În concluzie, polinoamele căutate sunt cele de forma $X^3 - \frac{1}{4}(3n^2+p^2)X + \frac{1}{4}(np^2 - n^3)$, unde $p, n \in \mathbb{Z}$ sunt numere cu aceeaşi paritate.

XII.175. *Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $125 | 2^k + 3^n$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. În inelul $\mathbb{Z}_{125}$, avem: $|U(\mathbb{Z}_{125})| = \varphi(125) = 125\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100$. Vom arăta că ordinul elementului $\widehat{2} \in U(\mathbb{Z}_{125})$ este 100: divizorii naturali ai lui 100 sunt $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, , 50, 100$ şi $\widehat{2}^1 = \widehat{2} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^2 = \widehat{4} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^4 = \widehat{16} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^5 = \widehat{32} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{10} = \widehat{24} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{20} = \widehat{76} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{25} = \widehat{57} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{50} = \widehat{124} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{100} = \widehat{1}$. Rezultă că $\widehat{2}$ este generator al grupului multiplicativ $(U(\mathbb{Z}_{125}), \cdot)$, deci $U(\mathbb{Z}_{125}) = \{\widehat{2}, \widehat{2}^2, \ldots, \widehat{2}^{100}\}$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$; cum $(3, 5^3) = 1$, deducem că $(-3^n, 5^3) = 1$, prin urmare $-\widehat{3}^n \in U(\mathbb{Z}_{125})$ şi atunci există $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ astfel încât $\widehat{2}^k = -\widehat{3}^n$. De aici, urmează concluzia problemei.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2016

A. Nivel gimnazial

G306. *Arătaţi că ecuaţia $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2016}$ are soluţii în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Notăm $a = 2016$; atunci $1 + \frac{1}{2016} = \frac{a+1}{a} = \frac{3a+3}{3a} = \frac{3a+3}{3a+2} \cdot \frac{3a+2}{3a+1} \cdot \frac{3a+1}{3a} = \left(1 + \frac{1}{3a+2}\right)\left(1 + \frac{1}{3a+1}\right)\left(1 + \frac{1}{3a}\right)$, deci putem considera $x = 3a$, $y = 3a+1$, $z = 3a+2$.

G307. *Determinaţi numerele naturale n pentru care $a = 2^n + 4^n + 8^n + 107^n$ este pătrat pefect.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Dacă $n = 0$, atunci $a = 2^2$; dacă $n = 1$, atunci $a = 11^2$. Vom arăta că $n = 0$ şi $n = 1$ sunt singurele soluţii.

Dacă $n \geq 3$ este impar, atunci $a = M_4 + M_4 + M_4 + (M_4 + 3) = M_4 + 3$, număr care nu poate fi pătrat perfect. Dacă $n \geq 2$ este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $(107^k)^2 < a < (107^k + 1)^2$. Inegalitatea din stânga este evidentă, iar cea din dreapta revine la $2^{2k} + 4^{2k} + 8^{2k} < 2 \cdot 107^k + 1$. Avem: $2 \cdot 107^k + 1 > 84^k = (64 + 16 + 4)^k > 64^k + 16^k + 4^k = 8^{2k} + 4^{2k} + 2^{2k}$. Cum a este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, rezultă că a nu este pătrat perfect.

G308. *Scrieţi numărul 3064^{3064} ca sumă de cuburi perfecte cu număr minim de termeni.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Avem: $3064^{3064} = 3064^{3063} \cdot 3064 = 3064^{3063}(10^3 + 10^3 + 10^3 + 4^3) = (3064^{1021} \cdot 10)^3 + (3064^{1021} \cdot 10)^3 + (3064^{1021} \cdot 10)^3 + (3064^{1021} \cdot 4)^3$. Dovedim că nu există scrieri cu mai puţin de patru termeni. Un cub perfect dă, la împărţirea prin 9, unul dintre resturile $0, 1$ sau 8. Adunând cel mult trei cuburi perfecte, suma nu poate da rest 4 la împărţirea cu 9. Pe de altă parte, $3064^{3064} \equiv 4^{3064} \equiv 4 \cdot (4^3)^{1021} \equiv 4 (\operatorname{mod} 9)$. Aşadar, numărul minim de termeni din sumă este 4, iar o scriere cu patru termeni a fost găsită.

G309. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $3^a + 4^b = 5^c$.

Andrei George Turcu, elev, Craiova

Soluţie. Fie (a, b, c) soluţie cu $a \neq 0$; reducând ecuaţia modulo 3, obţinem că $(-1)^c = 1$, deci $c = 2x$, $x \in \mathbb{N}$. Ecuaţia devine $(5^x - 2^b)(5^x + 2^b) = 3^a$ şi, de aici, $5^x - 2^b = 3^\alpha$, $5^x + 2^b = 3^\beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha + \beta = a$. Prin adunare, $2 \cdot 5^x = 3^\alpha(1 + 3^{\beta-\alpha})$, adică $\alpha = 0$ şi atunci $5^x - 2^b = 1$, $5^x + 2^b = 3^a$. Scăzând aceste egalităţi deducem că $2^{b+1} = 3^a - 1$. Dacă $b = 0$, am avea $a = 1$, fals. Dacă $b \geq 1$, reducând ecuaţia modulo 4, rezultă că $a = 2y$. Ultima relaţie devine $3^{2y} - 1 = 2^{b+1} \Leftrightarrow (3^y - 1)(3^y + 1) = 2^{b+1}$, de unde $3^y - 1 = 2^m$, $3^y + 1 = 2^n$, cu $m < n$, $m + n = b + 1$. Scăzând, deducem că $2^n - 2^m = 2 \Leftrightarrow 2^m(2^{n-m} - 1) = 2$, prin urmare $m = 1$, $n = 2$, $y = 1$. Obţinem soluţia $a = b = c = 2$.

Dacă $a = 0$, ecuaţia devine $1 + 4^b = 5^c$, deci $c \neq 0$. Dacă $c = 1$, atunci $b = 1$. Dacă $c \geq 2$, atunci $(5-1)(5^{c-1} + \ldots + 5 + 1) = 4^b$, aşadar $5^{c-1} + 5^{c-2} + \ldots + 5 + 1 = 4^{b-1}$. Pentru c impar, obţinem imediat o contradicţie. Dacă c este par, $c = 2z$, $z \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia devine $1 + 4^b = 5^{2z} \Leftrightarrow (5^z - 1)(5^z + 1) = 4^b$. Ca mai sus, $5^z - 1 = 2^u$, $5^z + 1 = 2^v$, cu $u < v$, $u + v = 2b$; prin scădere, $2 = 2^v - 2^u$, de unde $v = 2$, $u = 1$ şi $2b = 3$, imposibil.

