Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2016

Clasele primare

P355. *Găsiţi trei numere consecutive în şirul numerelor de la* 1 *la* 30 *care să aibă suma* 30.

(*Clasa pregătitoare*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

Soluţie. $9 + 10 + 11 = 30$.

P356. *Colorează figura geometrică care nu se află la stânga pătratului şi nu este dreptunghi:* $\bigcirc$ $\square$ $\triangle$ $\boxed{}$

(*Clasa pregătitoare*) **Mihaela Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Triunghiul îndeplineşte condiţiile problemei.

P357. *Fie şirul* $1; 2; 3; 2; 3; 5; 3; \square; \square$. *Completaţi casetele libere respectând regula de formare şi găsiţi cifra care apare de cele mai multe ori în şirul obţinut.*

(*Clasa I*) **Emanuela Păduraru, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ şi urmează $3 + 4 = 7$. Şirul se completează cu cifrele 4 şi 7. Cifra 3 apare cel mai des în şir.

P358. *Care dintre numerele* $23, 12, 3, 45, 76$ *este cel mai îndepărtat de* 34?

(*Clasa I*) **Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $34 - 3 = 31$, $34 - 12 = 22$, $34 - 23 = 11$, $45 - 34 = 11$, $76 - 34 = 32$. Numărul cel mai îndepărtat de 34 este 76.

P359. *Aflaţi toate numerele de două cifre care au suma cifrelor mai mică decât suma cifrelor vecinului mai mic. (Exemplu: numărul* 50 *îndeplineşte condiţia deoarece are suma cifrelor mai mică decât suma cifrelor numărului* 49.)

(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numerele $10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ îndeplinesc condiţia cerută.

P360. *Scrie în casete numai numere formate cu cifra* 3 *astfel încât să fie corect calculul* $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 399$.

(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

Soluţie. Un exemplu este: $33 + 33 + 333 = 399$.

P361. *Un ţăran avea* 60 *de păsări, găini şi raţe. După ce vinde* 18 *găini şi câteva raţe, observă că numărul găinilor s-a înjumătăţit, iar cel al raţelor s-a redus la un sfert. Câte raţe i-au rămas?*

(*Clasa a II-a*) **Ana Ionescu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Ţăranul avea $18 + 18 = 36$ găini şi $60 - 36 = 24$ raţe. Ţăranului i-au rămas $24 : 4 = 6$ raţe.

P362. *Suma a trei numere impare consecutive este* 39. *Care sunt aceste numere?*

(*Clasa a II-a*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

Soluţie. Diferenţa dintre două numere impare consecutive este 2; $39 - (2 + 4) = 39 - 6 = 33$. Deoarece $33 = 11 + 11 + 11$, înseamnă că numerele sunt $11, 13$ şi 15.

P363. *Aflaţi valoarea numărului a pentru care*

$$10 \times 10 - 10 \times [10 \times 10 - 10 \times (10 - 10 : a)] = 0.$$

(*Clasa a III-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Canada**

Soluţie. Deducem că $10 \times 10 - 10 \times (10 - 10 : a) = 10$, de unde $10 \times (10 - 10 : a) = 90$, ceea ce înseamnă că $10 - 10 : a = 9$ şi $a = 10$.

P364. *Putem împărţi numerele* $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$ *în trei grupe de câte trei numere astfel încât în fiecare grupă suma numerelor să fie pară? Justificaţi!*

(*Clasa a III-a*) **Adina Relinschi, elevă, Iaşi**

Soluţie. În şirul numerelor date cinci numere sunt impare, deci suma tutror numerelor date este un număr impar. Dacă am putea forma cele trei grupe, am ajunge la concluzia că suma tuturor numerelor este un număr par, fals. Împărţirea în condiţiile cerute nu se poate face.

P365. *Suma a două numere este un număr de două cifre ce are suma cifrelor* 12. *Aflaţi cele două numere ştiind că triplul unuia este dublul celuilalt.*

(*Clasa a III-a*) **Maria Crăcană, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă numerele sunt x şi y, $x < y$, $3x = 2y$, deducem că $2(x + y) = 2x + 2y = 2x + 3x = 5x$. Obţinem că numărul $x + y$ se împarte exact la 5. Din relaţia $x + y = \overline{ab}$, $a + b = 12$ şi $\overline{ab}$ se împarte exact la 5, deducem $a = 7, b = 5$. Rezultă $x = 30$, $y = 45$.

P366. *Arătaţi că, oricum am alege şase numere dintre numerele* $10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$*, există două astfel încât ultima cifră a sumei lor este zero.*

(*Clasa a III-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

Soluţie. Formăm perechile: $(10, 20)$, $(12, 18)$, $(14, 16)$, $(22, 28)$, $(24, 26)$. Oricum am alege şase numere, două sunt din aceeaşi pereche, deci au suma un număr cu ultima cifră zero.

P367. *Fie a şi b două numere naturale nenule astfel încât* $2 \times b - 3 \times a = 17$. *Arătaţi că* $b \geq 10$.

(*Clasa a IV-a*) **Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti**

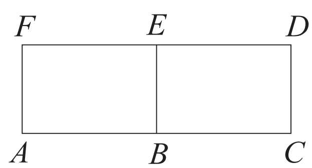
Soluţie. Presupunem că $b < 10$. Cum $a \geq 1$, atunci $2b - 3a < 17$, fals. Deci $b \geq 10$.

P368. *Arătaţi că numărul* $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 51 - 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 49$ *se împarte exact la numărul* $47 \times 49 \times 50$.

(*Clasa a IV-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 51 - 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 49 = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 49 \times (51 - 1) = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 47 \times 49 \times 50$, de unde concluzia.

P369. *Figura alăturată s-a format prin alipirea dreptunghiurilor ABEF şi BCDE. În câte moduri putem să alegem trei laturi din cele şapte existente astfel încât oricare două dintre ele să nu aibă capete comune?*



(*Clasa a IV-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Latura AF poate intra în grupele (AF, BE, CD) şi (AF, BC, DE), iar latura AB poate intra numai în grupa (AB, EF, CD). Alte grupe nu mai sunt. Alegerea se poate face în 3 moduri.

P370. *Se consideră şirul de fracţii* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$ *Ce fracţie trebuie scrisă pe locul* 57*?*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Numărătorii fracţiilor pot fi organizaţi astfel: $1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; \ldots$ Cum $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$, rezultă că numărătorul fracţiei de pe locul 57 se află pe locul doi în secvenţa $1, 2, 3, \ldots, 11$. Pe locul 57 este fracţia $\frac{2}{10}$.

Clasa a V-a

V.207 *Determinaţi mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile: (i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; (ii) $A \cap B = \{1, 2\}$; (iii) $8 \notin A \setminus B$; (iv) suma elementelor lui A este egală cu suma elementelor lui B.*

Valeriu Iovan, Craiova

Soluţie. Se arată că $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ şi $B = \{1, 2, 5, 8\}$.

V.208 *Numerele naturale a, b şi c sunt astfel încât $2ab = c$, $bc = 8a$ şi $ca = 2b$. Calculaţi suma $S = a + b + c$.*

Ionuţ-Florin Voinea, elev, Bucureşti

Soluţie. Dacă unul dintre numere este 0, atunci şi celelalte vor fi 0, prin urmare $S = 0$. Dacă toate sunt nenule, înmulţind membru cu membru egalităţile din enunţ, obţinem că $2a^2b^2c^2 = 16abc$, de unde $abc = 8$. Deducem că $a = 1, b = 2$, $c = 4$, deci $S = 7$. În concluzie, $S \in \{0, 7\}$.

