PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2015

Clasele primare

P325. *În scrierea* $1\square 3\square 5\square 7 = 26\square 8\square 2$*, completaţi casetele cu unul din semnele* $+$ *sau* $-$ *astfel încât să obţineţi o egalitate. Arătaţi că există o singură soluţie.*

(*Clasa I*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Membrul stâng poate fi cel mult $1+3+5+7=16$, iar cel drept este cel puţin $26-8-2=16$. Egalitatea se realizează numai în cazul $1\boxed{+}3\boxed{+}5\boxed{+}7 = 26\boxed{-}8\boxed{-}2$.

P326. *Suma a şase numere nenule este* 20*. Ştiind că în sumă sunt exact doi termeni egali, să se scrie toate sumele ce îndeplinesc aceste condiţii.*

(*Clasa I*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Sumele sunt: $1+1+3+4+5+6=20$; $1+2+2+4+5+6=20$; $1+2+3+3+5+6=20$; $1+2+3+4+4+6==20$; $1+2+3+4+5+5=20$; $1+1+2+4+5+7=20$; $1+1+2+3+6+7=20$; $1+1+2+3+5+8=20$; $1+1+2+3+4+9$; $1+2+2+3+4+8$; $1+2+2+3+5+7$; $1+2+3+3+4+7$.

P327. *Din şirul numerelor* $1,2,3,1,2,3,1,2,3,1$ *se extrag două. Să se arate că suma numerelor rămase nu poate fi* 12*.*

(*Clasa I*) **Ana Ionescu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Suma numerelelor din şir este 19. Suma numerelor extrase poate fi $2,3,4,5$ sau 6. Numerele rămase pot avea cea mai mică sumă $19-6=13$.

P328. *În şirul* $\boxed{1}\boxed{}$, $\boxed{2}\boxed{}$, $\boxed{3}\boxed{}$, $\ldots$, $\boxed{9}\boxed{}$, *fiecare casetă liberă se completează cu o cifră nenulă utilizată o singură dată. Să se arate că suma numerelor de două cifre obţinute este mai mică decât* 496*.*

(*Clasa a II-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cele nouă casuţe vor conţine, într-o ordine oarecare, cifrele $1,2,\ldots,9$. Suma numerelor obţinute este $S=(10+20+\ldots+90)+(1+2+\ldots+9)=450+45=495$.

P329. *Ştiind că diferenţa dintre numerele* a *şi* b *este* 5 *şi că diferenţa dintre numerele* c *şi* d *este* 7*, să se calculeze diferenţa dintre suma numerelor* a *şi* c *şi suma numerelor* b *şi* d*.*

(*Clasa a II-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din $a-b=5$ obţinem $a=b+5$, iar din $c-d=7$ obţinem $c=d+7$. Observăm că $a+c=b+d+12$ şi atunci $a+c-(b+d)=12$.

P330. *În câte moduri putem aranja formele geometrice pătrat, cerc, triunghi şi dreptunghi una după alta, astfel încât cercul să fie înaintea pătratului?*

(*Clasa a II-a*) **Mădălina Baciu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Există câte două aranjări pentru fiecare dintre următoarele situaţii: ○ □ _ _; ○_□_; ○_ _ □; _ ○ □_; _ ○ _ □; _ _ ○ □. În total, există 12 aranjări.

P331. *Cu* 12 *pătrate de latură* 1 *cm construiţi dreptunghiul de perimetru minim. Care este valoarea perimetrului său?*

(*Clasa a III-a*) **Alexandra Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dreptunghiul obţinut are dimensiunile $12m \times 1m$, $6m \times 2m$ sau $4m \times 3m$. Perimetrul său poate fi $26m$, $16m$ respectiv $14m$. Perimetrul minim se obţine în ultimul caz şi este $14m$.