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $(2, 2, 2)$ şi $(0, 1, 1)$.

G310. *Dacă pătratul numărului natural nenul* x *se poate scrie sub forma* $x^2 = 3y^2 + 3y + 1$, $y \in \mathbb{N}^*$, *atunci* x *este sumă de două pătrate perfecte consecutive.*

Marius Drăgan, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Relaţia din enunţ se poate scrie sub forma $3(2x-1)(2x+1) = (6y+3)^2$. Numerele $2x - 1$ şi $2x + 1$ fiind relativ prime, rezultă că există $m, n \in \mathbb{N}$ pentru care (i) $2x + 1 = m^2$, $2x - 1 = 3n^2$ sau (ii) $2x + 1 = 3m^2$, $2x - 1 = n^2$. Cazul (i) conduce la $m^2 - 3n^2 = 2$, egalitate imposibilă modulo 3; rămân adevărate (ii), prin urmare $x = \dfrac{n^2 + 1}{2}$, cu n impar (pentru că $x \in \mathbb{N}$). Deoarece $\dfrac{n^2+1}{2} = \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$, rezultă concluzia problemei.

Observăm că problema are obiect: de exemplu, $x = 13$ are proprietatea din enunţ (luând $y = 7$).

G311. *Fie* x, y, z *numere reale pozitive astfel încât* $xyz = x+y+z+2$. *Demonstraţi că*

$$3 + \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \geq 3\sqrt[3]{xyz}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Condiţia din ipoteză poate fi scrisă sub forma $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1} = 1$, de unde $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{z}{z+1}$, prin urmare $1 + \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{z(x+1)}{z+1}$. Două relaţii similare se mai pot obţine; adunându-le pe toate trei şi aplicând inegalitatea mediilor pentru membrul drept, rezultă chiar inegalitatea cerută.

G312. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstraţi că*

$$\frac{a+b-c}{3ab-bc-ac} \geq \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{abc}.$$

Răzvan Morariu, elev, Iaşi

Soluţie. Scriem inegalitatea din enunţ sub forma

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \geq \frac{3ab-bc-ac}{abc}. \qquad (*)$$

Avem: $(a+b-c)^2 = (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(3ab-bc-ca) \geq 3ab-bc-ca$, deoarece prima paranteză este nenegativă. Vom mai arăta că $\prod(a+b-c) \leq abc$ şi atunci $(*)$ este adevărată. Cu notaţiile $a = x+y$, $b = x+z$, $c = y+z$,

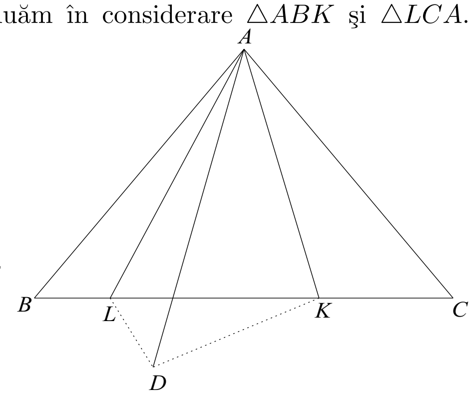
$$\prod(a+b-c) = 8xyz = 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx} \leq \prod(x+y) = abc$$

şi, cu aceasta, soluţia este completă. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$.

G313. *Punctele L şi K aparţin ipotenuzei (BC) a triunghiului dreptunghic isoscel ABC astfel încât $L \in (BK)$. Demonstraţi că segmentele (LK) şi $(BL), (KC)$ pot să fie ipotenuza, respectiv catetele unui triunghi dreptunghic dacă şi numai dacă $m(\widehat{LAK}) = 45°$.*

Claudiu-Ştefan Popa şi Doru Buzac, Iaşi

Soluţia 1. Dacă $m(\measuredangle LAK) = 45°$, luăm în considerare $\triangle ABK$ şi $\triangle LCA$. Deoarece $m(\measuredangle ABK) = m(\measuredangle LCA) = 45°$ şi $m(\measuredangle BKA) = m(\measuredangle CAL) = 45° + m(\measuredangle CAK)$, rezultă că cele două triunghiuri sunt asemenea, de unde $\dfrac{AB}{CL} = \dfrac{BK}{AC} \Rightarrow AB\cdot AC = CL\cdot BK \Rightarrow AB^2 = CL\cdot BK$. În $\triangle ABC$ avem relaţiile: $2\cdot AB^2 = BC^2$ şi $BC = BL+LK+KC$, care conduc la $2\cdot CL\cdot BK = (BL+LK+KC)^2 \Leftrightarrow 2(CK+LK)\cdot(BL+LK) = (BL+LK+KC)^2$, de unde, după efectuarea calculelor, se obţine $LK^2 = BL^2+KC^2$. Reciproc, din relaţiile $LK^2 = BL^2+KC^2$ şi $2\cdot AB^2 = (BL+LK+KC)^2$, rezultă $AB^2 = CL\cdot BK \Leftrightarrow AB\cdot AC = CL\cdot BK$, deci $\dfrac{AB}{CL} = \dfrac{BK}{AC}$ şi, cum $m(\measuredangle ABK) = m(\measuredangle LCA) = 45°$, rezultă $\triangle ABK \sim \triangle LCA$, aşadar $m(\measuredangle AKB) = m(\measuredangle LAC)$. Dar $m(\measuredangle AKB) = 45° + m(\measuredangle CAK)$ iar $m(\measuredangle LAC) = m(\measuredangle LAK) + m(\measuredangle CAK)$, de unde rezultă că $m(\measuredangle LAK) = 45°$.