V.209 *Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele naturale de* 25 *cifre care au suma cifrelor* 25 *şi sunt divizibile cu* 25*.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Cel mai mic număr căutat este $1\underbrace{00\ldots00}_{20 \text{ de } 0}3975$, iar cel mai mare este $997\underbrace{00\ldots00}_{22 \text{ de } 0}$.

V.210 *Dacă numărul $A = (a - b)(99a + 100b) + (a + b)(111a + 112b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, este divizibil cu* 3*, arătaţi că cel puţin unul dintre numerele a şi b este divizibil cu* 3*.*

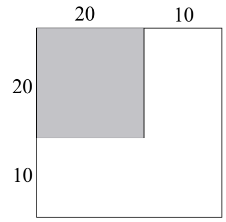
Teodor-Ioan Băltoi, elev, Roman

Soluţie. Cum $99 = M_3$, $100 = M_3 + 1$, $111 = M_3$, $112 = M_3 + 1$, rezultă că $A = (a - b)(M_3 + b) + (a + b)(M_3 + b) = M_3 + (a - b) \cdot b + (a + b) \cdot b = M_3 + 2ab$. Deducem că $2ab = M_3$, de unde cerinţa problemei.

V.211 *Pe un teren dreptunghiular cu aria de 900 m^2 se construieşte o piscină dreptunghiulară cu aria de 400 m^2. Atât dimensiunile terenului cât şi cele ale piscinei se exprimă, în metri, prin numere naturale divizibile cu* 5*. De jur împrejurul terenului şi de jur împrejurul piscinei se află câte un gard. În condiţiile problemei, care este lungimea totală minimă a acestor garduri?*

Vlad-Mihai Ciuperceanu, elev, Craiova

Soluţie. Fie $L = 5a$, $l = 5b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, dimensiunile terenului; atunci $a \cdot b = 36$ şi



$a + b =$ minim. Calculând suma $a+b$ pentru perechile $(a,b) \in \{(1,36);(2,18);(3,12);\ (4,9);(6,6);(9,4);(12,3);(18,2);(36,1)\}$, obţinem valoare minimă când $a=b=6$, deci terenul are perimetru minim când are forma unui pătrat cu latura de 30 m. Analog, piscina va avea forma unui pătrat cu latura de 20 m.

Lungimea totală minimă a gardurilor se obţine când acestea au o porţiune (cât mai mare) comună, adică în situaţia din figură şi este egală cu $4\times 30+2\times 20=160$m.

V.212 *În vârfurile unui cub sunt scrise cinci numere egale cu* 0 *şi trei numere egale cu* 1*. Un pas înseamnă mărirea cu* 1 *a numerelor din vârfurile unei muchii oarecare. Este posibil ca, după un număr de paşi, cele opt numere din vârfurile cubului să devină egale?*

Ioan-Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Suma celor opt numere din vârfurile cubului se măreşte la fiecare pas cu 2, deci nu îşi schimbă paritatea. Iniţial, această sumă este egală cu 3, deci este impară şi atunci va fi mereu impară. Dacă cele opt numere ar deveni egale, suma lor ar fi pară. Rezultă că raspunsul la întrebarea din problemă este negativ.

V.213 *Se consideră produsul* $P=\overline{ab}\cdot\overline{cd}\cdot e$. *Înlocuiţi cele cinci litere cu cifrele* $1,2,3,4,5$, *folosind fiecare cifră câte o singură dată, astfel încât produsul P să fie maxim.* (Enunţ corectat.)

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Avem: $P=(10a+b)(10c+d)e=100ace+10e(ad+bc)+bde$. Pentru a maximiza P, impunem întâi ca ace să fie maxim, deci $\{a,c,e\}=\{3,4,5\}$ şi $\{b,d\}=\{1,2\}$, apoi ca $e(ad+bc)$ să fie maxim. Această condiţie revine la $e(2a+c)=$maxim sau $e(a+2c)=$ maxim şi, verificând pentru cele 6 permutări posibile ale literelor a,c,e, obţinem că $e=5,a=4,c=3$, respectiv $e=5,a=3,c=4$. În concluzie, $P_{\max}=41\cdot 32\cdot 5=6560$ pentru $(a,b,c,d,e)\in\{(4,1,3,2,5);(3,2,4,1,5)\}$.

Clasa a VI-a

VI.207. *Pentru a promova un examen, trebuie susţinute şi promovate patru probe. Dintre elevii unei şcoli care participă la acest examen,* 70% *au trecut proba A,* 80% *au trecut proba B,* 75% *au trecut proba C şi* 85% *au trecut proba D. Arătaţi că cel puţin* 10% *dintre elevii şcolii au promovat examenul.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Observăm că 30% nu au trecut proba A, 20% nu au trecut proba B, 25% nu au trecut proba C şi 15% nu au trecut proba D. În total, cel mult $(30+20+25+15)\%=90\%$ nu au trecut una dintre probe, prin urmare cel puţin 10% dintre elevii şcolii le-au trecut pe toate, deci au promovat examenul.

VI.208. *Notăm cu P produsul numerelor naturale de forma* $\dfrac{n^3-3}{n+3}$, $n\in\mathbb{N}$. *Determinaţi numărul divizorilor naturali ai numărului P.*

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Dacă $\dfrac{n^3-3}{n+3}\in\mathbb{N}$, atunci $n+3|n^3-3$, prin urmare $n+3|n^2(n+3)-(n^3-3)$, adică $n+3|3n^2+3$. Apoi, $n+3|3n(n+3)-(3n^2+3)$, deci $n+3|9n-3$. Rezultă că $n+3|9(n+3)-(9n-3)$, prin urmare $n+3|30$. Obţinem că $n\in\{2,3,7,12,27\}$, aşadar numerele de forma $\dfrac{n^3-3}{n+3}$ sunt $1,4,34,115$ şi 656. Descompus în factori primi, produsul acestor numere este $P=2^7\cdot 5\cdot 17\cdot 23\cdot 41$, iar numărul divizorilor lui P este $8\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=128$.

VI.209. *Demonstraţi că orice număr natural n admite o scriere unică $n=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\ldots+a_k\cdot 3^k$, unde $k\in\mathbb{N}$ şi $a_0,a_1,\ldots,a_k\in\{-1,0,1\}$.*

Scrieţi numărul 2016 sub această formă.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru unicitatea scrierii, presupunem că $n=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\ldots=b_0+b_1\cdot 3+b_2\cdot 3^2+\ldots$; atunci $a_0-b_0\vdots 3$ şi, cum $a_0-b_0\in\{-2,-1,0,1,2\}$, rezultă că $a_0=b_0$. Scădem a_0 din ambii membri, împărţim prin 3 şi obţinem că $a_1+a_2\cdot 3+\ldots=b_1+b_2\cdot 3+\ldots$, de unde $a_1-b_1\vdots 3$, deci $a_1=b_1$. Din aproape în aproape, $a_i=b_i$ pentru orice $i\in\mathbb{N}$.

