Am folosit faptul că $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$; ca urmare, $\sum\limits_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\frac{1}{p^2}=$ $\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p^2}-2\sum\limits_{q=1}^{k}\frac{1}{(2q)^2}=\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{q=1}^{[\frac{k}{2}]}\frac{1}{q^2}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}$.

# Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2015

## A. Nivel gimnazial

**G286.** *Definim mulţimile $(A_n)_{n\geq 0}$ astfel: $A_0=\{1,2,\ldots,2015\}$; $A_1$ se obţine înlocuind fiecare element al lui $A_0$ cu suma tuturor celorllate elemente ale lui $A_0$; $A_2$ se obţine înlocuind fiecare element al lui $A_1$ su suma tuturor celorlate elemente ale lui $A_1$ ş.a.m.d. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, arătaţi că nu există elemente în $A_n$ care să fie congruente modulo 2016.*

**Vlad Tuchiluş, elev, Iaşi**

**Soluţie.** Să observăm că $|A_n|=2015$, $\forall n\in\mathbb{N}$: dacă $A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_{2015}\}$ şi $S=a_1+a_2+\ldots+a_{2015}$, atunci $A_{n+1}=\{S-a_1,S-a_2,\ldots,S-a_{2015}\}$. Pentru $a_i,a_j\in A_n$, $i\neq j$, corespondentele lor în $A_{n+1}, S-a_i$ şi $S-a_j$, au proprietatea că $|(S-a_i)-(S-a_j)|=|a_i-a_j|$, deci valorile absolute ale diferenţelor perechilor de elemente din $A_n$ sunt mereu aceleaşi. Astfel, o mulţime $A_n$ ar conţine elemente congruente modulo 2016 dacă şi numai dacă $A_0$ ar conţine astfel de elemente. Cum acest lucru nu se întâmplă, rezultă concluzia problemei.

**G287.** *Avem un număr nemărginit de jetoane de opt culori. Stabiliţi care este cel mai mic număr de jetoane care trebuie aşezate în rând astfel încât, pentru oricare două culori diferite, să se găsească în rând două jetoane vecine având aceste culori.*

**Ioan Viorel Codreanu, Satulung**

**Soluţie.** Pentru o culoare fixată $A$, un jeton de culoare $A$ trebuie să fie vecin cu jetoane de alte şapte culori. Cum un jeton nu are mai mult de doi vecini, în rând trebuie să existe măcar patru jetoane de culoare $A$; analog pentru celelalte culori. În total, trebuie să avem măcar $4\cdot 8=32$ jetoane. Un exemplu de aşezare a 32 jetoane este următorul:

$$12345678246857315271483618534762.$$

**G288.** *Fie $a,b,c$ numere naturale nenule astfel încât $3ab=2c^2$. Arătaţi că numărul $a^3+b^3+c^3$ este compus.*

**Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti**

**Soluţie.** Cum $3ab=2c^2$, rezultă că $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c)=$ $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$. Însă $a,b,c$ nu pot fi toate egale (relaţia $3ab=2c^2$ ar conduce la $3=2$) iar $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc=\frac{1}{2}((a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2)\geq\frac{1}{2}(0^2+(1+1)^2+(1+1)^2)=4$; rămâne să mai arătăm că $a+b-c\geq 2$. Presupunem că $a+b-c=1$; ipoteza $3ab=2c^2$ conduce la $3ab=2(a+b-1)^2$, adică $(a-1)^2+(b-1)^2+a^2+b^2+ab=0$, ceea ce este imposibil. Cu aceasta, soluţia este completă.

**G289.** *Fie $a, b, c, x, y, z$ numere reale pozitive astfel încât $a+b+c = 3$. Demonstraţi că*

$$36\left(\frac{x^3}{(a+b)^2}+\frac{y^3}{(b+c)^2}+\frac{z^3}{(c+a)^2}\right) \geq (x+y+z)^3.$$

**Robert Antohi, elev, Iaşi**

**Soluţia 1** (**Robert Antohi**, **Titu Zvonaru**). Aplicăm inegalitatea lui Hölder:

$$36\left(\sum \frac{x^3}{(a+b)^2}\right) = \left(\sum (a+b)\right)\cdot\left(\sum (a+b)\right)\cdot\left(\sum \frac{x^3}{(a+b)^2}\right) \geq \left(\sum x\right)^3.$$

**Soluţia 2** (**Titu Zvonaru**, **Nicuşor Zlota**). Aplicăm inegalitatea lui Radon:

$$\frac{x^3}{(a+b)^2}+\frac{y^3}{(b+c)^2}+\frac{z^3}{(c+a)^2} \geq \frac{(x+y+z)^3}{(a+b+b+c+c+a)^2} = \frac{(x+y+z)^3}{36}.$$