Soluţia 2. Dacă $m(\measuredangle LAK) = 45°$ considerăm segmentul $[AD]$, simetricul segmentului $[AB]$ faţă de dreapta AL. Deoarece $m(\measuredangle BAL) + m(\measuredangle CAK) = 45°$, atunci

$m(\measuredangle BAL) < 45°$, $m(\measuredangle CAK) < 45°$, deci $m(\measuredangle BAL) < m(\measuredangle LAK)$ şi, cum $m(\measuredangle BAL) = m(\measuredangle DAL)$, atunci $m(\measuredangle DAL) < m(\measuredangle LAK)$, de unde $(AD \subset \operatorname{int}(\measuredangle LAK)$. Pentru că $m(\measuredangle LAK) = 45°$, rezultă că $2[m(\measuredangle DAL) + m(\measuredangle DAK)] = 90°$, deci $m(\measuredangle DAK) = m(\measuredangle CAK)$, adică $[AD]$ este şi simetricul lui $[AC]$ faţă de dreapta AK. Observăm acum că $\triangle ABL \equiv \triangle ADL$ şi $\triangle ACK \equiv \triangle ADK$, de unde $[DL]$ şi $[BL]$ sunt congruente şi $[DK]$ şi $[CK]$ sunt, de asemenea, congruente iar $m(\measuredangle LDK) = m(\measuredangle LDA) + m(\measuredangle KDA) = m(\measuredangle ABL) + m(\measuredangle ACK) = 90°$.

Reciproc, presupunem că $LK^2 = BL^2 + CK^2$, dar $m(\measuredangle LAK) \neq 45°$. Din $LK^2 = BL^2 + CK^2$, rezultă că $LK > BL$, $LK > CK$. Dacă $m(\measuredangle CAL) \leq 45°$, atunci $LK < \dfrac{BC}{2} \leq BL$, contradicţie cu $LK > BL$. Prin urmare $m(\measuredangle CAL) > 45°$ şi există $M \in (LC)\setminus\{K\}$ astfel încât $m(\measuredangle LAM) = 45°$ şi, deci, are loc relaţia $LM^2 = BL^2 + MC^2$, de unde $BL^2 = LM^2 - MC^2 = LK^2 - CK^2$. Se obţine $LM^2 + CK^2 = LK^2 + MC^2 (*)$. Dacă $M \in (LK)$, atunci $LK^2 + MC^2 = (LM + MK)^2 + (MK + CK)^2 > LM^2 + CK^2$. Dacă $M \in (KC)$, atunci $LM^2 + CK^2 = (LK + KM)^2 + (CM + KM)^2 > LK^2 + CM^2$. Ambele cazuri sunt în contradicţie cu (*). Rămâne adevărat că $m(\measuredangle LAK) = 45°$.

Notă. Cu unele mici modificări la Soluţia 1, se poate arăta că rămâne adevărată concluzia şi dacă unul dintre punctele L, K aparţine lui (BC) şi celălalt este situat pe prelungirea ipotenuzei, cu ordinea L, B, K şi C ori B, L, C şi K.

G314. *În rombul ABCD, punctele E şi F se află pe laturile AB şi BC astfel încât $\measuredangle ECF = \measuredangle ABD$. Să se demonstreze că $(CD + DF)(CB + BE) = BD^2$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Considerăm latura rombului egală cu 1. Notăm cu $2a = BD$, $x = EB$, $y = DF$. Din asemănări, obţinem uşor că $CP = \dfrac{CE}{x+1}$, $CQ = \dfrac{CF}{y+1}$, $BQ = \dfrac{2a}{y+1}$, $PD = \dfrac{2a}{x+1}$. Deoarece $\measuredangle PCF = \measuredangle PDF$, $\measuredangle ECQ = \measuredangle QBE$, patrulaterele $DCPF$ şi $BCQE$ sunt inscriptibile. Din aceste patrulatere şi din faptul că BD este mediatoarea diagonalei AC, deducem că $FP = PC = PA$, $EQ = QC = QA$.

Folosind teorema lui Ptolemeu, avem:

$$DF \cdot CP + FP \cdot DC = DP \cdot CF \Leftrightarrow \frac{y \cdot CE}{x+1} + \frac{CE}{x+1} = \frac{2a \cdot CF}{x+1} \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{2a}{y+1};$$
$$BE \cdot QC + BC \cdot QE = CE \cdot BQ \Leftrightarrow \frac{x \cdot CF}{y+1} + \frac{CF}{y+1} = \frac{2a \cdot CE}{y+1} \Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{2a}{x+1}.$$

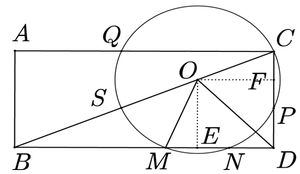
De aici, obţinem că $(x+1)(y+1) = 4a^2 \Leftrightarrow (CD + DF)(CB + BE) = BD^2$.

G315. *Se consideră drepunghiul $ABCD$ cu $AB = 35, BC = 14$ şi punctul M pe latura AB astfel încât AM=21. Despre un punct X de pe laturile dreptunghiului ($X \neq C$) vom spune că este legat de M dacă AC, perpendiculara în M pe CM şi perpendiculara în X pe CX sunt trei drepte concurente. Determinaţi punctele legate de M.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Notăm cu S intersecţia dreptei AC cu perpendiculara în M pe CM.

Un punct X este legat de M dacă şi numai dacă $CX \perp SX$, deci dacă şi numai dacă X aparţine cercului de diametru CS.



Dacă O este mijlocul lui CS, triunghiurile BOM şi BOC sunt congruente (L.L.L.), prin urmare $OE = d(O, AB) = d(O, BC) = OF$. Deducem că $OEBF$ este pătrat, cu $OF = BF = a$.

Din $\triangle COF \sim \triangle CAB$ rezultă că $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{OF}{AB}$, adică $\dfrac{14-a}{14} = \dfrac{a}{35}$, de unde $a = 10$. Apoi, raza cercului de diametru CS este $CO = \sqrt{CF^2 + OF^2} = 2\sqrt{29}$. Avem: $d(O, AB) = d(O, BC) < r, d(O, CD) < r$ iar $d(O, DA) > r$. Cercul de diametru CS va tăia AB în două puncte (M şi N), BC în două puncte (P şi C), CD în două puncte (Q şi C) şi nu va intersecta AD.

În concluzie, există trei puncte legate de M, anume N, P şi Q. Se obţine imediat că $BN = BP = 6$, iar $CQ = 20$.