Pentru a dovedi existenţa unei astfel de scrieri, descompunem numărul n în baza $3: n=\overline{x_p x_{p-1}\ldots x_1 x_0}$, unde $x_i\in\{0,1,2\}$, deci $n=x_p\cdot 3^p+x_{p-1}\cdot 3^{p-1}+\ldots+x_1\cdot 3+x_0$. Începând de la sfârşit, fie x_t prima cifră egală cu 2; atunci $n=x_p\cdot 3^p+\ldots+x_{t+1}\cdot 3^{t+1}+(3-1)\cdot 3^t+x_{t-1}\cdot 3^{t-1}+\ldots+x_1\cdot 3+x_0=x_p\cdot 3^p+\ldots+(x_{t+1}+1)3^{t+1}-3^t+x_{t-1}\cdot 3^{t-1}+\ldots+x_1\cdot 3+x_0$. Continuăm procedeul, până eliminăm toate numerele x_i egale cu 2.

Avem: $2016=2202200_{(3)}=2\cdot 3^6+2\cdot 3^5+2\cdot 3^3+2\cdot 3^2=3^7-3^6+3^6-3^5+3^4-3^3+3^3-3^2=3^7-3^5+3^4-3^2$.

VI.210. *Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)$. Determinaţi $k,x\in\mathbb{N},k\neq 0$, pentru care $(2k)!!=x^2+2$.*

Denisa Drăghia, elevă, Craiova

Soluţie. Pentru $k=1$, obţinem $x^2+2=2$, deci $x=0$. Când $k>1$, avem că $(2k)!!$ este multiplu de 4, prin urmare $x^2=M_4+2$, contradicţie. Rămâne unica soluţie $k=1,x=0$.

VI.211. *Fie $x,y\in\mathbb{N}^*$, $x>y$, astfel încât $x-2016y^2=y-2015x^2$. Arătaţi că $x-y$ este pătrat perfect.*

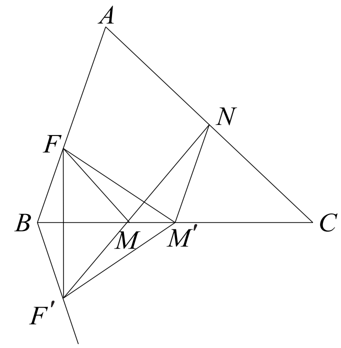
Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Observăm că $x^2=2016(x^2-y^2)+(x-y)=(x-y)[2016(x+y)+1]$ şi $y^2=2015(x^2-y^2)+(x-y)=(x-y)[2015(x+y)+1]$. Se arată uşor că numerele $2016(x+y)+1$ şi $2015(x+y)+1$ sunt relativ prime, prin urmare $x-y=(x^2,y^2)=(x,y)^2$, deci $x-y$ este pătrat perfect.

VI.212. *Pe latura AB a triunghiului ascuţitunghic ABC se fixează un punct F astfel încât $m(\widehat{ACF})+2m(\widehat{BCF})<90^\circ$. Determinaţi poziţiile punctelor $M\in(BC)$ şi $N\in(AC)$ pentru care suma $FM+MN$ ste minimă.*

Mariana-Liliana Popescu, Suceava

Soluţie. Pentru un punct fixat $N\in(AC)$, punctul $M\in(BC)$ care minimizează suma $FM+MN$ este $\{M\}=F'N\cap BC$, unde F' este simetricul lui F faţă de BC. Într-adevăr, pentru $M'\in BC$, avem: $FM'+M'N=F'M'+M'N\geq F'N=F'M+MN$. Apoi, suma $FM+MN=F'N$ va fi minimă când $F'N\perp AC$, deci când $N=Pr_{AC}F'$. Din ipoteza problemei, unghiul $\widehat{F'CA}$ este ascuţit, prin urmare $N\in(AC)$.



VI.213. *Pe foaie este desenat un triunghi şi două dintre mediatoarele sale. Folosind doar o riglă negradată, construiţi cea de-a treia mediatoare.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Fie d_1 şi d_2 mediatoarele desenate ale laturilor BC şi AC ale triunghiului ABC, care trec prin mijloacele M respectiv N ale acestor laturi şi se intersectează în O. Fie $\{G\}=AM\cap BN$ centrul de greutate al triunghiului şi $\{P\}=CG\cap AB$; atunci P va fi mijlocul lui AB, iar cea de-a treia mediatoare este dreapta OP. Toate construcţiile descrise se pot efectua folosind doar rigla negradată.

Clasa a VII-a

VII.207. *Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $x^3+y^3=x^4+y^4=1$.*

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Dacă $x<0, y<0$, atunci $x^3+y^3<0$, fals. Dacă $x<0$ şi $y>0$, atunci $y^3=1-x^3>1$, deci $y>1$; deducem că $x^4+y^4>0+1=1$, fals. Rămâne că $x\geq 0$, $y\geq 0$ şi, cum $x^4+y^4=1$, rezultă că $0\leq x\leq 1$ şi $0\leq y\leq 1$. În aceste condiţii, $1=x^3+y^3\geq x^4+y^4=1$, de unde $(x,y)\in\{(0,1);(1,0)\}$.

VII.208. *Demonstraţi că numărul $N=2016^{n+1}-2015n-2016$, $n\in\mathbb{N}^*$, are cel puţin 27 de divizori naturali.*

Alessandro Ventullo, Milano, Italia

Soluţie. Folosind faptul că $(a+1)^n=M_{a^2}+na+1$, obţinem că $2016^{n+1}=M_{2015^2}+(n+1)\cdot 2015+1$ şi atunci N se divide cu 2015^2. Cum $2015^2=5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$ are 27 de divizori, urmează concluzia problemei.

VII.209. *Arătaţi că, pentru orice număr real a, are loc identitatea $(10a^2-8a)^2+(11a^2-20a+8)^2+(12a^2-20a+8)^2=(13a^2-20a+8)^2+(14a^2-20a+8)^2$.*

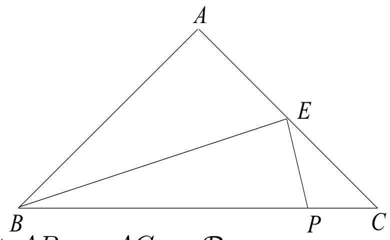
Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Avem: $(13a^2-20a+8)^2-(11a^2-20a+8)^2+(14a^2-20a+8)^2-(12a^2-20a+8)^2=2a^2(24a^2-40a+16)+2a^2(26a^2-40a+16)=2a^2(50a^2-80a+32)=4a^2(5a-4)^2=(10a^2-8a)^2$.

VII.210. *Se consideră triunghiul isosel ABC cu $m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=40°$. Notăm cu E piciorul bisectoarei din B şi fie $P\in(BC)$ astfel încât $PE=PC$. Arătaţi că $\mathcal{P}_{ABE}=\dfrac{AB^2}{AE}$.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Din asemănarea evidentă $\triangle PEC\sim\triangle ACB$, obţinem că $AB\cdot CE=PE\cdot BC$.



Folosind teorema bisectoarei, deducem că $AE \cdot BC = AB \cdot CE$; atunci $PE \cdot BC = AE \cdot BC$, aşadar $AE = PE$. Se observă uşor că $m(\widehat{BPE}) = m(\widehat{BEP}) = 80°$, prin urmare $BE = BP$. Astfel, $BC = BP + PC = BE + AE$; înlocuind în teorema bisectoarei, obţinem: $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{BE + AE}{AB} \Rightarrow \dfrac{EC + EA}{EA} = \dfrac{BE + AE + AB}{AB} \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{\mathcal{P}_{ABE}}{AB} \Rightarrow \mathcal{P}_{ABE} = \dfrac{AB^2}{AE}$.