P332. *Să se arate că numărul* 987 *nu se poate scrie ca suma a două numere răsturnate.* (*Exemplu:* 231 *şi* 132 *sunt numere răsturnate.*)

(*Clasa a III-a*) **Georgiana Avădanei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Presupunem că $987 = \overline{abc} + \overline{cba}$. Obţinem $a + c = 7$, iar $b + b < 20$, deci cifra sutelor numărului $\overline{abc} + \overline{cba}$ poate fi maximum $a + c + 1 = 7 + 1 = 8 \neq 9$.

P333. *Cum putem măsura* 5 *l de apă având la dispoziţie două vase negradate de* 11 *l şi* 7 *l?*

(*Clasa a III-a*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Procedăm după cum se vede în următorul tabel:

$11\ \ell$	0	7	7	11	0	3	3	10	10	11	0	6	6	11	0	2	2	9	9	11
$7\ \ell$	7	0	7	3	3	0	7	0	7	6	6	0	7	2	2	0	7	0	7	5

P334. *Într-o împărţire exactă suma dintre deîmpărţit, împărţitor şi cât este* 49, *iar suma dintre deîmpărţit şi cât este* 45. *Să se afle deîmpărţitul.*

(*Clasa a II-a*) **Ecaterina Brînzac, elevă, Iaşi**

Soluţie. $D + C + \hat{I} = 49$ şi $D + C = 45$ implică $\hat{I} = 49 - 45 = 4$. Deoarece împărţirea este exactă avem $D = 4 \times C$ şi $4C + C = 45$ ne dă $C = 9$ şi $D = 4 \cdot 9 = 36$.

P335. *Fie trei numere naturale nenule. Se calculează diferenţele a câte două dintre ele şi se obţin rezultatele* $6, 12, 18$. *Arătaţi că numărul cel mai mare este cel puţin egal cu* 19.

(*Clasa a IV-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fie numerele naturale a, b, c astfel încât $a < b < c$. Avem $b - a < c - a$ şi $c - b < c - a$, ceea ce înseamnă că $c - a = 18$. Cum a are cel puţin valoarea 1, rezultă că c este cel puţin egal cu 19.

P336. *Să se afle un număr ştiind că suma dintre acest număr, dublul lui, triplul lui şi împătritul lui este cu* 19 *mai mare decât jumătatea lui.*

(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Vieru, elev, Iaşi**

Soluţie. Dacă notăm cu x jumătatea numărului, din datele problemei obţinem că $2x + 4x + 6x + 8x = 19 + x$. Obţinem că $x = 1$, deci numărul căutat este 2.

P337. *Pe o masă sunt aşezate* 16 *cartonaşe cu faţa în jos având numere de la* 1 *la* 16. *Trei copii extrag câte* 5 *cartonaşe şi constată că sumele numerelor de pe ele sunt:* $35, 41$ *şi* 45. *Arătaţi că unul dintre copii a extras cartonaşul cu numărul* 16.

(*Clasa a IV-a*) **Maria Boutiuc, studentă, Iaşi**

Soluţie. Suma numerelor de la 1 la 15 este 120. Cum suma numerelor de pe cartonaşele extrase este $35 + 41 + 45 = 121$, înseamnă că unul dintre copii a extras cartonaşul cu numărul 16.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

P338. *În careul alăturat, în cele nouă casete sunt scrise crescător, atât pe linii cât şi pe coloane, numere diferite şi nenule. Care este valoarea celei mai mici sume $a+c+g+i$ posibile?*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Se observă imediat că $c \geq 3$, $g \geq 5$, $a+i \geq 10$ sau $g \geq 3$, $c \geq 5$, $a+i \geq 10$. Rezultă că $a+c+g+i \geq 3+5+10 = 18$. Se observă uşor că valoarea minimă 18 se poate atinge, completând pătratul cu numerele $1, 2, \ldots, 9$.