B. Nivel liceal

Notă. Domnul **Vasile Jiglău** observă că soluţia problemei **L289** publicată în *RecMat 1/2016* este una parţială, fiind valabilă doar pentru cazul particular în care există două triunghiuri *consecutive* din şirul definit care sunt congruente. Republicăm această problemă, însoţită de soluţia autorului.

L289. *Construim şirul de triunghiuri $A_nB_nC_n$, $n \in \mathbb{N}$, astfel: $\triangle A_0B_0C_0$ este arbitrar ales; vârfurile $\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ sunt punctele în care medianele $\triangle A_kB_kC_k$ intersectează cercul circumscris acestuia, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Dacă în şirul astfel definit există două triunghiuri congruente, arătaţi că $\triangle A_0B_0C_0$ este echilateral.*

Vasile Jiglău, Arad

Soluţie. Demonstrăm întâi următoarea

Lemă. *Fie ABC un triunghi oarecare A', B', C' punctele în care medianele ce pornesc din A, B, C intersectează cercul circumscris al acestuia. Notăm cu ω, ω' unghiurile Brocard ale triunghiurilor ABC, respectiv $A'B'C'$. Atunci $\omega' \geq \omega$, cu egalitate când triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Fie M mijlocul segmentului BC; cu notaţiile uzuale, avem $\sin \widehat{BAM} = \dfrac{S}{cm_a}$. În triunghiul BAA' aplicăm teorema sinusurilor şi rezultă $BA' = 2R\dfrac{S}{cm_a} \Rightarrow BA' = \dfrac{abc}{2cm_a} = \dfrac{bc}{2m_a}$ şi, asemănător, $CA' = \dfrac{ac}{2m_a}$. Din prima teoremă a lui Ptolemeu aplicată în patrulaterul $ABA'C$ obţinem:

$$a \cdot AA' = c\frac{ac}{2m_a} + b\frac{ab}{2m_a} \Rightarrow AA' = \frac{b^2 + c^2}{2m_b}.$$

Din prima teoremă a lui Ptolemeu aplicată în patrulaterul $ABA'B'$ rezultă că $AA' \cdot$

$BB' = A'B' \cdot c + AB' \cdot BA'$. De aici,

$$A'B' = \frac{1}{c}\left(\frac{b^2+c^2}{2m_a} \cdot \frac{a^2+c^2}{2m_b} - \frac{ab}{2m_a} \cdot \frac{ba}{2m_b}\right) = \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-a^2b^2}{2cm_am_b} =$$
$$= \frac{c(\sum a^2)}{2m_am_b} \Rightarrow A'B' \cdot \frac{4m_am_bm_c}{(\sum a^2)} = 2cm_c \Rightarrow A'B'^{\,2} \cdot k = c^2(2a^2+2b^2-c^2),$$

unde $k = \left(\dfrac{4m_am_bm_c}{\sum a^2}\right)^2$. Scriind expresiile analoage pentru $B'C'$ şi $A'C'$ şi însumându-le, obţinem: $k\sum A'B'^{\,2} = 4\sum a^2c^2 - \sum a^4$ şi $k^2\sum A'B'^{\,2} \cdot B'C'^{\,2} = \sum(2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)(2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4) = 8\sum a^2b^2c^4 + 5\sum a^4b^4 - 2\sum a^2b^6 - 2\sum a^6b^2 = 10\sum a^2b^2c^4 + 5\sum a^4b^4 - 2\sum a^2b^2c^4 - 2\sum a^2b^6 - 2\sum a^6b^2 = 5(\sum a^2b^2)^2 - 2\sum a^2b^2(a^4 + b^4 + c^4) = 5(\sum a^2b^2)^2 - 2(\sum a^2b^2)(\sum a^4) = (\sum a^2b^2)[5(\sum a^2b^2) - 2(\sum a^4)]$.

Utilizăm următoarea formulă pentru cosinusul unghiului lui Brocard: $\cos\omega = \dfrac{\sum a^2}{2\sqrt{\sum a^2b^2}}$ (cf. T. Lalescu - *Geometria triunghiului*). Obţinem

$$\cos\omega' = \frac{4\sum a^2b^2 - \sum a^4}{2\sqrt{(\sum a^2b^2)(5\sum a^2b^2 - 2\sum a^4)}}.$$

Să demonstrăm că $\cos\omega' \le \cos\omega$. Aceasta este echivalentă cu

$$\frac{4\sum a^2b^2 - \sum a^4}{2\sqrt{(\sum a^2b^2)(5\sum a^2b^2 - 2\sum a^4)}} \le \frac{\sum a^2}{2\sqrt{\sum a^2b^2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sum a^2b^2 - \sum a^4 \le \left(\sum a^2\right)\sqrt{(5\sum a^2b^2 - 2\sum a^4)}.$$

Deoarece $(\sum a^2)^2 = (\sum a^4) + 2(\sum a^2b^2)$ şi $2\sum a^2b^2 - \sum a^4 = 16S^2$ este strict mai mare decât zero, prin ridicare la pătrat se păstrează echivalenţa, astfel că după ridicare la pătrat ultima egalitate devine echivalentă cu:

$$16\left(\sum a^2b^2\right)^2 + \left(\sum a^4\right) - 8\left(\sum a^2b^2\right)\left(\sum a^4\right) \le$$
$$\le \left[\left(\sum a^4\right)^2 + 2\left(\sum a^2b^2\right)\right]\left[5\left(\sum a^2b^2\right) - 2\left(\sum a^4\right)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16\left(\sum a^2b^2\right)^2 + \left(\sum a^4\right)^2 - 8\left(\sum a^2b^2\right)\left(\sum a^4\right) \le$$
$$\le 5\left(\sum a^2b^2\right)\left(\sum a^4\right) - 2\left(\sum a^4\right)^2 + 10\left(\sum a^2b^2\right)^2 - 4\left(\sum a^2b^2\right)\left(\sum a^4\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\sum a^4\right)^2 - 9\left(\sum a^4\right)\left(\sum a^2b^2\right) + 6\left(\sum a^2b^2\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\left[\left(\sum a^4\right) - \left(\sum a^2b^2\right)\right]\left[\left(\sum a^4\right) - 2\left(\sum a^2b^2\right)\right] \le 0,$$

care este adevărată deoarece $\sum a^4 \ge \sum a^2b^2$ şi $2\sum a^2b^2 \ge \sum a^4$ (formula lui Heron). Egalitatea se realizează când $\sum a^4 = \sum a^2b^2$, deci când $a = b = c$, adică atunci când ABC este echilateral.