VII.211. *Fie M şi N mijloacele laturilor neparalele AD respectiv BC ale trapezului $ABCD$. Dacă $\{S\} = AN \cap CM$, $\{T\} = BM \cap DN$, demonstraţi că $ST \| AB$ şi calculaţi lungimea segmentului ST în funcţie de bazele trapezului.*

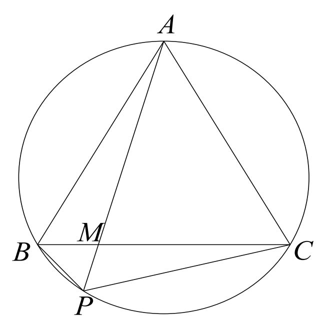
Mihail Frăsilă şi Constantin Petrea, Paşcani

Soluţie. Notăm $a = AB$, $b = CD$ $(a > b)$, $\{Q\} = AN \cap BM$, $\{O\} = MC \cap ND$, $\{E\} = AD \cap BC$ şi $x = NB = NC$. Din asemănări imediate, obţinem că $EC = \dfrac{2bx}{a-b}$, $NE = \dfrac{(a+b)x}{a-b}$, $\dfrac{NB}{NE} = \dfrac{a-b}{a+b}$, $\dfrac{DE}{DM} = \dfrac{EC}{CN} = \dfrac{2b}{a-b}$. Teorema lui Menelaus aplicată în $\triangle EMB$ cu transversala $T - N - D$ arată că $\dfrac{DE}{DM} \cdot \dfrac{TM}{TB} \cdot \dfrac{NB}{NE} = 1$, de unde $\dfrac{TB}{TM} = \dfrac{2b}{a+b}$. Tot din teorema lui Menelaus, în $\triangle BNT$ cu transversala $C - O - M$, deducem că $\dfrac{ON}{NT} \cdot \dfrac{MT}{MB} \cdot \dfrac{BC}{CN} = 1$, prin urmare $\dfrac{ON}{OT} = \dfrac{a-b}{2(a+b)}$. Analog se arată că $\dfrac{OM}{OS} = \dfrac{a-b}{2(a+b)}$ şi, de aici, $MN \| ST$. Acum, $\dfrac{ON}{OT} = \dfrac{MN}{ST}$, aşadar $\dfrac{a-b}{2(a+b)} = \dfrac{a+b}{2ST}$, adică $ST = \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$.

VII.212. *Punctul P este situat pe arcul mic $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC. Notăm $\{M\} = BC \cap AP$. Ştiind că $19\mathcal{P}_{ABC} = 27\mathcal{P}_{PBC}$, arătaţi că $AM = 0,9 \cdot BC$.*

Constantin Petrea, Paşcani

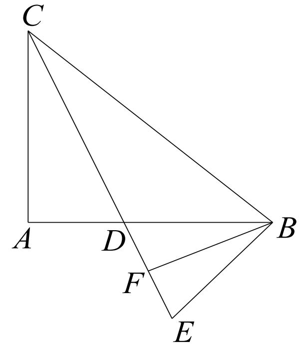
Soluţie. Notăm $a = AB$, $b = AM$; din asemănarea $\triangle ABM \sim \triangle APB$ obţinem că $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AB}{AP}$, prin urmare $AP = \dfrac{a^2}{b}$. Din teorema lui Van Schooten, avem că $PA = PB + PC$, deci $\mathcal{P}_{PBC} = BC + PA = a + \dfrac{a^2}{b}$. Ipoteza problemei conduce la $57a = 27(a + \dfrac{a^2}{b})$, de unde concluzia este imediată.



VII.213. *Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarea CD a unghiului $\widehat{C}$, $D \in AB$, intersectează perpendiculara în B pe BC în punctul E. Demonstraţi că $2BD^2 = CE \cdot DE$.*

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Fie $BF \perp DE$, $F \in DE$; deoarece $\triangle BDE$ este isoscel $(m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{BED}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C}))$, rezultă că $DF = FE$. Aplicăm teorema catatei în $\triangle BCE$: $BE^2 = CE \cdot FE \Rightarrow BD^2 = CE \cdot \frac{DE}{2}$ şi, de aici, cerinţa problemei.



Clasa a VIII-a

VIII.207. *Fie x, y numere reale astfel încât $xy = x + y$. Arătaţi că x şi y fie sunt simultan numere raţionale, fie sunt simultan numere iraţionale.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Relaţia din enunţ se poate scrie sub forma $(x + 1)(y + 1) = 1$. Este evident că $x \neq -1$ şi $y \neq -1$. Dacă, prin absurd, $x \in \mathbb{Q}$ şi $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, atunci $x+1 \in \mathbb{Q}^*$, $y + 1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, deci $(x + 1)(y + 1) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, contradicţie.

VIII.208. *Determinaţi numerele reale x, y, z cu proprietăţile: $x - y + z = 2$, $xz - yz = (xy - 1)^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.*

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Ridicând la pătrat prima relaţie şi ţinând cont de celelalte două, obţinem că $6 - 2xy + 2(xy - 1)^2 = 4$, deci $(xy)^2 - 3(xy) + 2 = 0$, de unde $xy \in \{1, 2\}$. Rezultă că sistemul dat este echivalent cu sistemele:

(i) $x - y = 2 - z$; $xy = 2$; $z(x - y) = 1$ şi

(ii) $x - y = 2 - z$; $xy = 1$; $z(x - y) = 0$.

Sistemul (i) conduce la ecuaţia $z^2 - 2z + 1 = 0$, cu soluţia $z = 1$, apoi la $x - y = 1$, $xy = 2$, adică $(x, y, z) \in \{(2, 1, 1); (-1, -2, 1)\}$. Sistemul (ii) conduce la ecuaţia $z(2 - z) = 0$, cu soluţiile $z \in \{0, 2\}$ şi, după înlocuire, obţinem $(x, y, z) \in \{(1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 0); (1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, 0); (1, 1, 2); (-1, -1, 2)\}$. În total, sistemul din enunţ are şase soluţii,

VIII.209. *Determinaţi perechile de numere întregi $(x, y) \neq (0, 0)$ pentru care $x^4 + 2x^3 = x + y + y^2$ şi $y^4 + 2y^3 = y + x + x^2$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Scăzând ecuaţiile membru cu membru, obţinem:

$$(x - y)[(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + 2(x^2 + xy + y^2) + (x + y)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)[x^2(x + y + 1) + y^2(x + y + 1) + (x + y)(x + y + 1)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1)(x^2 + y^2 + x + y) = 0.$$

Dacă $x = y$, ecuaţiile din enunţ devin $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1)(x+2) = 0$, deci $x \in \{0, 1, -1, -2\}$; găsim soluţiile $(1, 1)$; $(-1, -1)$ şi $(-2, -2)$. Dacă $y = -x - 1$, ecuaţiile sunt echivalente cu $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$ (la fel ca mai sus); găsim soluţiile $(0, -1)$; $(1, -2)$; $(-1, 0)$ şi $(-2, 1)$. In sfârşit, dacă $x^2 + y^2 + x + y = 0$, cum $x(x + 1) \geq 0$, $y(y + 1) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $x, y \in \{-1, 0\}$ şi nu vom găsi soluţii noi.

Soluţiile sistemului din enunţ sunt $(-2,-2)$; $(-1,-1)$; $(1,1)$; $(0,-1)$; $(-1,0)$; $(1,-2)$ şi $(-2,1)$.