Clasa a V-a

V.193. *Vom spune că un număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ este amuzant dacă $3a^2+b+c=120$. Determinaţi numerele amuzante care sunt divizibile cu 3.*

Cosmin Aştefanei, elev, Iaşi

Soluţie (**Vasile Roman**, elev, Roşiori (Bacău))**.** Deoarece $3 \cdot 7^2 = 147 > 120$ şi $3 \cdot 5^2 + b + c \leq 75 + 9 + 9 < 120$, rezultă că $a = 6$ şi $b + c = 12$. Deducem că toate numerele amuzante sunt divizibile cu trei şi că ele sunt: 639, 648, 657, 666, 675, 684, 693. Observăm că nu este necesară ipoteza de divizibilitate.

V.194. *Vom spune că un număr natural de patru cifre $\overline{abcd}$ este serios dacă $a+2b+3c+4d=10$. Câte numere serioase există? Care este cel mai mic număr serios? Dar cel mai mare?*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Observăm că $d \in \{0,1,2\}$; obţinem $12+5+1=18$ numere serioase. Cel mai mic astfel de număr este 1030, iar cel mai mare este 8100.

V.195. *Copii din clasa a V-a B merg în excursie. Autocarul are 20 de locuri duble şi nimeni nu stă în picioare. Pe drum, profesorul de matematică observă că jumătate dintre copii stau de vorbă cu profesoara de engleză, $13,(3)\%$ dintre copii se joacă pe telefon iar cei rămaşi fac o zarvă de nedescris. Câţi copii merg în excursie?*

Ioana-Maria Popa, elevă, Iaşi

Soluţie. Dacă n este numărul copiilor care merg în excursie, atunci $n \leq 2 \cdot 20$, $n \,\vdots\, 2$ şi $13,(3)\% \cdot n \in \mathbb{N}$. Cum $13,(3)\% \cdot n = \dfrac{2n}{15}$, deducem că $n \,\vdots\, 15$. Ţinând cont şi de celelalte două condiţii, obţinem că $n = 30$.

V.196. *Demonstraţi că nu există cifre nenule distincte a, b şi c astfel încât $\overline{abc} \cdot \overline{ba} = \overline{cba} \cdot \overline{bc}$.*

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

Soluţie. Dacă ar exista astfel de cifre, atunci $(100a + \overline{bc}) \cdot \overline{ba} = (100c + \overline{ba}) \cdot \overline{bc}$, deci $a \cdot \overline{ba} = c \cdot \overline{bc}$. Cum $a \neq c$, avem fie $a > c$, fie $a < c$. În primul caz, $a \cdot \overline{ba} > c \cdot \overline{bc}$; în cel de-al doilea, $a \cdot \overline{ba} < c \cdot \overline{bc}$ şi astfel ajungem la o contradicţie.

V.197. *Arătaţi că numărul $n = 653^{653}$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Cum $653 = 25 + 49 + 121 + 169 + 289$, avem scrierea $653^{653} = (5 \cdot 653^{326})^2 + (7 \cdot 653^{326})^2 + (11 \cdot 653^{326})^2 + (13 \cdot 653^{326})^2 + (17 \cdot 653^{326})^2$.

Notă. Eleva **Steluţa Dubei**, Roşiori (Bacău), foloseşte scrierea: $653 = 25^2 + 5^2 + 1^1 + 1^2 + 1^2$.

V.198. *Demonstraţi că numărul* $A = 2014^2 + 2015^2 + 2016^2 + 2017^2 + 2018^2$ *nu este pătrat perfect.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţia 1. Cum $(2k)^2 = M_4$ şi $(2k+1)^2 = M_4 + 1$, numărul A este de forma $M_4 + 2$, deci nu poate fi pătrat perfect.

Soluţia 2 (**Daniel-Cătălin Ploşniţă**, elev, Roşiori (Bacău))**.** Să găsim ultimele două cifre ale numărului A. Sunt date de $14^2+15^2+16^2+17^2+18^2 = 1290$. Deoarece A este multiplu de 10, dar nu şi de 100, rezultă că A nu este pătrat perfect.