În consecinţă, $\cos\omega' \le \cos\omega$. Cum $\omega, \omega' \in [0, \frac{\pi}{6}]$ şi cum în acest interval funcţia cos este descrescătoare, rezultă că $\omega' \ge \omega$.

Din formulele $A'B' \cdot k = cm_c$ şi analoagele rezultă că, dacă $A'B'C'$ este echilateral, atunci şi ABC este echilateral.

Revenim acum la enunţul problemei. Notăm cu ω_k unghiul lui Brocard al triunghiului $A_kB_kC_k$ din şirul construit conform enunţului. Din Lemă, ca şi din modul în care a fost definit şirul de triunghiuri, rezultă că $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_k \leq \omega_{k+1} \leq \ldots$, deci că şirul $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. Presupunem că există $m, n \in \mathbb{N}$, m strict mai mare decât n, astfel încât triunghiurile $A_mB_mC_m$ şi $A_nB_nC_n$ să fie congruente. Rezultă că $\omega_n = \omega_m$, prin urmare $\omega_n = \omega_{n+1} = \ldots = \omega_{m-1} = \omega_m$. Conform punctului b) al lemei, rezultă că triunghiurile $A_nB_nC_n, A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}, \ldots, A_mB_mC_m$ sunt echilaterale.

Avem: $A_nB_nC_n$ echilateral $\Rightarrow$ $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ echilateral $\Rightarrow$ $A_{n-2}B_{n-2}C_{n-2}$ echilateral $\Rightarrow \ldots$. După n paşi, obţinem $A_0B_0C_0$ este echilateral, adică chiar concluzia problemei.

Notă. În nr. 2/2016, p. 167, este dată o soluţie greşită la problema **L297**. Republicăm această problemă, însoţită de o soluţie corectă.

L297. *În triunghiul ABC notăm cu L_a, L_b, L_c picioarele bisectoarelor şi cu S_a, S_b, S_c picioarele simedianelor ($L_a, S_a \in BC$ etc.). Ce condiţie trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca triunghiurile $L_aL_bL_c$ şi $S_aS_bS_c$ să fie înscrise în acelaşi cerc?*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Presupunem că $\triangle L_aL_bL_c$ şi $\triangle S_aS_bS_c$ se pot înscrie în acelaşi cerc. Puterile punctelor B şi C faţă de acest cerc conduc la sistemul: $BL_a \cdot BS_a = BL_c \cdot BS_c$ şi $CL_a \cdot CS_a = CL_b \cdot CS_B$. Utilizând formulele pentru segmentele determinate pe laturi de bisectoare şi simediane ($BL_a = \dfrac{ac}{b+c}$, $BS_a = \dfrac{ac^2}{b^2+c^2}$ etc.), obţinem, după calcule, următorul sistem: $(a-c)[ac(a+c)+abc-b^3] = 0$, $(a-b)[ab(a+b)+abc-c^3] = 0$. Combinând, avem de considerat patru cazuri, care conduc la două soluţii posibile ale problemei: $\triangle ABC$ este echilateral sau este isoscel de forma $(l, l, (\sqrt{2}-1)l)$.

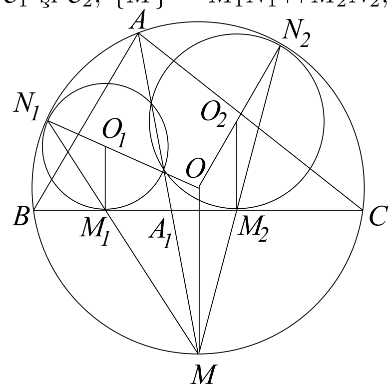
Ambele soluţii sunt valabile. Dacă $\triangle ABC$ este echilateral, afirmaţia este evidentă: picioarele bisectoarelor şi simedianelor coincid două câte două şi se află pe cercul $\mathcal{C}(O, \dfrac{R}{2})$.

În cazul triunghiului isoscel, putem proceda astfel: calculăm lungimile laturilor $\triangle L_aL_bL_c$ (cu teorema cosinusului), calculăm raza cercului circumscris (L_a, L_b, L_c) (cu formula $4RS = abc$) şi verificăm că pe cercul $\mathcal{C}(O', \dfrac{l}{4\sqrt{7}}\sqrt{2(2\sqrt{2}-1)}$ se află şi picioarele simedianelor, unde centrul O' este punctul de pe mediatoarea bazei triunghiului la distanţă egală cu raza faţă de bază.

L306. *Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ un cerc tangent cercului $\mathcal{C}$ în N_1 şi laturii BC în M_1, $\mathcal{C}_2$ un cerc tangent cercului $\mathcal{C}$ în N_2 şi laturii BC în M_2 şi A_1 mijlocul segmentului M_1M_2. Arătaţi că AA_1 este axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ dacă şi numai dacă $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{A_1AC}$.*

Neculai Roman, profesor, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie O, O_1 şi O_2 centrele cercurilor $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, $\{M\} = M_1N_1 \cap M_2N_2$, $\{P\} = M_1N_1 \cap \mathcal{C}$ şi $\{Q\} = M_2N_2 \cap \mathcal{C}$. Din triunghiurile isoscele $O_1M_1N_1$ şi OPN_1 rezultă $\angle O_1M_1N_1 \equiv \angle OPN_1$, deci $OP \| O_1M_1$ şi, prin urmare, $OP \perp BC$. Analog, $OQ \perp BC$. Deducem că P şi Q coincid cu M, mijlocul arcului BC. Acum avem: $m(\angle MM_1M_2) = \frac{1}{2}[m(\widehat{MC}) + m(\widehat{BN_1})] = \frac{1}{2}[m(\widehat{MB}) + m(\widehat{BN_1})] = \frac{1}{2}m(\widehat{MN_1}) = m(\angle MN_2N_1)$, deci $\triangle MM_1M_2 \sim \triangle MN_2N_1$, de unde $\frac{MM_1}{MN_2} = \frac{MM_2}{MN_1} \Leftrightarrow MM_1 \cdot MN_1 = MM_2 \cdot MN_2$; obţinem că M este pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.