VIII.210. *Dacă $x,y,z\in(0,1]$, demonstraţi că:*

$$\frac{xy}{xy+x+y}+\frac{yz}{yz+y+z}+\frac{zx}{zx+z+x}\le 1.$$

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţie. În fapt, fiecare dintre termenii sumei este cel mult egal cu $\frac{1}{3}$. Într-adevăr,

$$\frac{xy}{xy+x+y}=\frac{x}{x+1+\frac{x}{y}}\le\frac{x}{x+1+x}=\frac{x}{2x+1}\le\frac{1}{3},\quad\forall x,y\in(0,1].$$

VIII.211. *Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ sunt astfel încât $a+b+c=6$, arătaţi că*

$$\frac{2016+2b}{a+8}+\frac{2016+2c}{b+8}+\frac{2016+2a}{c+8}\ge 606.$$

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Observăm că $\sum\frac{2016+2b}{a+8}=2000\cdot\sum\frac{1}{a+8}+2\cdot\sum\frac{b+8}{a+8}$. Din inegalitatea lui Bergström, $\sum\frac{1}{a+8}\ge\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c+24}=\frac{3}{10}$; din inegalitatea mediilor, $\sum\frac{b+8}{a+8}\ge 3\sqrt[3]{\prod\frac{b+8}{a+8}}=3$. Acum, cerinţa problemei este imediată.

VIII.212. *Două plane perpendiculare intersectează o sferă de rază R după două cercuri de raze a respectiv b. Dacă distanţa de la centrul sferei la dreapta de intersecţie a planelor este c, arătaţi că $a+b+c\le R\sqrt{6}$.*

Maria Rusu, Târgu Frumos

Soluţie. Fie O,O_1,O_2 centrul sferei şi centrele celor două cercuri de secţiune, $x=OO_1$ şi $y=OO_2$; atunci $x^2+y^2=c^2$, $x^2+a^2=R^2$ şi $y^2+b^2=R^2$. Obţinem că $a^2+b^2+c^2=2R^2$, de unde $R=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}}\ge\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{2+2+2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b+c)$, conform inegalităţii lui Bergström.

VIII.213. *Se consideră tetraedrul $VABC$ cu $VA\perp VB\perp VC\perp VA$. Notăm cu S_1,S_2,S_3 ariile triunghiurilor VAC,VAB şi VBC şi cu h distanţa de la V la planul (ABC). Arătaţi că*

$$\frac{1}{h^2}\ge\frac{S_1}{S_2^2+S_3^2}+\frac{S_2}{S_3^2+S_1^2}+\frac{S_3}{S_1^2+S_2^2}.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Dacă S este aria triunghiului ABC, atunci $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$. Notăm cu $\mathcal{V}$ volumul tetraedrului; cum $3\mathcal{V}=S_1\cdot VB=S_2\cdot VC$, obţinem că $9\mathcal{V}^2=2S_1\cdot S_2\cdot\frac{VB\cdot VC}{2}=2S_1S_2S_3$. Atunci $\frac{1}{h^2}=\frac{S^2}{9\mathcal{V}^2}=\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2}{2S_1S_2S_3}=\frac{S_1}{2S_2S_3}+\frac{S_2}{2S_1S_3}+\frac{S_3}{2S_1S_2}$. Inegalitatea dorită rezultă dacă ţinem seama de faptul că $2ab\le a^2+b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

Egalitatea se atinge când $S_1 = S_2 = S_3$, deci când $VA = VB = VC$.

Clasa a IX-a

IX.171. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ şi $2x_n + 3x_{n+2} \leq 5x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $x_n \leq 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Camelia Dană şi Ileana Didu, Craiova

Soluţie. În relaţia $2x_{k-2} - 5x_{k-1} + 3x_k \leq 0$ dăm lui k valorile $2, 3, \ldots, n$ şi sumăm inegalităţile obţinute; rezultă că $3x_n - 2x_{n-1} - 3x_1 + 2x_0 \leq 0$, deci $3x_n \leq 2x_{n-1} + 3$. Inegalitatea dorită se demonstrează acum uşor prin inducţie matematică, observând că $x_n \leq \frac{2}{3}x_{n-1} + 1 \leq \frac{2}{3} \cdot 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] + 1 = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

IX.172. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia*

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + (abc - 1)^2.$$

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Ecuaţia este simetrică, deci putem presupune $a \geq b \geq c$. Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{abc}{2}(abc - 4) + \frac{a^2}{2}(b^2c^2 - 2) + b(a - b) + c(b - c) + ac + 1 = 0.$$

Dacă $bc \geq 2$, evident că $a \geq 2$ şi atunci fiecare termen al sumei din stânga este nenegativ, ultimul fiind chiar strict pozitiv; ecuaţia nu are soluţii în acest caz. Rămâne că $bc = 1$, deci $b = c = 1$ şi, în acest caz, ecuaţia este verificată pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.

Soluţiile ecuaţiei sunt tripletele $(a, 1, 1); (1, a, 1); (1, 1, a), a \in \mathbb{N}^*$.

IX.173. a) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $\cos(a + b) \neq \pm\sin(a - b)$; arătaţi că*

$$\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg}(a + b) + \operatorname{tg} 2b = \operatorname{tg}(a + b) \cdot \frac{3\cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)}{\cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)}.$$

b) *Demonstraţi că* $\operatorname{tg} 20° - \operatorname{ctg} 50° + \operatorname{tg} 80° = 3\sqrt{3}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. a) Se verifică uşor egalitatea $\cos 2a \cos 2b = (\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^2 b - \sin^2 b) = \cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)$. Rezultă că

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b &= \frac{\sin 2(a + b)}{\cos 2a \cos 2b} = \frac{2\sin(a + b)\cos(a + b)}{\cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)} = \\ &= \operatorname{tg}(a + b) \cdot \frac{2\cos^2(a + b)}{\cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)} = \\ &= \operatorname{tg}(a + b) \cdot \left[\frac{3\cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)}{\cos^2(a + b) - \sin^2(a - b)} - 1\right],\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Luăm $a = 10°$, $b = 70°$ în identitatea de la a); în membrul stâng vom avea $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 80° + \operatorname{tg} 140° = \operatorname{tg} 20° - \operatorname{ctg} 50° + \operatorname{tg} 80°$, iar în cel drept

$$\operatorname{tg} 80° \cdot \frac{3\cos^2 80° - 3/4}{\cos^2 80° - 3/4} = 3 \cdot \frac{\sin 80°(4\cos^2 80° - 1)}{\cos 80°(4\cos^2 80° - 3)} = 3 \cdot \frac{\sin 240°}{\cos 240°} = 3\sqrt{3}.$$

IX.174. *Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $m(\widehat{DAC}) = 20°$, $m(\widehat{DCA}) = 45°$, $m(\widehat{BAC}) = 30°$ şi $m(\widehat{BCA}) = 60°$. Demonstraţi că diagonalele AC şi BD nu sunt perpendiculare.*

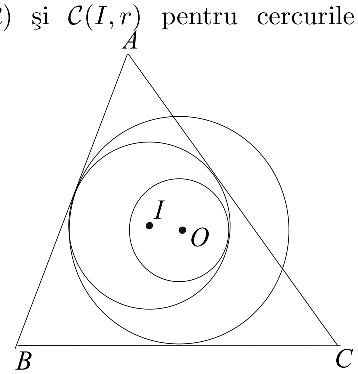
Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Notăm cu R_1 şi R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ADC şi ABC; din teorema sinusurilor, obţinem că $AC = 2R_2 = 2R_1 \sin 115°$, deci $R_2 = R_1 \cdot \sin 115°$. Dacă, prin absurd, $AC \perp BD$, atunci $CO = DC \cdot \cos 45° = BC \cdot \cos 60°$ (unde $\{O\} = AC \cap BD$), relaţie care devine succesiv: $\sqrt{2} \cdot DC = BC \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot 2R_1 \sin 20° = 2R_2 \sin 30° \Leftrightarrow 2\sqrt{2}R_1 \sin 20° = R_1 \sin 65° \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \sin 20° = \sin(45° + 20°) \Leftrightarrow 4 \sin 20° = \cos 20° + \sin 20° \Leftrightarrow \operatorname{tg} 20° = \dfrac{1}{3}$. Ultima relaţie nu este adevărată ($\operatorname{tg} 20° = 0,36397\ldots \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$), deci diagonalele AC şi BD nu sunt perpendiculare.

