{A}{2}$, egalitatea din ipoteză devine: $3\cos A=2\cos\frac{A}{2}\sin A\Leftrightarrow 3\cos A=4\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\Leftrightarrow 3(1-2t^2)=4t(1-t^2)\Leftrightarrow 4t^3-6t^2-4t+3=0\Leftrightarrow(2t-1)(2t^2-2t-3)=0$. Deoarece $0<t<1$, convine doar soluţia $t=\frac{1}{2}$, prin urmare $m(\widehat{A})=60°$.



IX.185. *Pe laturile AD, AB şi BC ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele variabile M, N, respectiv P, astfel încât patrulaterele $MTCD$ şi $NBPT$ să aibă arii egale, unde $\{T\}=MP\cap CN$. Determinaţi locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP.*

Cecilia Deaconescu, Piteşti şi Radu Deaconescu, student, Piteşti

Soluţie. Notăm $x=\dfrac{AN}{AB}$, $y=\dfrac{AM}{AD}$ şi $z=\dfrac{BP}{BC}$, cu $x,y,z\in(0,1)$. Avem: $\mathcal{A}_{MTCD}=\mathcal{A}_{NBPT}\Leftrightarrow\mathcal{A}_{ANCD}=\mathcal{A}_{ABPM}\Leftrightarrow(AN+CD)\cdot\text{dist}(AB,CD)=(BP+AM)\cdot\text{dist}(AD,BC)\Leftrightarrow\dfrac{AN+CD}{AB}=\dfrac{BP+AM}{AD}\Leftrightarrow 1+x=y+z$.



Dacă G este centrul de greutate al triunghiului MNP, atunci $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP})=\dfrac{1}{3}(y\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{3}((x+1)\overrightarrow{AB}+(y+z)\overrightarrow{AD})=\dfrac{x+1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{x+1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$. Cum x parcurge intervalul $(0,1)$, $\dfrac{x+1}{3}$ parcurge intervalul $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. În concluzie, locul geometric al punctului G este segmentul QR, unde punctele Q şi R se află pe diagonala AC, astfel încât $AQ=QR=RC$.

Clasa a X-a

X.181. *Dacă $a,b,c\in(1,\infty)$, arătaţi că $\log_{ac^2b}ab+\log_{ba^2c}bc+\log_{cb^2a}ca\geq\dfrac{3}{2}$.*

Florin Rotaru, Focşani

Soluţie. Trecând la logaritmi zecimali, inegalitatea devine $\sum \frac{\lg a+\lg b}{\lg a+2\lg c+\lg b} \geq \frac{3}{2}$. Cu notaţiile $x = \lg a + \lg b$, $y = \lg b + \lg c$, $z = \lg c + \lg a$, $x, y, z > 0$, avem de demonstrat că $\sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{3}{2}$, care este chiar binecunoscuta inegalitate a lui Nesbitt.

X.182. *Dacă a, b, c sunt numere reale distincte, arătaţi că* $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$.

Alina Tigae şi Carmen Terheci, Craiova

Soluţie. Presupunând, prin absurd, contrariul, rezultă că $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} = \sqrt[3]{a-c}$. Ridicând la puterea a treia, obţinem că $a - c + 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)}(\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c}) = a - c$, de unde $3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)} \cdot \sqrt[3]{a-c} = 0$. Deducem că $a = b$ sau $b = c$ sau $c = a$, contradicţie.

X.183. *Dacă n este număr natural nenul dat, determinaţi numerele reale x pentru care* $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} \sin^3 \frac{x}{3^k} = 1 - \frac{\sin x}{4}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Folosind formula $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$, obţinem că $3^{k-1}\sin^3 \frac{x}{3^k} = \frac{1}{4}\left(3^k \sin \frac{x}{3^k} - 3^{k-1} \sin \frac{x}{3^{k-1}}\right)$. Dând lui k valorile $1, 2, ..., n$ şi sumând, obţinem că suma din membrul stâng al ecuaţiei din enunţ are valoarea $\frac{1}{4}\left(3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x\right)$. Astfel, ecuaţia devine $\sin \frac{x}{3^n} = \frac{4}{3^n}$. Pentru $n = 1$, ecuaţia nu are soluţii, iar pentru $n \geq 2$, mulţimea soluţiilor este $\{3^n \arcsin \frac{4}{3^n} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3^n(\pi - \arcsin \frac{4}{3^n}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

X.184. Fie ABC un triunghi, r raza cercului înscris în triunghi şi I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului. Demonstraţi că $AI_a + BI_b + CI_c \geq 18r$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie (Gheorghe Iurea şi Marin Chirciu). Se ştie că $AI_a = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}}$. Folosind inegalitatea mediilor şi binecunoscutele $R \geq 2r$ şi $p \geq 3\sqrt{3}r$, avem:

$$\sum AI_a = \sum \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{r_a r_b r_c}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} =$$

$$= 3\sqrt[3]{4Rr^2} \geq 3\sqrt[3]{4R \cdot 27r^2} \geq 3\sqrt[3]{8r \cdot 27r^2} = 18r.$$

Egalitatea se atinge în cazul triunghiului echilateral.