V.199. *Se consideră mulţimea* $M = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$.

a) *Arătaţi că oricum am alege* 50 *de numere din* M*, există două numere alese care să aibă suma* 101.

b) *Arătaţi că putem alege* 50 *de numere din* M *astfel încât oricare două dintre numerele alese să abiă suma diferită de* 100.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. a) Partiţionăm M astfel: $M = \{2, 99\} \cup \{3, 98\} \cup \ldots \cup \{50, 51\}$. Având 49 de submulţimi, când vom alege 50 de elemente, două vor fi din aceeaşi submulţime, deci vor avea suma 101.

b) De exemplu, numerele $2, 3, 4, \ldots, 50, 99$ au proprietatea dorită.

Clasa a VI-a

VI.193. *Fie* $p \geq 2$ *un număr natural cu proprietatea că numărul* $n = \underbrace{\overline{11\ldots11}}_{p\ cifre}$ *este prim. Demonstraţi că* p *este număr prim.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Dacă, prin absurd, p nu ar fi prim, atunci $p = a \cdot b$, cu $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$. Numărul $\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{a \text{ cifre}}$ va fi divizor propriu al lui n, contradicţie.

VI.194. *Determinaţi toate perechile* (x, y) *de numere naturale nenule pentru care* $\dfrac{xy}{x+y}$ *este număr prim.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Fie $\dfrac{xy}{x+y} = p$, cu p prim; atunci $xy - py = xp$, de unde $y = \dfrac{xp}{x-p} = p + \dfrac{p^2}{x-p}$. Deducem că $x - p | p^2$, prin urmare $x \in \{p+1, 2p, p^2+p\}$. Obţinem soluţiile $(x, y) \in \{(p+1, p^2+p); (2p, 2p); (p^2+p, p+1)\}$, unde p este număr prim oarecare.

VI.195. *Determinaţi numerele naturale nenule* a, b, c *şi* d *pentru care* $ad = bc$, $ab + cd = 50$ *şi* $a \leq c \leq b$.

Ştefan Obadă, elev, Iaşi

Soluţie. Înlocuind $a = \dfrac{bc}{d}$ în a doua relaţie obţinem, după eliminarea numitorilor, că $b^2c + cd^2 = 50d$. Fie x cel mai mare divizor comun al numerelor c şi d; atunci $c = xc'$, $d = xd'$, cu $(c', d') = 1$. Rezultă că $c'(b^2 + d'^2x^2) = 50d'$, de unde $d' | b^2 + d'^2x^2$, prin urmare $b = d'y$, cu $y \in \mathbb{N}^*$. Deducem că $c'd'(x^2 + y^2) = 50$. Se observă uşor că niciunul dintre primele trei numere nu poate fi mai mare decât d, aşadar $c' \leq d'$ şi $x \geq y$. Avem următoarele posibilităţi:

c'	1	1	1	1	1	2
d'	1	2	5	10	25	5
x^2+y^2	50	25	10	5	2	5

Apoi, $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow (x,y)=(1,1)$; $x^2+y^2=5 \Leftrightarrow (x,y)=(2,1)$; $x^2+y^2=10 \Leftrightarrow (x,y)=(3,1)$; $x^2+y^2=25 \Leftrightarrow (x,y)=(4,3)$ şi $x^2+y^2=50 \Leftrightarrow (x,y) \in \{(5,5);(7;1)\}$. Soluţiile problemei sunt:

a	5	1	3	1	1	1	2
b	5	1	6	5	10	25	5
c	5	7	4	3	2	1	4
d	5	7	8	15	20	25	10

VI.196. *Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia* $x^2+7x=2016y^2+2015$.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

Soluţie. Numerele x şi $x+7$ având parităţi diferite, x^2+7x este număr par. Cum $2016y^2+2015$ este impar, ecuaţia dată nu are soluţii întregi.

VI.197. *Demonstraţi că numărul* $N=11^{11^{2015}}+11^{11^{2014}}+1$ *se divide cu* 7.