IX.175. *Fie dat un triunghi ABC şi fie O centrul cercului circumscris lui. Să se calculeze aria coroanei determinată de cercurile cu centrele în O şi tangente la cercul înscris triunghiului dat.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Vom utiliza notaţiile uzuale $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}(I, r)$ pentru cercurile circumscris şi înscris triunghiului ABC. Distingem trei cazuri: I. $O \in Int(\mathcal{C}(I, r))$, II. $O \in \mathcal{C}(I, r)$ şi III. $O \in Ext(\mathcal{C}(I, r))$, care, datorită relaţiei lui Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$, se reformulează astfel: I. $R < (\sqrt{2} + 1)r$, II. $R = (\sqrt{2} + 1)r$ şi III. $R = (\sqrt{2} + 1)r$ (într-adevăr, $O \in \mathcal{C}(I.r) \Leftrightarrow OI = r \Leftrightarrow R^2 - 2Rr = r^2 \Leftrightarrow R = (\sqrt{2} + 1)r$). Notăm cu K aria coroanei. Avem:



I. $K = \pi(OI + r)^2 - \pi(r - OI)^2 = 4\pi r \cdot OI = 4\pi r\sqrt{R^2 - 2Rr}$;

II. $K = \pi(2r)^2 - \pi \cdot 0^2 = 4\pi r^2$;

III. $K = \pi(OI + r)^2 - \pi(OI - r)^2 = 4\pi r \cdot OI = 4\pi r\sqrt{R^2 - 2Rr}$. Cum în cazul II avem $R = (\sqrt{2} + 1)r$ şi constatăm uşor că $\sqrt{R^2 - 2Rr}\Big|_{R=(\sqrt{2}+1)r} = r$, urmează că în toate cazurile aria coroanei este dată de formula

$$K = 4\pi r\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Notă. Pentru aria coroanei K' determinată de cercurile cu centrul în I şi tangentele la $\mathcal{C}(O, R)$ obţinem formula $K' = 4\pi R\sqrt{R^2 - 2Rr}$ (într-adevăr, $K' = \pi(R + OI)^2 - \pi(R - OI)^2 = 4\pi R \cdot OI$ etc.).

Clasa a X-a

X.171. *Demonstraţi că numărul* $A = \left(\arccos \frac{10}{7\sqrt{7}}\right) : \left(\arccos \frac{5}{2\sqrt{7}}\right)$ *este natural.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Notăm $a = \arccos \frac{5}{2\sqrt{7}}$ şi $b = \arccos \frac{10}{7\sqrt{7}}$; atunci $a, b \in (0, \pi)$, $\cos a = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ şi $\cos b = \frac{10}{7\sqrt{7}}$. Cum $\frac{5}{2\sqrt{7}} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, rezultă că $a < \frac{\pi}{3}$. În plus, $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a = \frac{10}{7\sqrt{7}} = \cos b$, cu $3a, b \in (0, \pi)$. Deducem că $3a = b$, aşadar $A = b : a = 3 \in \mathbb{N}$.

X.172. *Fie* $a, x, y, z \in (0, 1)$ *sau* $a, x, y, z \in (1, \infty)$ *astfel încât* $\log_a x + \log_a y + \log_a z + \log_x a + \log_y a + \log_z a = 10$. *Arătaţi că* $\min\{a, a^9\} \le xyz \le \max\{a, a^9\}$.

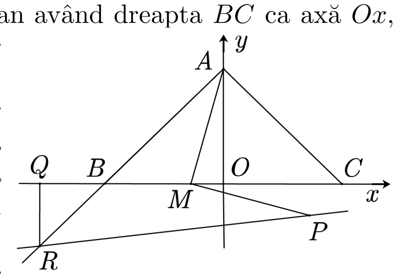
Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Dacă $\alpha = \log_a x + \log_a y + \log_a z$ şi $\beta = \log_x a + \log_y a + \log_z a$, atunci $a\beta \ge 9$ (inegalitatea mediilor $MH \le MA$), de unde $\alpha(10 - \alpha) \ge 9$, prin urmare $\alpha \in [1, 9]$. Rezultă că $1 \le \log_a xyz \le 9$, adică tocmai cerinţa problemei.

X.173. *Punctul* M *este situat pe ipotenuza* BC *a triunghiului dreptunghic isoscel* ABC. *Pe perpendiculara în* M *pe* AM *se consideră punctul* P *astfel încât* $AM = MP$ *şi* P *se află în semiplanul determinat de dreapta* AM *şi punctul* C. *Punctul* Q *este simetricul lui* C *faţă de* M, *iar perpendiculara în* Q *pe* BC *intersectează* AB *în* R. *Demonstraţi că dreapta* RP *trece printr-un punct fix, indiferent care ar fi poziţia lui* M *pe segmentul* BC.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Raportăm planul la un reper cartezian având dreapta BC ca axă Ox, mediatoarea lui BC drept axă Oy şi unitatea celor două axe egală cu OA. Avem că $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ şi $M(a, 0)$, unde $a \in (-1, 1)$. Deducem uşor că $P(1+a, a)$, $Q(2a-1, 0)$ şi $R(2a-1, 2a)$. Ecuaţia dreptei PR este $y(a-2) = ax-3a$ şi această dreaptă trece prin punctul fix $S(3, 0)$, care este simetricul lui B faţă de C.



X.174. *Numerele complexe nenule* a, b, c *sunt astfel încât* $|a| \le 1$, $|b| \le 1$, $|c| \le 1$ *şi* $|a + b + c| \le 1$. *Arătaţi că* $|z - a| + |z - b| + |z - c| + |z + a + b + c| \ge |a + b|^2 + |b + c|^2 + |a + c|^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Tidor Pricope, elev, Botoşani

Soluţie. Notăm $d = -a - b - c$; atunci $a + b + c + d = 0$ şi $|d| \le 1$. Suma din membrul stâng al inegalităţii din enunţ devine $|z-a|+|z-b|+|z-c|+|z-d| = \sum |z-a|$. Avem:

$$\begin{aligned}\sum |z-a| &\ge \sum |a| \cdot |z-a| = \sum |\overline{a}| \cdot |z-a| = \sum |z\overline{a} - |a|^2| \ge \\ &\ge |z(\overline{a+b+c+d}) - |a|^2 - |b|^2 - |c|^2 - |d|^2| = \\ &= \sum |a|^2 = |a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+d|^2,\end{aligned}$$

ultima egalitate rezultând din identitatea lui Hlawka.