**G290.** *Fie $x, y, z$ numere reale cu $x, y, z \geq 1$ şi $n > 1$, astfel încât $x^2+y^2+z^2 = n^2+2$. Arătaţi că $x+y+z \geq n+2$.*

**Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti**

**Soluţia 1.** Prin ridicări succesive la pătrat se arată că

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \geq 1+\sqrt{1+a+b}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Aplicând acest rezultat, avem:

$$\begin{aligned} x+y+z &= \sqrt{1+x^2-1}+\sqrt{1+y^2-1}+\sqrt{1+z^2-1} \geq \\ &\geq 1+\sqrt{1+x^2+y^2-2}+\sqrt{1+z^2-1} \geq \\ &\geq 1+1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2-3} = n+2. \end{aligned}$$

Se atinge egalitatea pentru tripletele $(x, y, z) \in \{(n, 1, 1); (1, n, 1); (1, 1, n)\}$.

**Soluţia 2** (**Guriţă Vladimir**, elev, Craiova). Prin absurd, să presupunem că $x+y+z < n+2$. Atunci, avem succesiv: $x+y+z-2 < n \Leftrightarrow (x+y+z-2)^2 < n^2 \Leftrightarrow (x+y+z-2)^2 < x^2+y^2+z^2-2 \Leftrightarrow xy-x-y+1+yz-y-z+1+xz-x-z+1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(z-1) < 0$, ceea ce este fals. Ca urmare, $x+y+z \geq n+2$ şi se continuă la fel.

**G291.** *Dacă $a, b, c$ sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}+\frac{ab+bc+ca}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{4}{3}.$$

**Mircea Lascu şi Marius Stănean, Zalău**

**Soluţie.** Aplicând inegalitatea lui Bergström, avem:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{2b+c} &= \sum \frac{a^2}{2ab+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3\sum ab} = \\ &= \frac{\sum a^2+2\sum ab}{3\sum ab} = \frac{2}{3}+\frac{\sum a^2}{3\sum ab}. \end{aligned}$$

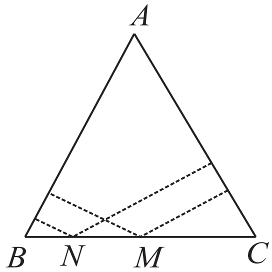
Atunci $\sum \frac{a}{2b+c} + \frac{ab+bc+ca}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sum a^2}{\sum ab} + \frac{\sum ab}{\sum a^2}\right) \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $a = b = c$.

**G292.** *Un triunghi ascuţitunghic $ABC$ are proprietatea că suma distanţelor de la oricare punct din interiorul triunghiul la laturile acestuia este egală cu lungimea înălţimii din $A$. Demonstraţi că triunghiul este echilateral.*

**Petru Asaftei, Iaşi**

**Soluţie.** Demonstram mai întâi următoarea lemă: ,,Dacă $d(P, AB) + d(P, AC) = h_a$, $\forall P \in (BC)$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral”.

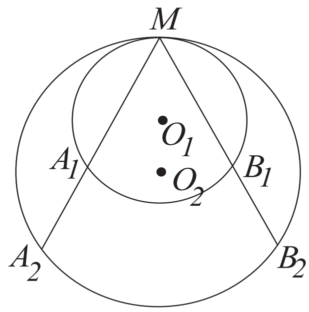
Într-adevăr, fie $M$ mijlocul lui $BC$ şi $N$ mijlocul lui $BM$. Luând $P = M$, obţinem că $\frac{h_b}{2} + \frac{h_c}{2} = h_a$; luând apoi $P = N$, obţinem că $\frac{3h_b}{4} + \frac{h_c}{4} = h_a$. De aici, $3h_b + h_c = 2h_b + 2h_c$, deci $h_b = h_c$. Înlocuind, deducem că $h_a = h_b = h_c$, adică $\triangle ABC$ este echilateral.




Revenim la soluţia problemei. Considerând punctul $P$ pe linia mijlocie $B'C'$ paralelă cu $BC$, condiţia $d(P, AB) + d(P, AC) + d(P, BC) = h_a$ revine la $d(P, AB) + d(P, AC) = \frac{h_a}{2}$, $\forall P \in (B'C')$. Cum $\frac{h_a}{2}$ este lungimea înălţimii din $A$ în $\triangle AB'C'$, lema precedentă arată că $\triangle AB'C'$ este echilateral, deci şi $\triangle ABC$ este tot echilateral.