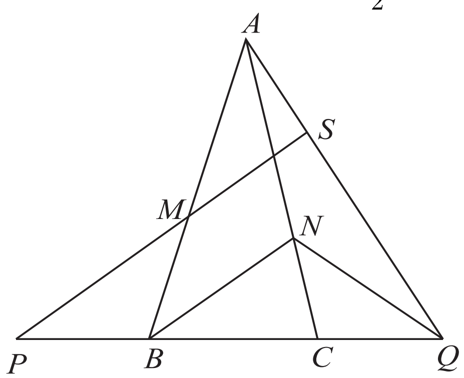
Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Cum 2014 este par, $11^{2014}=(M_6-1)^{2014}=M_6+1=6n+1$. Observăm că $11^6=M_7+1$, prin urmare $11^{11^{2014}}=11^{6n+1}=11\cdot(M_7+1)^n=11\cdot(M_7+1)=M_7+4$. Apoi, $11^{11^{2015}}=11^{11^{2014}\cdot 11}=(M_7+4)^{11}=M_7+4^{11}=M_7+(4^3)^3\cdot 4^2=M_7+(M_7+1)^3\cdot 16=M_7+(M_7+1)\cdot 16=M_7+2$. În final, $N=(M_7+4)+(M_7+2)+1=M_7$.

VI.198. *Se consideră triunghiul* ABC *cu* $AB=AC>BC$. *Pe dreapta* BC *se iau punctele* P *şi* Q *astfel încât* $B\in(CP)$, $C\in(BQ)$, $AC=CP=BQ$. *Pe laturile* AB *şi* AC *se iau punctele* M, *respectiv* N, *astfel încât* $AM=BC$ *şi* $AN=NQ$. *Demonstraţi că* $PM \| BN$.

Dorel Luchian, Iaşi

Soluţie. Din triunghiul isoscel BAQ, obţinem că $m(\widehat{BAQ})=90^\circ-\frac{1}{2}m(\widehat{B})$. Unghiul $\widehat{B}$ fiind exterior triunghiului isoscel BPM, avem că $m(\widehat{BMP})=\frac{1}{2}m(\widehat{B})$. Dacă $\{S\}=MP\cap AQ$, unghiurile $\widehat{MAS}$ şi $\widehat{AMS}$ sunt complementare, prin urmare unghiul $\widehat{ASM}$ este drept; deducem că $MP\perp AQ$. Pe de altă parte, cum $BA=BQ$ şi $NA=NQ$, dreapta BN este mediatoarea segmentului AQ, aşadar $BN\perp AQ$. Rezultă că $PM\|BN$.



VI.199. *Folosind doar rigla negradată şi compasul, construiţi un triunghi dreptunghic cu unghi de* $30°$*, având înălţimea corespunzătoare ipotenuzei congruentă cu un segment dat.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţia 1. Pe o dreaptă d considerăm (folosind compasul) punctele A, D şi E cu $AD = DE$, ambele lungimi fiind egale cu cea a sgemntului dat. Construim apoi triunghiului chilateral AEB şi determinăm intersecţia C a semidreptei $[BD$ cu perpendiculara în A pe AB; toate aceste construcţii pot fi făcute folosind doar rigla şi compasul. Triunghiul ABC obţinut are proprietăţile dorite.

Soluţia 2 (**Ciocoiu Alexandru Boris**, elev, Iaşi)**.** Pe o dreaptă d se consideră un punct A şi se construieşte perpendiculara în A pe d. Construim un cerc $\mathcal{C}$ cu centrul în A şi de rază egală cu lungimea segmentului dat. Notăm cu M intersecţia cercului cu d. Semicercul cu centrul în M şi rază MA intersectează d într-un punct C şi cercul $\mathcal{C}$ în N. Evident, triunghiul ANC este dreptunghic în N şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Semidreapta $[CN$ intersectează într-un punct B perpendiculara în A pe d. Triunghiul ABC îndeplineşte cerinţele problemei.