X.175. *Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\alpha + \beta| \geq 2$. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2|$, demonstraţi că $|z_1 + z_2| \leq |\alpha z_1 + \beta z_2|$.*

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţia 1. Dacă $z_1 = 0$, atunci $z_2 = 0$ şi concluzia este adevărată. Dacă $z_1 \neq 0$, atunci $z_2 \neq 0$ şi avem de dovedit că $\left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| \leq \left|\alpha + \beta \cdot \frac{z_2}{z_1}\right|$. Fie $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x^2 + y^2 = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1$; inegalitatea devine $1 + 2x + x^2 + y^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2$, sau $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta x - 2x - 2 \geq 0$, unde $x \in [-1, 1]$ şi $|\alpha + \beta| \geq 2$. Pentru a demonstra această ultimă inegalitate, considerăm funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2(\alpha\beta - 1)x + (\alpha^2 + \beta^2 - 2)$. Cum $f(1) = (\alpha + \beta)^2 - 4 \geq 0$ şi $f(-1) = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, rezultă că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$ şi, cu aceasta, soluţia este completă.

Soluţia 2 (**Dan Dumitrescu**, elev, Rm. Vâlcea)**.** Punctele $A(z_1)$ şi $B(z_2)$ se află pe cercul cu centrul în origine şi de rază egală cu $|z_1| = |z_2|$. Fie $D\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ mijlocul coardei AB. Avem $OD \perp AB$.

Evident, este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru $\alpha + \beta \geq 2$. Să o scriem în forma $\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right| \leq \left|\frac{\alpha z_1 + \beta z_2}{2}\right|$.

Dacă $\alpha + \beta = 2$, atunci punctul $M\left(\frac{\alpha z_1 + \beta z_2}{2}\right)$ este pe dreapta AB şi inegalitatea revine la inegalitatea geometrică $OD \leq OM$, adevărată. Mai mult, avem egalitate dacă şi numai dacă $\alpha = \beta = 1$.

Dacă $\alpha + \beta > 2$, atunci punctul M se află de partea dreptei AB ce nu conţine originea, după cum rezultă din egalitatea $\frac{\alpha z_1 + \beta z_2}{2} = \frac{\alpha z_1 + (\beta - \gamma) z_2}{2} + \frac{\gamma}{2} z_2$, cu $\gamma > 0$, şi faptul că $\frac{\alpha z_1 + (\beta - \gamma) z_2}{2} \in AB$. Ca urmare, în acest caz $|z_1 + z_2| < |\alpha z_1 + \beta z_2|$.

Clasa a XI-a

XI.171. *Fie a, b, c, d numere complexe astfel încât $a(b + c) = d(b + c) = 1$ şi $b^2 + ad = c^2 + ad = 0$. Demonstraţi că $b(a + d) = c(a + d) = 1$ şi $a^2 + bc = d^2 + bc = 0$.*

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Condiţiile din enunţ revin la faptul că $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci cele două matrice din stânga sunt inverse una celeilalte, deci $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi, de aici, rezultă cerinţele problemei.

XI.172. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $A^2B + BA^2 = AB^2 + B^2A$ şi $A - B$ este inversabilă. Demonstraţi că A şi B nu pot fi simultan inversabile.*

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. Relaţia din enunţ se scrie sub forma $A(A - B)B = -B(A - B)A$. Cum matricele sunt de ordin impar, prin trecere la determinanţi obţinem că $\det A \cdot$

$\det(A-B)\cdot\det B=-\det B\cdot\det(A-B)\cdot\det A$. Avem că $\det(A-B)\neq 0$, prin urmare $2\det A\cdot\det B=0$ şi, de aici, rezultă concluzia problemei.

XI.173. *Fie $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2+B^2+I_2=AB$. Arătaţi că $AB=BA$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Deoarece $A^2=aA-xI_2$, $B^2=bB-yI_2$, de unde $a=\operatorname{Tr}A$, $x=\det A$, $b=\operatorname{Tr}B$, $y=\det B$, egalitatea din enunţ se rescrie sub forma $(A-bI_2)(B-aI_2)=(ab-x-y+1)I_2$.

Dacă $ab-x-y+1\neq 0$, matricele $A-bI_2$ şi $B-aI_2$ sunt inversabile, iar $(B-aI_2)(A-bI_2)=(ab-x-y+1)I_2$. Desfăcând parantezele, obţinem că $BA=A^2+B^2+I_2=AB$.

Dacă $ab-x-y+1=0$, atunci $(A-bI_2)(B-aI_2)=O_2$, de unde $\det(A-bI_2)=0$ sau $\det(B-aI_2)=0$. Dacă $\det(A-BI_2)\neq 0$, rezultă că $B-aI_2=O_2$, deci $B=aI_2$, prin urmare $AB=BA$; la fel se procedează dacă $\det(B-aI_2)\neq 0$. Dacă $\det(A-bI_2)=\det(B-aI_2)=0$, obţinem că $x-ab+b^2=y-ab+a^2=0$; atunci condiţia $ab-x-y+1=0$ devine $a^2-ab+b^2+1=0$, imposibil pentru $a,b\in\mathbb{R}$.

În concluzie, $AB=BA$. Remarcăm că problema are obiect: matricele $A=B=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ satisfac ipoteza.

XI.174. *Calculaţi derivata de ordin n a funcţiei $f:\mathbb{R}\backslash\{a\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^n}{x-a}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$ este dat.*

Lucian Tuţescu şi Teodora Rădulescu, Craiova

Soluţie. Avem că $f(x)=\dfrac{x^n-a^n+a^n}{x-a}=(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\ldots+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1})+\dfrac{a^n}{x-a}$. Derivata de ordin n a parantezei este nulă, deci $f^{(n)}(x)=a^n\cdot\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{(n)}=\dfrac{a^n\cdot(-1)^n\cdot n!}{(x-a)^{n+1}}$.

XI.175. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$, cu $a,b\in\mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $d\in\mathbb{R}_+^*$, există $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_2-x_1=d$ şi $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$. (O extindere a teoremei de medie a lui Lagrange.)*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=\dfrac{1}{d}[f(x+d)-f(x)]-a$. Evident, g este continuă.

Dacă există $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(x_0)=0$, luăm $x_1=x_0$, $x_2=x_0+d$ şi constatăm uşor că $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_2}=a$.

Arătăm că un astfel de punct x_0 există, raţionând prin reducere la absurd. Să presupunem, aşadar, că $g(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Din continuitatea funcţiei g rezultă că $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ sau $g(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să presupunem că suntem în cazul $g(x)>0$,

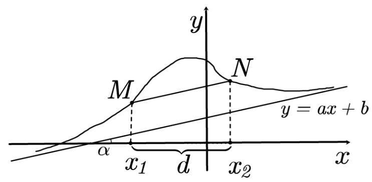
$\forall x \in \mathbb{R}$; în al doilea caz se procedează la fel. Prin urmare, avem

$$f(x+d) - f(x) > ad, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de unde $f(x) < f(x+d) - ad$ şi $f(x+d) > f(x) + ad$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Utilizând în mod repetat aceste ultime inegalităţi, obţinem:

$$f(-nd)+nad < \ldots < f(-d)+ad < f(0) < f(d)-ad < f(2d)-2ad < \ldots < f(nd)-nad,$$

de unde, trecând la limită pentru $n \to \infty$, obţinem $b < f(0) < b$, ceea ce este absurd. Afirmaţia din enunţ este complet demonstrată.



Notă. În loc să se impună ca lungimea proiecţiei coardei să fie d, se poate cere ca lungimea coardei să fie d (proiecţia va avea lungimea $d|\cos\alpha|$).

Clasa a XII-a

XII.171. *Dacă $a \in \mathbb{R}^*$, arătaţi că* $\displaystyle\int_4^5 \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx < \frac{\ln 2}{2}$.