**G293.** *Cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ trec prin punctul $M$. Două drepte $a$ şi $b$ trec prin $M$ şi taie a doua oară cercurile în $A_1$ şi $A_2$, respectiv în $B_1$ şi $B_2$. Dacă $MA_1 = A_1A_2$ şi $MB_1 = B_1B_2$, arătaţi că cercurile sunt tangente în $M$ şi $r_2 = 2r_1$.*

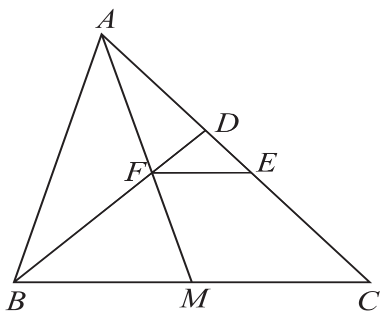
**Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj**




**Soluţie.** Omotetia de centru $M$ şi raport 2 transformă punctele $M, A_1, B_1$ în punctele $M, A_2, B_2$. Atunci cercul circumscris al $\triangle MA_1B_1$ (care este $\mathcal{C}_1$) va fi transformat în cercul circumscris al $\triangle MA_2B_2$ (care este $\mathcal{C}_2$). Transformatul lui $O_1$ va fi $O_2$, deci punctele $M, O_1, O_2$ sunt coliniare şi $2MO_1 = MO_2$, adică sunt adevărate cerinţele problemei.

**G294.** *Pe laturile $BC$ şi $AC$ ale triunghiului $ABC$ se consideră punctele $M$ respectiv $D$ şi fie $\{F\} = BD \cap AM$. Paralela prin $F$ la $BC$ taie $AC$ în punctul $E$. Dacă $\frac{1}{DE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CE} + \frac{1}{AC}$, arătaţi că $M$ este mijlocul lui $BC$.*

**Titu Zvonaru, Comăneşti**




**Soluţie.** Fie $x = \frac{BM}{MC}$, $y = \frac{DC}{DA}$; atunci $BM = \frac{ax}{x+1}$, $DC = \frac{by}{y+1}$, $DA = \frac{b}{y+1}$. Cu teorema lui

Menelaus în $\triangle AMC$ şi transversala $B-F-D$, obţinem că $\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{DC}{DA}\cdot\dfrac{FA}{FM}=1\Rightarrow$ $\dfrac{FA}{FM}=\dfrac{x+1}{xy}\Rightarrow\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{x+1}{xy}$. Atunci $EC=\dfrac{bxy}{xy+x+1}$, iar $DE=DC-EC=$ $\dfrac{by}{y+1}-\dfrac{bxy}{xy+x+1}=\dfrac{by}{(y+1)(xy+x+1)}$. Relaţia din enunţ devine succesiv

$$\begin{aligned}\frac{y}{xy+x+1}+\frac{1}{x(y+1)}+\frac{y}{(y+1)(xy+x+1)}&=1\\ \Leftrightarrow x^2y^2+2x^2y+x^2-xy^2-2xy-1&=0\\ \Leftrightarrow (x-1)(xy^2+2xy+x+1)&=0.\end{aligned}$$

Cea de-a doua paranteză fiind strict pozitivă, rezultă că $x=1$, deci $M$ este mijlocul laturii $BC$.

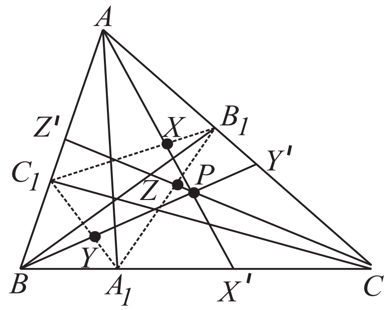
**G295.** *Fie triunghiul $ABC$ şi punctele $A_1\in BC$, $B_1\in AC$ şi $C_1\in AB$ astfel încât dreptele $AA_1, BB_1$ şi $CC_1$ să fie concurente. Punctele $X, Y$ şi $Z$ reprezintă intersecţiile dreptelor $AP, BP$ şi $CP$ cu segmentele $(B_1C_1)$, $(A_1C_1)$ respectiv $(A_1B_1)$, unde $P$ este un punct fixat în interiorul triunghiului $ABC$. Demonstraţi că dreptele $A_1X, B_1Y$ şi $C_1Z$ sunt concurente.*

**Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi**

**Soluţie.** În *RecMat 1/2005*, Titu Zvonaru şi Bogdan Ioniţă demonstrează următoarea

**Lemă.** În $\triangle ABC$, $AD$ este ceviană, iar o secantă taie dreptele $AB, AD$ şi $AC$ în $M, P$ respectiv $N$. Atunci $\dfrac{AM}{AB}\cdot\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{AC}{AN}\cdot\dfrac{PN}{PM}=1$.