Să presupunem că AA_1 este axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ şi să arătăm că $\angle BAA_1 \equiv \angle A_1AC$. Din $M \in AA_1$ şi $\angle BAM \equiv \angle MAC$ rezultă $\angle BAA_1 \equiv \angle A_1AC$, ceea ce era de demonstrat.

Reciproc, să presupunem că $\angle BAA_1 \equiv \angle A_1AC$ şi să arătăm că AA_1 este axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Din $\angle BAA_1 \equiv \angle A_1AC$ şi $\angle BAM \equiv \angle MAC$, rezultă că $M \in AA_1$. Apoi, cum M este pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ şi din $A_1M_1 = A_1M_2$, rezultă că A_1 este pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$; obţinem că AA_1 este axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.

L307. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$ şi $N \in (CD)$. Intersecţiile diagonalelor pentru fiecare dintre patrulaterele $ABCD$, $AMND$ şi $BCNM$ se notează cu O, O_1 respectiv O_2. Demonstraţi că punctele O_1, O şi O_2 sunt coliniare.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Notă. **Ioan Pop**, Iaşi, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi elevul **Dan Dumitrescu**, Rm. Valcea observă că problema este, de fapt, o reformulare a *teoremei lui Pappus*; pentru demonstraţia acesteia se poate consulta, de exemplu,
`www.mathpages.com/home/kmath542/kmath542.htm`

L308. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi D proiecţia lui A pe BC. Notăm cu I_1 centrul cercului înscris în triunghiul ABD şi cu I_2 centrul cercului înscris în triunghiul ADC. Să se demonstreze că raza cercului circumscris triunghiului AI_1I_2 este egală cu raza cercului înscris în triunghiul ABC.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (dată de **Corneliu Mănescu-Avram**, **Nicuşor Zlota**, precum şi de autorul problemei). Notăm cu r, r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD respectiv ADC. Fie R_1 raza cercului circumscris triunghiului AI_1I_2. Este uşor de observat că $\angle I_1AI_2 = 45°$, $\angle I_1DI_2 = 90°$.

Deoarece triunghiurile ABD şi ABC sunt asemenea, avem că $\frac{r_1}{r} = \frac{c}{a} \Rightarrow r_1 = \frac{cr}{a}$ şi, analog, $r_2 = \frac{br}{a}$. Deoarece $DI_1 = r_1\sqrt{2}$, $DI_2 = r_2\sqrt{2}$, cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DI_1I_2 obţinem:

$$I_1I_2 = \sqrt{I_1D^2 + I_2D^2} = \sqrt{2\frac{c^2r^2}{a^2} + 2\frac{b^2r^2}{a^2}} = r\sqrt{2}.$$

Aplicând acum teorema sinusurilor în triunghiul AI_1I_2, rezultă:

$$R_1 = \frac{I_1I_2}{2\sin\angle I_1AI_2} = \frac{r\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = r.$$

Notă. Domnii **Neculai Roman** şi **Marius Olteanu** remarcă faptul că problema este un caz particular al **L286** din *RecMat 2/2015* (autor **Neculai Roman**). Menţionăm că problema **L308** a fost trimisă revistei din anul 2014, deci responsabilitatea publicării sale aparţine redacţiei.

L309. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, a, b, c lungimile laturilor sale, G centrul de greutate iar X, Y, Z puncte arbitrare pe dreptele BC, CA respectiv AB. Arătaţi că*

$$\frac{AX^2 + GX^2}{a^2} + \frac{BY^2 + GY^2}{b^2} + \frac{CZ^2 + GZ^2}{c^2} \geq \frac{5}{2}.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie (dată de **Neculai Roman**, precum şi de autorii problemei). Notăm cu h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului şi cu d_a, d_b, d_c distanţele de la G la dreptele BC, CA respectiv AB; evident că $d_a = \dfrac{h_a}{3} \leq GX$, $h_a \leq AX$ şi analoagele. Din $a = h_a(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$ obţinem că $\dfrac{h_a}{a} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}$, prin urmare

$$\sum \frac{AX^2 + GX^2}{a^2} \geq \sum \frac{h_a^2 + \frac{h_a^2}{9}}{a} = \frac{10}{9}\left(\frac{h_a}{a}\right)^2 = \sum \frac{1}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)^2}.$$

Ţinând cont de inegalitatea $\left(\sum xy\right) \cdot \left(\sum \dfrac{1}{(x+y)^2}\right) \geq \dfrac{9}{4}$, $\forall x, y, z > 0$ (Olimpiada de Matematică, Iran, 1996) unde luăm $x = \operatorname{ctg} A$, $y = \operatorname{ctg} B$, $z = \operatorname{ctg} C$ şi folosind faptul că $\sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1$, deducem că

$$\sum \frac{1}{(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B)^2} \geq \frac{9}{4},$$

de unde cerinţa problemei. Egalitatea are loc atunci când $\triangle ABC$ este echilateral iar X, Y, Z sunt mijloacele laturilor sale.

Notă. În enunţul problemei, publicat în RecMat 1/2016, menţiunea că $\triangle ABC$ este ascuţitunghic lipseşte. Domnul **Marius Olteanu** construieşte efectiv un triunghi obtuzunghic pentru care inegalitatea din enunţ este falsă.

L310. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, arătaţi că sunt adevărate inegalităţile:*

a) $\dfrac{3n+5}{6} < \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{k})} < \dfrac{3n+6}{6}$;

b) $\dfrac{2n+3}{6}+\dfrac{1}{9n+9}<\dfrac{1}{n(n-1)}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln^2(1+\frac{1}{k})}<\dfrac{2n+4}{6}+\dfrac{1}{4n+4}$.
(Enunţ corectat)

Mihàly Bencze, Braşov

Soluţie. Demonstrăm că este adevărată dubla egalitate

$$(*)\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{3}}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Considerăm funcţiile $f,g,h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, $g(x)=1+x\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$ şi $h(x)=1+x\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$. Pentru x într-o vecinătate a lui $x_0=\dfrac{2}{2n+1}$, dezvoltând în serie de puteri, putem scrie că $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ şi $g(x)=1+x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}\right)$. Cum $\dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, obţinem că $f(x)<g(x)$, prin urmare $f(x_0)<g(x_0)\Leftrightarrow e^{\frac{2}{2n+1}}<1+\dfrac{1}{n}$, adică a doua parte a inegalităţii $(*)$. Pentru prima parte, se procedează asemănător, folosind funcţiile f şi h.

a) Din (*) rezultă $k+\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{k})}<k+\dfrac{1}{2}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Sumând după $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, deducem că $\dfrac{n(3n+5)}{6}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{k})}<\dfrac{n(n+2)}{2}$, de unde concluzia dorită.

b) Din (*) rezultă $k^2+\dfrac{2k}{3}+\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{\ln^2(1+\frac{1}{k})}<k^2+k+\dfrac{1}{2}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Dând valori lui k şi sumând, obţinem cerinţa.