Aurel Chiriţă, Slatina

Soluţie. Se arată uşor că $\ln x < \sqrt{x}$, $\forall x \in (4, \infty)$; atunci $\dfrac{\ln^2 x}{x^2+a^2} < \dfrac{x}{x^2+a^2}$. Integrând această inegalitate pe intervalul $[4,5]$, obţinem că $\displaystyle\int_4^5 \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}dx < \frac{1}{2}\ln\frac{25+a^2}{16+a^2}$ şi este evident că $\dfrac{25+a^2}{16+a^2} < 2$.

XII.172. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă. Demonstraţi că*

$$\lim_{n\to\infty} n(f(1) + f'(1) - n(f(1) - n\int_0^1 x^n f(x)dx)) = f(1) + 3f'(1) + f''(1).$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Integrând de două ori prin părţi, obţinem că $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{1}{n+1}f(1) - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(f'(1) - \int_0^1 x^n f''(x)dx\right)$. Şirul a cărui limită dorim să o calculăm capătă forma

$$\frac{n}{n+1}f(1) + \frac{n(3n+2)}{(n+1)(n+2)}f'(1) + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \cdot n\int_0^1 x^n f''(x)dx.$$

Trecând la limită şi folosind faptul că, dacă $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)dx = h(1)$, obţinem concluzia dorită.

XII.173. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}\cdot\displaystyle\int_0^n \frac{x^2+n^2}{2^{-x}+1}dx$.

D.M. Batineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Mai general, vom demonstra că:

Dacă $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *şi* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii caontinue şi există* $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\int_0^n f(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx = L\cdot\int_0^1 g(x)dx.$$

Considerăm funcţia $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - L$; atunci $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n h(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx + \dfrac{L}{n}\displaystyle\int_0^n g\left(\frac{x}{n}\right)dx$. Cu substituţia $\dfrac{x}{n} = t$, al doilea termen este egal cu $L\cdot\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$. Arătăm acum că primul termen tinde spre 0 când $n\to\infty$. Deoarece g este continuă pe $[0,1]$, există $M > 0$ astfel încât $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$. Dacă H este o primitivă a funcţiei $|h|$, avem:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\int_0^n h(x)g\left(\frac{x}{n}\right)dx\right| \leq M\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n |h(x)|dx =$$
$$= M\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n} = M\lim_{n\to\infty}\frac{H(n+1)-H(n)}{(n+1)-n} = M\cdot\int_n^{n+1}|h(x)|dx = 0,$$

pentru că $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$.

Particularizând $f(x) = \dfrac{1}{2^{-x}+1}$, $g(x) = 1 + x^2$, cum $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ şi $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}$, obţinem că limita cerută în enunţ este egală cu $\dfrac{4}{3}$.

XII.174. *Determinaţi polinoamele* $f = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$ *care au cel puţin două rădăcini întregi.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f şi $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, cum $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, rezultă că $x_3 \in \mathbb{Z}$. Atunci $a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \in \mathbb{Z}$ şi $b = -x_1x_2x_3 \in \mathbb{Z}$.

Renotăm $x_1 = n \in \mathbb{Z}$; din $f(n) = 0$ obţinem că $b = -n^3 - an$, iar $f = X^3 + aX - n^3 - an = (X-n)(X^2 + nX + a + n^2)$. Ecuaţia $x^2 + nx + a + n^2 = 0$ va avea rădăcinile întregi, prin urmare $\Delta = -4a - 3n^2 = p^2$, cu $p \in \mathbb{Z}$. Deducem că $a = -\dfrac{1}{4}(3n^2 + p^2)$, unde condiţia necesară şi suficientă pentru ca a sa fie număr întreg este ca n şi p să aibă aceeaşi paritate; atunci $x_{2,3} = \dfrac{-n \pm p}{2} \in \mathbb{Z}$.

În concluzie, polinoamele căutate sunt cele de forma $X^3 - \frac{1}{4}(3n^2+p^2)X + \frac{1}{4}(np^2 - n^3)$, unde $p, n \in \mathbb{Z}$ sunt numere cu aceeaşi paritate.

XII.175. *Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $125 | 2^k + 3^n$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. În inelul $\mathbb{Z}_{125}$, avem: $|U(\mathbb{Z}_{125})| = \varphi(125) = 125\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100$. Vom arăta că ordinul elementului $\widehat{2} \in U(\mathbb{Z}_{125})$ este 100: divizorii naturali ai lui 100 sunt $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, , 50, 100$ şi $\widehat{2}^1 = \widehat{2} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^2 = \widehat{4} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^4 = \widehat{16} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^5 = \widehat{32} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{10} = \widehat{24} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{20} = \widehat{76} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{25} = \widehat{57} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{50} = \widehat{124} \neq \widehat{1}$, $\widehat{2}^{100} = \widehat{1}$. Rezultă că $\widehat{2}$ este generator al grupului multiplicativ $(U(\mathbb{Z}_{125}), \cdot)$, deci $U(\mathbb{Z}_{125}) = \{\widehat{2}, \widehat{2}^2, \ldots, \widehat{2}^{100}\}$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$; cum $(3, 5^3) = 1$, deducem că $(-3^n, 5^3) = 1$, prin urmare $-\widehat{3}^n \in U(\mathbb{Z}_{125})$ şi atunci există $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ astfel încât $\widehat{2}^k = -\widehat{3}^n$. De aici, urmează concluzia problemei.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2016

A. Nivel gimnazial

G306. *Arătaţi că ecuaţia $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2016}$ are soluţii în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Notăm $a = 2016$; atunci $1 + \frac{1}{2016} = \frac{a+1}{a} = \frac{3a+3}{3a} = \frac{3a+3}{3a+2} \cdot \frac{3a+2}{3a+1} \cdot \frac{3a+1}{3a} = \left(1 + \frac{1}{3a+2}\right)\left(1 + \frac{1}{3a+1}\right)\left(1 + \frac{1}{3a}\right)$, deci putem considera $x = 3a$, $y = 3a+1$, $z = 3a+2$.

G307. *Determinaţi numerele naturale n pentru care $a = 2^n + 4^n + 8^n + 107^n$ este pătrat pefect.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Dacă $n = 0$, atunci $a = 2^2$; dacă $n = 1$, atunci $a = 11^2$. Vom arăta că $n = 0$ şi $n = 1$ sunt singurele soluţii.

Dacă $n \geq 3$ este impar, atunci $a = M_4 + M_4 + M_4 + (M_4 + 3) = M_4 + 3$, număr care nu poate fi pătrat perfect. Dacă $n \geq 2$ este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $(107^k)^2 < a < (107^k + 1)^2$. Inegalitatea din stânga este evidentă, iar cea din dreapta revine la $2^{2k} + 4^{2k} + 8^{2k} < 2 \cdot 107^k + 1$. Avem: $2 \cdot 107^k + 1 > 84^k = (64 + 16 + 4)^k > 64^k + 16^k + 4^k = 8^{2k} + 4^{2k} + 2^{2k}$. Cum a este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, rezultă că a nu este pătrat perfect.

G308. *Scrieţi numărul 3064^{3064} ca sumă de cuburi perfecte cu număr minim de termeni.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung (Maramureş)

Soluţie. Avem: $3064^{3064} = 3064^{3063} \cdot 3064 = 3064^{3063}(10^3 + 10^3 + 10^3 + 4^3) = (3064^{1021} \cdot 10)^3 + (3064^{1021} \cdot 10)^3 + (3064^{1021} \cdot 10)^3 + (3064^{1021} \cdot 4)^3$. Dovedim că nu există