Notăm $\{X'\}=AP\cap BC$, $\{Y'\}=BP\cap AC$, $\{Z'\}=CP\cap AB$. Aplicând de trei ori lema, obţinem: $\dfrac{AC_1}{AB}\cdot\dfrac{X'B}{X'C}\cdot\dfrac{AC}{AB_1}\cdot\dfrac{XB_1}{XC_1}=1$, $\dfrac{BA_1}{BC}\cdot\dfrac{Y'C}{Y'A}\cdot\dfrac{BA}{BC_1}\cdot\dfrac{YC_1}{YA_1}=1$ respectiv $\dfrac{CB_1}{CA}\cdot\dfrac{Z'A}{Z'B}\cdot\dfrac{CB}{CA_1}\cdot\dfrac{ZA_1}{ZB_1}=1$. Înmulţind aceste trei egalităţi şi ţinând seama de faptul că $\dfrac{A_1B}{A_1C}\cdot\dfrac{B_1C}{B_1A}\cdot\dfrac{C_1A}{C_1B}=1$ şi $\dfrac{X'B}{X'C}\cdot\dfrac{Y'C}{Y'A}\cdot\dfrac{Z'A}{Z'B}=1$ (teorema lui Ceva), deducem că $\dfrac{XB_1}{XC_1}\cdot\dfrac{YC_1}{YA_1}\cdot\dfrac{ZA_1}{ZB_1}=1$, de unde concluzia problemei.

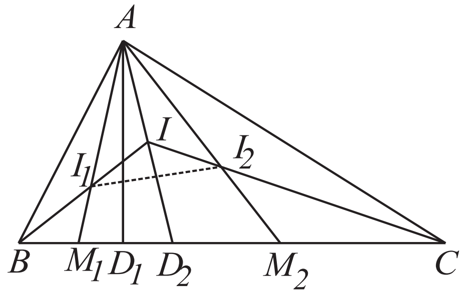



## B. Nivel liceal

**L286.** *Fie $ABC$ un triunghi în care unghiul $\widehat{A}$ este cel mai mare şi punctele $D_1, D_2\in(BC)$ astfel încât $\widehat{BAD_1}\equiv\widehat{ACB}$ şi $\widehat{CAD_2}\equiv\widehat{ABC}$. Dacă $r$ este raza cercului înscris în $\triangle ABC$ şi $\rho$ este raza cercului circumscris $\triangle AI_1I_2$ (unde $I_1, I_2$ sunt* *centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $ABD_2$, respectiv $ACD_1$), demonstraţi că* $r = 2\rho \sin^2 \dfrac{A}{2}$.

**Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi**

**Soluţie.** Unghiul $\widehat{A}$ fiind cel mai mare, punctele $D_1$ şi $D_2$ aparţin segmentului $(BC)$. Ordinea lor pe segment se schimbă după cum $m(\widehat{A}) \geq 90°$ sau $m(\widehat{A}) < 90°$, dar soluţia este aceeaşi.




Fie $\{M_1\} = AI_1 \cap BC$, $\{M_2\} = AI_2 \cap BC$; atunci $m(\widehat{BM_2A}) = m(\widehat{C}) + \dfrac{1}{2} m(\widehat{CAD_1}) = m(\widehat{BAM_2})$, deci $\triangle BAM_2$ este isoscel şi bisectoarea $BI_1$ corespunzătoare bazei va fi şi înălţime: $BI_1 \perp AM_2$. Analog se arată că $CI_2 \perp AM_1$, prin urmare $I$ este ortocentrul triunghiului $AI_1I_2$. Astfel, $AI = 2\rho \cos \dfrac{I_1AI_2}{2}$. Însă $m(\widehat{I_1AI_2}) = m(\widehat{BAC}) - \dfrac{1}{2} m(\widehat{BAD_2}) - \dfrac{1}{2} m(\widehat{CAD_1}) = A - \dfrac{A-B}{2} - \dfrac{A-C}{2} = \dfrac{B+C}{2}$ şi atunci $AI = 2\rho \sin \dfrac{A}{2}$. Pe de altă parte, $AI = \dfrac{r}{\sin \frac{A}{2}}$, deci $\dfrac{r}{\sin \frac{A}{2}} = 2\rho \sin \dfrac{A}{2} \Leftrightarrow r = 2\rho \sin^2 \dfrac{A}{2}$.