Notă (**Marius Olteanu**, Râmnicu Vâlcea)**.** În enunţul iniţial, publicat în RecMat 2/2016, cerinţele problemei erau:

a) $\left[\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{k})}\right]=\left[\dfrac{3n+5}{6}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\left[\dfrac{1}{n(n-1)}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln^2(1+\frac{1}{k})}\right]=\left[\dfrac{2n+3}{6}+\dfrac{1}{9n+9}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Egalitatea de la punctul a) este adevărată, în timp ce egalitatea de la b) nu are întotdeauna loc!

Într-adevăr, din cele de mai sus rezultă că $\dfrac{n+1}{2}<A<\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, unde $A=\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{k})}$. Dacă $n=2p$, $p\in\mathbb{N}^*$, atunci $p+\dfrac{1}{2}<A<p+1$, deci $[A]=p$ şi $\left[\dfrac{3n+5}{6}\right]=\left[p+\dfrac{5}{6}\right]$, prin urmare $[A]=\left[\dfrac{3n+5}{6}\right]$. Dacă $n=2p+1$, $p\in\mathbb{N}^*$, se obţine analog că $[A]=\left[\dfrac{3n+5}{6}\right]=p+1$.

Notând $B=\dfrac{1}{n(n-1)}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln^2(1+\frac{1}{k})}$, $n\geq 2$ considerând resturile modulo 3 ale lui n, observăm că egalitatea $[B] = \left[\dfrac{2n+3}{6} + \dfrac{1}{9n+9}\right]$ are loc dacă $n = 3q$ şi $n = 3q+2$, $q \in \mathbb{N}^*$, însă nu este adevărată pentru $n = 3q+1$, $q \geq 3$.

L311. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, *astfel încât* $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{1+x_i^2} = 1$. *Arătaţi că* $|x_1 x_2 \ldots x_n| \leq \dfrac{1}{(\sqrt{n-1})^n}$. *În ce caz avem egalitate?*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Aurel Chiriţă, Slatina

Soluţie. Avem

$$\frac{1}{1+x_1^2} = 1 - \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{1+x_n^2} \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}{(1+x_2^2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n^2)}}$$

şi analoagele. Prin înmulţirea celor n inegalităţi deducem că

$$\frac{1}{(1+x_1^2)(1+x_2^2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n^2)} \geq (n-1)^n \frac{x_1^2 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n^2)},$$

de unde obţinem cerinţa.

Pentru $n = 2$, din relaţia de condiţie obţinem $(x_1 x_2)^2 = 1$, deci avem egalitate pentru orice x_1, x_2. Pentru $n \geq 3$, avem egalitate dacă şi numai dacă

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

Este uşor de observat că inegalitatea este adevărată în ipoteza $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{1+x_i^2} \leq 1$.

Notă. Am primit soluţii corecte din partea domnilor **Titu Zvonaru**, **Marius Olteanu**, **Ioan Viorel Codreanu** şi **Dan Dumitrescu**.

L312. *Fie* a, b, c *numere reale pozitive astfel încât* $abc = 1$. *Arătaţi că* $a^3 + b^3 + c^3 + \dfrac{2ab}{a^2+b^2} + \dfrac{2bc}{b^2+c^2} + \dfrac{2ca}{c^2+a^2} \geq 6$.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

Soluţia 1 (a autorilor)**.** Avem:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{2ca}{c^2+a^2} \geq 6 \Leftrightarrow \sum a^3 - 3abc \geq$$
$$\geq \sum \left(1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}\right) \Leftrightarrow \sum \frac{(a+b+c)(a-b)^2}{2} \geq \sum \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}.$$

Este suficient să demonstrăm că $(a+b+c)(a-b)^2 \geq \dfrac{2(a-b)^2}{a^2+b^2}$. Dacă $a = b$ avem egalitate: dacă nu, rămâne de arătat că $(a+b+c)(a^2+b^2) \geq 2 \Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2) + c(a^2+b^2) \geq 2$. Această inegalitate rezultă ţinând cont de faptul că $c(a^2+b^2) \geq 2abc = 2$.

Soluţia 2 (**Nicuşor Zlota** şi **Marius Olteanu**)**.** Folosind inegalitatea lui Bergström şi faptul că $x^3 + y^3 \geq x^2 y + x y^2$, $\forall x, y \in (0, \infty)$, avem:

$$\sum \frac{ab}{a^2+b^2} = \sum \frac{1^2}{c(a^2+b^2)} \geq \frac{(1+1+1)^2}{\sum(a^2 b + a b^2)} \geq \frac{9}{\sum(a^3+b^3)}.$$

Rămâne să demonstrăm că $a^3+b^3+c^3+\dfrac{9}{a^3+b^3+c^3}\geq 6$, fapt care revine la inegalitatea evidentă $(a^3+b^3+c^3-3)^2\geq 0$.

Soluţia 3 (**Ioan Viorel Codreanu** şi **Marian Cucoaneş**). Pentru a,b numere reale pozitive are loc inegalitatea $\dfrac{a^3+b^3}{2}\geq\dfrac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}$ (este echivalentă cu $(a-b)^2\geq 0$). Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4}+\frac{2ab}{a^2+b^2}\geq\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab(a+b)},$$

prin urmare $\dfrac{a^3+b^3}{2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\geq\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab(a+b)}$ şi încă două inegalităţi similare. Ţinând cont, din nou, de inegalitatea mediilor şi de binecunoscuta $\prod(a+b)\geq 8\prod a$, obţinem:

$$\sum\left(a^3+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\geq\sqrt{2}\cdot\sum\sqrt{ab(a+b)}\geq 3\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{a^2b^2c^2\prod(a+b)}\geq 6abc=6.$$

Notă. Am mai primit soluţii corecte de la elevii **Vlad-Mihai Ciuperceanu**, Craiova şi **Dan Dumitrescu**, Rm. Vâlcea.