X.185. *Rezolvaţi ecuaţia* $\left[\frac{2^x - 2015}{2017} - \left[\frac{2^x}{2017}\right]\right] = \log_{2016} \frac{x}{2017}$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

Soluţie. Se impune condiţia $x \in (0, \infty)$. Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$(*) \qquad \left[\left\{\frac{2^x}{2017}\right\} + \frac{2}{2017}\right] - 1 = \log_{2016} \frac{x}{2017}.$$

Cum $\left\{\frac{2^x}{2017}\right\} \in [0, 1)$, cantitatea din membrul stâng poate lua doar valorile -1 sau 0, prin urmare x poate lua doar valorile $\frac{2017}{2016}$ sau 2017. rămâne să verificăm care dintre aceste două numere este soluţie a ecuaţiei.

Dacă $x = \frac{2017}{2016}$, atunci $\frac{2^x}{2017} = \frac{2 \cdot \sqrt[2016]{2}}{2017} < \frac{4}{2017}$, deci $\left[\left\{\frac{2^x}{2017}\right\} + \frac{2}{2017}\right] = 0$ şi relaţia (*) se verifică. Dacă $x = 2017$, vom arăta că (*) nu este adevărată. Într-adevăr, cum 2017 este număr prim, din Mica teoremă a lui Fermat rezultă că $2^{2017} \equiv 2(mod\ 2017)$, deci $\left\{\frac{2^x}{2017}\right\} = \left\{\frac{2^{2017}}{2017}\right\} = \frac{2}{2017} \Rightarrow \left[\left\{\frac{2^x}{2017}\right\} + \frac{2}{2017}\right] = 0$ şi $0 - 1 \neq \log_{2016} 1$.

Clasa a XI-a

XI.181. *Demonstraţi că nu există matrice pătratice A şi B de ordin trei, cu elemente reale, astfel încât* $\det A = \det B = 1$ *şi* $AB^* + BA^* = I_3$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. Dacă $\det A = 1$, atunci $A^* = A^{-1}$; analog, $B^* = B^{-1}$. Atunci $(AB^*)(BA^*) = AB^{-1}BA^{-1} = I_3 = (BA^*)(AB^*)$ şi, cum AB^* şi BA^* au elemente reale, rezultă că $\det[(AB^*)^2 + (BA^*)^2] \geq 0$. Pe de altă parte, $(AB^* + BA^*)^2 = I_3^2 = I_3 \Rightarrow (AB^*)^2 + 2AB^*BA^* + (BA^*)^2 = I_3 \Rightarrow (AB^*)^2 + (BA^*)^2 = -I_3 \Rightarrow \det[(AB^*)^2 + (BA^*)^2] = -1 < 0$. Contradicţia la care am ajuns arată că presupunerea asumată este falsă.

XI.182. *Un romb are latura de lungime a şi diagonalele de lungimi d_1 şi d_2. Demonstraţi că* $\sqrt{(d_1 - 2a)(d_2 - 2a)} \leq a(2 - \sqrt{2})$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Notând $d_1 = 2x$, avem că $d_2 = 2\sqrt{a^2 - x^2}$, iar $(d_1 - 2a)(d_2 - 2a) = 4(x - a)(\sqrt{a^2 - x^2} - a) = f(x)$, unde $f : (0, a) \to \mathbb{R}$. De fapt, problema cere să determinăm valoarea maximă a funcţiei f. Derivata lui f este $f'(x) = 4 \cdot \frac{(a + 2x)\sqrt{a - x} - a\sqrt{a + x}}{\sqrt{a + x}}$ şi observăm că $f'(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, a\right)$. Rezultă că $f_{\max} = f\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 2a^2(3 - 2\sqrt{2})$ şi, de aici, obţinem concluzia problemei.