**Notă.** Soluţie corectă am primit din partea d-lui **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

**L287.** *Fie $A', B', C'$ mijloacele laturilor triunghiului $ABC$. Notăm cu $S'$ punctul lui Spieker al triunguiului $A'B'C'$. Dreptele $AS', BS', CS'$ intersectează laturile $BC, CA, AB$ în punctele $M, N$ respectiv $P$. Să se demonstreze că perpendicularele în punctele $M, N, P$ pe laturile $BC, CA$, respectiv $AB$ sunt concurente dacă şi numai dacă triunghiul $ABC$ este isoscel.*

**Nela Ciceu, Bacău şi Roxana Mihaela Stanciu, Buzău**

**Soluţie.** Fie $a, b, c$ laturile triunghiului. Folosind formula (*) din *RecMat 2/2011*, pag. 109, obţinem $BM/MC = (a+b+2c)/(a+2b+c)$ şi atunci

$$\frac{BM}{MC} = \frac{a+b+2c}{a+2b+c} \Rightarrow BM = \frac{a(a+b+2c)}{2a+3b+3c}, MC = \frac{a(a+2b+c)}{2a+3b+3c}.$$

Notăm $x = 3a + 3b + 3c$. Conform teoremei lui Carnot, perpendicularele din enunţ sunt concurente dacă şi numai dacă $BM^2 + CN^2 + AP^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$. Deoarece $BM^2 - MC^2 = \dfrac{a^2(b-c)}{x-a}$, relaţia de mai înainte este echivalentă succesiv cu

$$\begin{aligned} & a^2(b-c)(x^2 - bx - cx + bc) + b^2(c-a)(x^2 - ax - cx + ac)(x^2 - ax - cx + ac) \\ & \quad + c^2(a-b)(x^2 - ax - bx + ab) = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0, \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia dorită.

**L288.** *Dacă într-un triunghi neisoscel dreapta determinată de punctul lui Lemoine şi centrul cercului lui Euler este paralelă cu o latură a triunghiului, atunci triunghiul este dreptunghic.*

**Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău**

**Soluţie.** Fie $a, b, c$ laturile triunghiului, $a$ fiind cea mai mare dintre ele. Notăm cu $L$ punctul lui Lemoine şi cu $O_9$ centrul cercului lui Euler; $AL$ intersectează latura $BC$ în punctul $M$, iar $AO_9$ intersectează pe $BC$ în punctul $N$.

Vom calcula raportul $\frac{BN}{NC}$ folosind formula (*) din *Rec.Mat. 2/2011*, p.109. Avem $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $p_1 = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$, $p_2 = \frac{\sin 2A}{\sin 2C}$, $p_3 = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$ şi obţinem

$$\frac{BN}{NC} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2A + \sin 2C} = \frac{a\cos A + b\cos B}{a\cos A + c\cos C} = \frac{c^2(a^2+b^2) - (a^2-b^2)^2}{b^2(a^2+c^2) - (a^2-c^2)^2}.$$

Fie $AM, CQ$ simedianele. Deoarece $\frac{AP}{PC} = \frac{c^2}{a^2}$ şi $\frac{AQ}{QB} = \frac{b^2}{a^2}$, din Van Aubel obţinem

$$\frac{AL}{LM} = \frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Fie acum $AN, BS, CT$ cevienele corespunzătoare punctului $O_9$. Am calculat raportul $\frac{BN}{NC}$. Prin permutări circulare găsim rapoartele $\frac{CS}{SA}$ şi $\frac{AT}{TB}$ şi cu Van Aubel obţinem

$$\frac{AO_9}{O_9N} = \frac{AS}{SC} + \frac{AT}{TB} = \frac{3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2a^4 - b^4 - c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4}.$$

Deci, $LO_9 \| BC \Leftrightarrow \frac{AO_9}{O_9N} = \frac{AL}{LM}$ şi folosind relaţia lui Van Aubel, rezultă

$$\begin{aligned}\frac{AL}{LM} = \frac{AO_9}{O_9N} \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{a^2} &= \frac{3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2a^4 - b^4 - c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4}\\ &\Leftrightarrow 2a^6 - b^6 - c^6 - 3a^4b^2 - 3a^4c^2 + 2a^2b^4 + 2a^2c^4 + b^4c^2 + b^2c^4 = 0\\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2)[a^2(a^2-b^2) + a^2(a^2-c^2) + (b^2-c^2)^2] = 0.\end{aligned}$$

Din presupunerea că $a$ este cea mai mare latură şi triunghiul este neisoscel, rămâne doar posibilitatea ca $a^2 = b^2 + c^2$, adică triunghiul dat este dreptunghic.