L313. *Fie a,b,c,d numere reale pozitive astfel încât $abc+bcd+cda+dab=4$. Demonstraţi că*

$$(a^{12}-a^8+4)(b^{10}-b^6+4)(c^8-c^4+4)(d^6-d^2+4)\geq 256.$$

Nicuşor Zlota, Focşani

Soluţie. Dacă $a=b=c=d=1$, cerinţa are loc cu egalitate. Considerăm funcţiile $f_i:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^{12}-x^8+4$, $f_2(x)=x^{10}-x^6+4$, $f_3(x)=x^8-x^4+4$, $f_4(x)=x^6-x^2+4$ şi $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_i(x)=k_ix^4+m_i$, $i=\overline{1,4}$, unde numerele k_i şi m_i sunt alese astfel încât $f_i(1)=g_i(1)$ şi $f_i'(1)=g_i'(1)$, $i=\overline{1,4}$. Cum $f_i(1)=f_i'(1)=3$, vom avea, de fapt, $g_i(x)=x^4+3$, $i=\overline{1,4}$. Din $x^6(x^2-1)^2(x^2+1)\geq 0$ şi $(x^2-1)^2(x^2+1)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, rezultă că $f_1(x)\geq f_2(x)\geq f_3(x)\geq f_4(x)\geq g_i(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$.

În continuare, vom aplica inegalitatea lui Hölder, precum şi cunoscuta

$$(a+b+c+d)^3\geq 16(abc+bcd+cda+dab),$$

care reprezintă inegalitatea Maclaurin $p_1\geq p_3^{\frac{1}{3}}$, unde $p_1=\dfrac{a+b+c+d}{4}$ şi $p_3=\dfrac{abc+bcd+cda+dab}{4}$. Avem:

$$\begin{aligned}f_1(a)\cdot f_2(b)\cdot f_3(c)\cdot f_4(d)\geq{}& g_1(a)\cdot g_2(b)\cdot g_3(c)\cdot g_4(d)=\\ &=\prod(a^4+1^4+1^4+1^4)\geq(a+b+c+d)^4\geq\\ &\geq\sqrt[3]{(16(abc+bcd+cda+dab))^4}=256.\end{aligned}$$

Notă. Soluţii în aceeaşi manieră am primit din partea domnului **Marian Cucoaneş**, Mărăşeşti, precum şi din partea elevului **Dan Dumitrescu**, Rm. Vâlcea.

L314. *Fie* a, b, c *numere reale astfel încât* $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ *şi* $a + b + c = 3s$, *unde* $s \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. *Notăm* $M_s = \max(2a + 2b + 2c - abc)$. *Determinaţi* $\min\{M_s | s \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\}$.

Leonard Giugiuc, Drobeta Tr. Severin şi Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Dacă $p = a + b + c$, $\dfrac{p^2 - q^2}{3} = ab + bc + ca$ $(q \geq 0)$ şi $r = abc$, are loc inegalitatea *Vo Quoc Ba Can*:

$$(*) \qquad r \geq \frac{1}{27}(p + q)^2(p - 2q).$$

În condiţiile problemei, $p = 3s \in [-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$ şi $q = \sqrt{\dfrac{27 - p^2}{2}}$, prin urmare $2p - r \leq 2p - \dfrac{1}{27}(p+q)^2(p-2q) = \dfrac{7p}{2} - \dfrac{5p^3}{54} + \dfrac{(27 - p^2)\sqrt{27 - p^2}}{27\sqrt{2}}$. Cum egalitatea în (*) este efectiv atinsă, obţinem că $M_s = f(p)$, unde $f : [-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \dfrac{7x}{2} - \dfrac{5x^3}{54} + \dfrac{(27 - x^2)\sqrt{27 - x^2}}{27\sqrt{2}}$. Funcţia f este derivabilă, având derivata $f'(x) = \dfrac{1}{18}(63 - 5x^2 - x\sqrt{54 - 2x^2})$ şi tabelul de variaţie:

x	$-3\sqrt{3}$		$\frac{-7}{\sqrt{3}}$		3		$3\sqrt{3}$
$f'(x)$		$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + +$	0	$- - - - - - - -$	
$f(x)$	$f(-3\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\frac{37}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$

În concluzie, $\min\{M_s | s \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\} = \min f = -\dfrac{37}{3\sqrt{3}}$.

L315. *Se consideră expresia* $E(z) = |az^2 + bz + c| + |bz^2 + cz + a| + |cz^2 + az + b|$, *unde* $z \in \mathbb{C}$ *este variabil şi* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ *sunt fixate. Determinaţi* $\max\{E(z) || z| = 1\}$.

Marcel Chiriţă

Soluţie (Gheorghe Iurea, Iaşi**).** Cum $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \leq 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, avem:

$$E^2(z) \leq 3\sum |az^2 + bz + c|^2 = 3\sum (az^2 + bz + c)(a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c).$$

Deoarece $|z| = 1$, avem că $z\overline{z} = 1$ şi $z = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Efectuând calculele, relaţia de mai sus devine

$$E^2(z) \leq 9(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)(4\cos^2 t + 4\cos t - 2).$$

Observăm că $4\cos^2 t + 4\cos t - 2 = (2\cos t + 1)^2 - 3 \in [-3, 6]$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

Dacă $ab+bc+ca \geq 0$, atunci $E^2(z) \leq 9(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)\cdot 6 = 9(a+b+c)^2$, prin urmare $E(z) \leq 3|a+b+c|$. Cum $E(1) = 3|a+b+c|$ rezultă că, în acest caz, $E_{\max} = 3|a+b+c|$.

Dacă $ab+bc+ca < 0$, atunci $E^2(z) \leq 9(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)(-3) = 9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. Cum $E\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$, rezultă că, în acest caz, $E_{\max} = 3\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după jumătate de an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.

Vizitaţi pagina web a revistei **Recreaţii Matematice**:

http://www.recreatiimatematice.ro