XI.183. *Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pozitive este definit prin: $x_1 > 1$, $x_{n+1}^2 = x_n \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n$, $\forall n \geq 1$. Determinaţi limita şirului $y_n = \frac{1}{x_n^3} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Folosind inegalitatea lui Bernoulli, avem: $x_{n+1}^2 \geq x_n \left(1 + n \cdot \frac{x_n}{n}\right) = x_n + x_n^2 \geq x_n^2$. Deducem că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, deci are limită; fie l limita sa, $l > 1$ (deoarece $x_1 > 1$ şi şirul creşte). Dacă $l < +\infty$, trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $l^2 = l \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)^n \Rightarrow l = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n} \Rightarrow l = c^l$, ecuaţie care nu are soluţii reale. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Am văzut mai sus că $x_{k+1}^2 \geq x_k + x_k^2$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$; dăm lui k valorile $1, 2, ..., n-1$ şi, înmulţind, găsim că

$$\prod_{k=2}^{n} x_k^2 \geq \prod_{k=1}^{n-1} x_k(1 + x_k) \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot x_n(1 + x_n) \geq x_1^2 \cdot \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n(1 + x_n) \geq x_1^2 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_k}\right) \Rightarrow \frac{1 + x_n}{x_1^2 \cdot x_n^2} \geq \frac{1}{x_n^3} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{x_k}\right).$$

Am obţinut astfel încadrarea $0 < y_n < \dfrac{1 + x_n}{x_1^2 \cdot x_n^2}$. Din teorema cleştelui şi faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

XI.184. *Fie* $\gamma_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$, *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$ *(constanta Euler–Mascheroni). Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma_n - \gamma)\sqrt[n]{(2n-1)!!}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Notăm $x_n = (\gamma_n - \gamma)\sqrt[n]{(2n-1)!!} = n(\gamma_n - \gamma) \cdot \dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$. Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n-1)!!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{(2n-1)!!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \dfrac{2}{e}$. Pe de altă parte, $\lim\limits_{n\to\infty} n(\gamma_n - \gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)(\gamma_n - \gamma_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)\left(\ln\dfrac{n+1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left((n+1)\ln(1 + \frac{1}{n}) - 1\right) = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\frac{x+1}{x}\ln(1+x) - 1}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{(x+1)\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Rezultă că limita cerută în problemă este $\dfrac{2}{e} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{e}$.

XI.185. *Fie* $f(a,b,c,d,p,q,x) = c + p(x-a) + \dfrac{3(d-c) - (b-a)(q+2p)}{(b-a)^2}(x-a)^2 + \dfrac{(b-a)(q+p) - 2(d-c)}{(b-a)^3}(x-a)^3$. *Arătaţi că* $f(a,b,c,d,p,q,x) = f(b,a,d,c,q,p,x)$ *pentru orice numere reale* a, b, c, d, p, q *şi* x.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Funcţia $x \mapsto g(x) = f(a,b,c,d,p,q,x)$ este polinomială de gradul al treilea. Se verifică egalităţile $g(a) = c$, $g'(a) = p$, $g(b) = d$, $g'(b) = q$. Analog, pentru $h(x) = f(b,a,d,c,q,p,x)$ vedem că $h(a) = c$, $h'(a) = p$, $h(b) = d$, $h'(b) = q$. Cum cele patru egalităţi determină unic o funcţie polinomială de gradul al treilea (pentru că se determină unic pe cei patru coeficienţi dintr-un sistem liniar de patru ecuaţii cu patru necunoscute), rezultă că $g(x) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a XII-a

XII.181. *Determinaţi primitivele funcţiei*

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (2x + 3)\ln(x + 1)\ln(x + 2).$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Integrăm prin părţi: $I = \int \left(x^2 + \int (x^2+3x+2)'\ln(x+1) + 3x+2\right)' \ln(x + 1)\cdot\ln(x+2)dx = (x^2+3x+2)\ln(x+1)\ln(x+2) - \int (x+1)(x+2)\left(\frac{\ln(x+2)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+2}\right) dx = (x^2 + 3x + 2)\ln(x + 1)\ln(x + 2) - \int (x + 2)\ln(x + 2)dx - \int (x + 1)\ln(x + 1)dx = (x^2 + 3x + 2)\ln(x + 1)\ln(x + 2) - \frac{(x + 2)^2}{4}(2\ln(x + 2) - 1) - \frac{(x + 1)^2}{4}(2\ln(x + 1) - 1) + \mathcal{C}$.