**Notă.** A rezolvat problema utilizând numerele complexe d-l **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung (Maramureş).

**L289.** *Construim şirul de triunghiuri $A_nB_nC_n$, $n \in \mathbb{N}$, astfel: $\triangle A_0B_0C_0$ este arbitrar ales; vârfurile $\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ sunt punctele în care medianele $\triangle A_kB_kC_k$ intersectează cercul circumscris acestuia, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Dacă în şirul astfel definit există două triunghiuri congruente, arătaţi că $\triangle A_0B_0C_0$ este echilateral.*

**Vasile Jiglău, Arad**

**Soluţie** (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Vom folosi următoarele notaţii pentru $\triangle A_kB_kC_k$: $a_k, b_k, c_k$ laturile, $M_k$ mijlocul laturii $B_kC_k$, $G_k$ centrul de greutate şi $m_{ak}$ lungimea medianei din $A_k$.

(i) Să presupunem că triunghiurile $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ şi $A_kB_kC_k$ sunt congruente. Folosind asemănarea triunghiurilor $A_kB_kM_k$ şi $M_kA_{k+1}C_k$ apoi asemănarea triunghiurilor $A_kB_kG_k$ şi $A_{k+1}G_{k+1}B_{k+1}$, obţinem

$$\frac{A_kM_k}{M_kC_k}=\frac{B_kM_k}{M_kA_{k+1}}=\frac{a_k^2}{4m_{ak}}, G_kA_{k+1}=\frac{m_{ak}}{3}+\frac{a_k^2}{4m_{ak}}=\frac{a_k^2+b_k^2+c_k^2}{6am_{ak}},$$
$$\frac{G_kA_{k+1}}{B_kG_k}=\frac{c_{k+1}}{c_k}\Rightarrow c_{k+1}=c_k\frac{a_k^2+b_k^2+c_k^2}{4m_{ak}m_{bk}}.$$

Utilizând formula pentru lungimea medianei, după ceva calcule, rezultă că

$$c_{k+1}=c_k\Leftrightarrow a_k^4+b_k^4=a_k^2b_k^2+c_k^4. \tag{1}$$

Scriind încă două relaţii similare relaţiei (1), după adunarem obţinem:

$$a_k^4+b_k^4+c_k^4=a_k^2b_k^2+b_k^2c_k^2+c_k^2a_k^2,$$

de unde deducem imediat că $a_k=b_k=c_k$.

(ii) Vom demonstra că, dacă $\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ este echilateral, atunci $\triangle A_kB_kC_k$ este echilateral. Avem

$$c_{k+1}=b_{k+1}\Leftrightarrow c_k\frac{a_k^2+b_k^2+c_k^2}{4m_{ak}m_{bk}}=b_k\frac{a_k^2+b_k^2+c_k^2}{4m_{ak}m_{ck}}\Leftrightarrow c_km_{ck}=b_km_{bk}$$
$$\Leftrightarrow (b_k^2-c_k^2)(b_k^2+c_k^2-2a_k^2)=0.$$

Scriind şi celelalte două relaţii similare, prin rezolvarea sistemului format obţinem $a_k=b_k=c_k$.

Concluzia problemei rezultă imediat: din congruenţa triunghiurilor $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ şi $A_kB_kC_k$ rezultă că triunghiul $A_kB_kC_k$ este echilateral şi apoi, din aproape în aproape, că triunghiul $A_0B_0C_0$ este echilateral.

**L290.** *Fie $ABCD$ un patrulater ortogonal care este atât inscriptibil, cât şi circumscriptibil; fie $r,R$ raza cercului înscris, respectiv raza cercului circumscris. Dacă $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$, $c=AC$ şi $f=BD$, demonstraţi că*

$$\frac{3R^2}{r^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{e}{f}+\frac{f}{e}.$$

**Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea**

**Soluţie (Titu Zvonaru**, Comăneşti**).** Deoarece $ABCD$ este ortogonal, circumscriptibil şi inscriptibil, avem

$$a^2+c^2=b^2+d^2, \tag{1}$$
$$a+c=b+d, \tag{2}$$
$$ac+bd=ef. \tag{3}$$

Din (1) şi (2) rezultă uşor că $\{a,c\}=\{b,d\}$; să facem o alegere, $a=d$, $b=c$. Din (3) deducem acum că $2ab=ef$. Deoarece $ABCD$ este un deltoid (două triunghiuri isoscele cu baza comună), $AC$ este mediatoarea diagonalei $BD$. Scriind aria triunghiului $ABC$ în două moduri, obţinem $ab\sin B = ef/2$, şi cum $2ab = ef$, avem $\sin B = 1$, adică unghiul $ABC$ este drept. Din triunghiul dreptunghic $ABC$ obţinem $e^2 = a^2 + b^2$ şi $R^2 = e^2/4 = (a^2 + b^2)/4$. Deducem imediat şi $r = ab/(a + b)$.

Inegalitatea de demonstrat se scrie folosind doar variabilele $a$ şi $b$ ($c = b$, $d = a$, $r = ab/(a + b)$, $R^2 = (a^2 + b^2)/4$, $e^2 = a^2 + b^2$, $f = 2ab/e$):

$$\frac{3(a^2+b^2)(a+b)^2}{4a^2b^2} \geq \frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a} + 1 + \frac{a^2+b^2}{2ab} + \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Deoarece $2ab \leq a^2 + b^2$, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{3(a^2+b^2)(a+b)^2}{4a^2b^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a^2+b^2}{2ab} + 3$$
$$\Leftrightarrow 3a^4 + 6a^3b + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 + 6ab^3 + 3b^4 \geq 4a^3b + 4ab^3 + 2a^3b + 2ab^3 + 12a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow 3a^4 - 6a^2b^2 + 3b^4 \geq 0 \Leftrightarrow 3(a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $ABCD$ este pătrat.

**Notă.** Am mai primit soluţie corectă din partea d-lui **Vasile Jiglău**, Arad.

**L291.** *Notăm cu a numărul fracţiilor zecimale finite care se scriu, în formă ordinară, ca fracţii de tipul* $\frac{1}{x}$, *unde x este număr natural de n cifre (în baza 10). Demonstraţi că* $4n + 1 \leq a \leq 6n + 1$.

**Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti**

**Soluţie.** Numărul $a$ este egal cu numărul perechilor $(\alpha, \beta)$ de numere naturale cu proprietatea că $10^{n-1} \leq 2^\alpha \cdot 5^\beta < 10^n$. Dacă $\alpha = \beta$, atunci $\alpha = \beta = n - 1$. Numărăm separat perechile în care $\alpha > \beta$ şi cele în care $\alpha < \beta$.

Dacă $\alpha > \beta$, atunci $\alpha = \beta + p$, cu $p \in \mathbb{N}^*$ şi $10^{n-1} \leq 10^\beta \cdot 2^p < 10^n$. Rezultă că $n - \beta - 1 \leq p \lg 2 < n - \beta$, deci $\alpha - \beta = p \in \left[\frac{n-\beta-1}{\lg 2}, \frac{n-\beta}{\lg 2}\right)$. Numărul $\beta$ parcurge valorile $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, iar $\alpha$ se află în intervalul $\left[\beta + \frac{n-\beta-1}{\lg 2}, \beta + \frac{n-\beta}{\lg 2}\right)$, cu lungimea $\frac{1}{\lg 2} \in (3, 4)$. În concluzie, avem cel puţin $3n$ şi cel mult $4n$ perechi $(\alpha, \beta)$ cu $\alpha < \beta$.

Un raţionament similar arată că există cel puţin $n$ şi cel mult $2n$ perechi $(\alpha, \beta)$ cu $\alpha < \beta$. În concluzie, avem cel puţin $4n + 1$ şi cel mult $6n + 1$ perechi $(\alpha, \beta)$ cu proprietatea dorită, de unde cerinţa problemei.

**L292.** *Fie* $(F_n)_{n\geq 0}$ *şitul lui Fibonacci şi* $(L_n)_{n\geq 0}$ *şirul lui Lucas, definite prin* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *respectiv* $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă* $p, j \in \mathbb{N}^*$ *sunt oarecare, demonstraţi:*

*a)* $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{F_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{F_{2n+j}^p}$; *b)* $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{L_{k+j}^p} \geq \frac{2^{(p+1)n}}{L_{2n+j}^p}$;

**Nicuşor Zlota, Focşani**

**Soluţie.** a) Folosind formulele lui Binet, avem:

$$F_{2n+j} = \frac{\alpha^{2n+j} - \beta^{2n+j}}{\alpha - \beta} = \frac{(1+\alpha)^n\alpha^j - (1+\beta)^n\beta^j}{\alpha - \beta} =$$
$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^{k+j} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta^{k+j}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\alpha^{k+j} - \beta^{k+j}}{\alpha - \beta} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F_{k+j},$$

unde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, cu $\alpha^2 = 1 + \alpha$ şi $\beta^2 = 1 + \beta$. Aplicând inegalitatea lui Radon, obţinem:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{F_{k+j}^p} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^p \cdot C_n^k}{(C_n^k \cdot F_{k+j})^p} \geq \frac{(\sum_{k=0}^{n} C_n^k)^{p+1}}{(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot F_{k+j})^p} = \frac{2^{(p+1)n}}{F_{2n+j}^p}.$$

b) Se procedează analog.