XII.182. *Determinaţi primitivele funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^4 - 8x^3 + 64x + 65}$, *I fiind un interval pe care numitorul nu se anulează.*

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Se observă că $x^4 - 8x^3 + 64x + 65 = (x - 2)^4 - 24(x - 2)^2 + 145$, iar $x(x-2)(x-4) = ((x-2)^2-4)\cdot\left(\frac{(x-2)^2}{2}\right)'$. Cu schimbarea de variabilă $(x-2)^2 = t$, obţinem integrala asociată

$$\frac{1}{2}\int \frac{t-4}{t^2 - 24t + 145}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t-12}{(t-12)^2 + 1}dt + 4\int \frac{1}{(t-12)^2 + 1}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln((t - 12)^2 + 1) + 4\mathrm{arctg}(t - 12) + \mathcal{C}.$$

În concluzie, $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{4}\ln(x^4 - 8x^3 + 64x + 65) + 4\mathrm{arctg}(x^2 - 4x - 8) + \mathcal{C}$.

XII.183. *Calculaţi* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+\frac{1}{x^2}} t^3 \sin\frac{1}{t}dt.$

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 \sin\frac{1}{t}$. Din teorema de medie, pentru $x > 0$, există $t_x \in (x, x + \frac{1}{x^2})$ astfel încât $\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{x^2}} f(t)dt = \frac{1}{x^2}f(t_x)$. Cum $\displaystyle\lim_{x\to\infty} t_x = \infty$ şi $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{t_x}{x} = 1$, rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2}f(t_x) = \lim_{x\to\infty}\frac{t_x^2}{x^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{t_x}}{\frac{1}{t_x}} = 1$. În concluzie, limita cerută este egală cu 1.

XII.184. *Determinaţi polinoamele cu coeficienţi reali* $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ *care au o rădăcină reală de modul* 2 *şi o rădăcină nereală de modul* 1.

Ioana-Maria Popa, elevă, Iaşi

Soluţie. Fie $x_1 \in \mathbb{R}$, $|x_1| = 2$ şi $x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|x_2| = 1$ două dintre rădăcinile polinomului; a treia rădăcină va fi $x_3 = \overline{x}_2$. Dacă $x_2 = \cos t + i \sin t$, atunci $x_2 + x_3 = 2\cos t$ şi $x_2x_3 = 1$, prin urmare, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului $X^2 - mX + 1$, cu $m = 2\cos t \in [-1, 1]$. Evident că $x_1 \in \{2, -2\}$, deci $f = (X \pm 2)(X^2 - mX + 1)$. Obţinem: $a = -m \pm 2$, $b = 1 \mp 2m$, $c = \pm 2$, cu $m \in [-1, 1]$.

XII.185. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *două matrice pătratice ale căror polinoame minimale sunt relativ prime. Demonstraţi că funcţia* $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $h(X) = AX - XB$ *este un automorfism al grupului* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +)$.

Radu Deaconescu, student, Piteşti şi Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. Polinoamele minimale ale matricelor A şi B fiind relativ prime, polinoamele caracteristice P_A şi P_B vor fi, de asemenea, relativ prime. Rezultă că $\det P_A(B) \neq 0$, prin urmare matricea $P_A(B)$ este inversabilă.

Pentru a arăta că h este bijectivă, plecăm cu $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ oarecare şi trebuie să demonstrăm că există o unică matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AX - XB = Y$. Această ecuaţie matriceală conduce la un sistem liniar de n^2 ecuaţii cu n^2 necunoscute, despre care trebuie să dovedim că are soluţie unică. Matricea Y nu influenţează soluţia unică a acestui sistem (Cramer), deci putem presupune că matricea Y este nulă. Astfel, trebuie să demonstrăm că ecuaţia matriceală $AX = XB$ are soluţie unică. Din $AX = XB$, prin inducţie, obţinem că $A^k \cdot X = XB^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, de unde $P_A(A) \cdot X = X \cdot P_A(B)$. Însă $P_A(A) = O_n$ şi $P_A(B)$ este inversabilă, prin urmare $X = O_n$ este unica soluţie a ecuaţiei $AX = XB$.

Se verifică uşor faptul că $h(X_1 + X_2) = h(X_1) + h(X_2)$, $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ şi, astfel, soluţia este completă.

Recreaţii... matematice

(*Răspuns la problema de la p. 38*)

$$\sqrt[3]{25 + 22\sqrt{2}} + \sqrt[3]{25 - 22\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} = 2$$

$$\sum_{k=3}^{n} \log_a \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \log_a \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n}\right) = \log_a \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\log_a \left(\sqrt[3]{25 + 22\sqrt{2}} + \sqrt[3]{25 - 22\sqrt{2}}\right) - \sum_{k=3}^{n} \log_a \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \log_a 2 - \log_a \left(\frac{2}{n}\right) =$$

$$= \log_a n \ (\textbf{Logan}).$$