**Notă.** A rezolvat problema d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

**L293.** *Fie* $a_1, \ldots, a_n \in (0,1]$. *Să se arate că are loc inegalitatea:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-a_k)^2}{a_k} \leq \frac{(1 - \prod_{k=1}^{n} a_k)^2}{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

**Marian Tetiva, Bârlad**

**Soluţie.** Cazul $n = 2$ se reduce prin calcul direct la inegalitatea evidentă $(1 + a_1a_2)(1-a_1)(1-a_2) \geq 0$. Apoi se demonstrează prin inducţie.

**Notă (Marian Tetiva).** Inegalitatea asemănătoare

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a - a_k^2}{a_k} \leq \frac{1 - \prod_{k=1}^{n} a_k^2}{\prod_{k=1}^{n} a_k},$$

valabilă tot pentru $a_1, \ldots, a_n \in (0,1]$, se poate utiliza în rezolvarea problemei 11584 propusă de Raymond Mortini şi Jerome Noel în *The American Mathematical Monthly,* nr. 5/2011. De fapt, inegalitatea este echivalentă cu cea propusă acolo (care reprezintă cazul sumelor infinite, doar în aparenţă mai general).

**Notă.** A rezolvat problema d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti, care observă că inegalitatea rămâne adevărată şi dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$. Am mai primit soluţii corecte de la **Andrei Raul Spătaru**, elev, Craiova şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung.

**L294.** *Să se arate că, pentru orice numere pozitive* $a, b, c$, *are loc inegalitatea:*

$$a^3 + b^3 + c^3 - \sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

**Marian Tetiva, Bârlad**

**Soluţie** (**Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Nicuşor Zlota**, Focşani). Notăm $p = a^2b+b^2c+c^2a$ şi $q = ab^2+bc^2+ca^2$. Din inegalitatea mediilor, $p \geq 3abc$ şi $q \geq 3abc$. Din inegalitatea lui Schur, $a^3+b^3+c^3+3abc \geq p+q$. Deoarece $|(a-b)(b-a)(c-a)| = |p-q|$, este suficient să demonstrăm inegalitatea

$$2(p+q-3abc) - 2\sqrt{pq} \geq |p-q|.$$

Însă această inegalitate revine la

$$(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 + (2\min\{p,q\} - 6abc) \geq 0,$$

care este adevărată şi, astfel, soluţia este completă.

**Notă.** Au rezolvat problema **Denisa Drăghia**, elevă, Craiova, **Georgiana-Sînziana Păucă**, elevă, Truşeşti (Botoşani) şi d-l **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung (Maramureş).

**L295.** *Determinaţi valoarea minimă a numărului real pozitiv $k$, încât pentru orice numere reale pozitive $a, b, c$ să aibă loc inegalitatea*

$$\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} + k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq k+2.$$

**Florin Stănescu, Găeşti**

**Soluţie** (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). Pentru $a = b = 1$, $c = 0$ obţinem

$$\frac{2}{3} + 1 + 1 + k\frac{1}{2} \leq k+2 \Rightarrow k \geq \frac{4}{3}.$$

Vom demonstra, folosind metoda SOS, inegalitatea:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{4}{3}+2\\
&\sum \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} - \frac{2}{3}\right) \leq \frac{4}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+c^2}\\
&\sum \frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2} \leq 2\sum\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \sum\frac{(a-b)^2(a+b-c)}{a^2+ab+b^2} \geq 0\\
&(b-c)^2S_a + (c-a)^2S_b + (a-b)^2S_c \geq 0,
\end{aligned}$$

unde

$$S_a = \frac{b+c-a}{b^2+bc+c^2},\ \ S_b = \frac{c+a-b}{c^2+ca+a^2},\ \ S_c = \frac{a+b-c}{a^2+ab+b^2}.$$

Putem presupune că $a \geq b \geq c$; avem $S_b \geq 0, S_c \geq 0$. Rămâne de demonstrat că

$$\begin{aligned}
a^2S_b + b^2S_a \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{a^2(c+a-b)}{c^2+ca+a^2} + \frac{b^2(b+c-a)}{b^2+bc+c^2} \geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2c^3 + a^3bc + a^3c^2 + b^3c^2 + b^3c^2 + ab^3c + b^2c^3 \geq 0,
\end{aligned}$$

adevărat.

**Notă.** A rezolvat problema d-l **Nicuşor Zlota**, Focşani.