Soluţia 3 (**Daniel-Cătălin Ploşniţă**, elev, Roşiori (Bacău))**.** Pe o dreaptă, alegem un punct O, iar pe perpendiculara în O pe dreapta d luăm punctul A astfel încât AO are lungimea egală cu segmentul dat. Construim cercul cu centrul în A şi raza egală cu dublul segmentului dat şi notăm cu C intersecţia sa cu dreapta d. Perpendiculara în A pe AC intersectează d în punctul B . Triunghiul ABC verifică cerinţele problemei (justificare simplă!).

Clasa a VII-a

VII.193. *Dacă* a, b *sunt numere reale mai mari ca* 1 *şi* n *este număr natural nenul, arătaţi că* $ab + \dfrac{1}{a^n b^n} > \dfrac{1}{a^{n-1}} + \dfrac{1}{b^{n-1}}$.

Alina Tigae, Craiova

Soluţie. Din $a > 1, b > 1$ rezultă că $\dfrac{1}{a^n} < 1$, $\dfrac{1}{b^n} < 1$, deci $a - \dfrac{1}{b^n} > 0$ şi $b - \dfrac{1}{a^n} > 0$. Deducem că $\left(a - \dfrac{1}{b^n}\right)\left(b - \dfrac{1}{a^n}\right) > 0$ şi, de aici, cerinţa problemei.

Notă. Inegalitatea rămâne adevărată şi pentru $n = 0$.

VII.194. *Demonstraţi că numărul* $N = (7^{2015} - 6^{2015} - 1)(7^{2011} - 6^{2011} - 1)$ *este divizibil cu* 301.

Ionel Tudor, Călugăreni

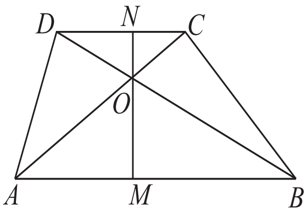
Soluţie (**Iulian Oleniuc**, elev, Iaşi şi **Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Vom arăta că, de fapt, N se divide cu 301^2 (procedând în acelaşi fel, **I.O.** arată că $301 | 7^{2011} - 6^{2011} - 1$, iar **T.Z.** arată că $301 | 7^{2015} - 6^{2015} - 1$).

Să arătăm, de exemplu, că $A = 7^{2011} - 6^{2011} - 1$ se divide cu 301. Cum $301 = 7 \cdot 43$, avem de dovedit că $7 | A$ şi $43 | A$. Într-adevăr, deoarece $6^{2015} = (7-1)^{2015} = M_7 - 1$, rezultă că $A = M_7$. Apoi, avem că $A = 7 \cdot 7^{2010} - 6 \cdot 6^{2010} - 1 = 7(43+6)^{1005} - 6(43 \cdot 5 + 1)^{670} - 1 = 7(M_{43} + 6^{1005}) - 6(M_{43} + 1) - 1 = M_{43} + 7(6^{1005} - 1) = M_{43} + 7(216^{335} - 1) = 7[(M_{43} + 1) - 1] = M_{43}$.

VII.195. *Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \| CD$, având lungimile laturilor $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ şi $d = AD$. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, arătaţi că $\mathcal{A}_{AOD} \le \frac{1}{2} \cdot \sqrt{ac} \cdot \min\{b, d\}$. În ce condiţii se atinge egalitatea?*

Daniela Munteanu, Iaşi

Soluţie. Fie $M \in AB$, $N \in CD$ astfel încât $O \in MN$ şi $MN \perp AB$. Se ştie că $\mathcal{A}_{AOD} = \mathcal{A}_{BOC}$ (demonstraţi!); atunci $\mathcal{A}_{AOD} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{OAB} - \mathcal{A}_{OCD}) = \frac{1}{2}\left[\frac{(a+c)\cdot MN}{2} - \frac{a \cdot OM}{2} - \frac{c \cdot ON}{2}\right] = \frac{1}{4}[a(MN - OM) + c(MN - ON)] = \frac{1}{4}(a \cdot ON + c \cdot OM)$. Pe de altă parte, $\frac{ON}{OM} = \frac{CD}{AB}$ şi, notând $h = MN$, obţinem că $ON = \frac{hc}{a+c}$ iar $OM = \frac{ha}{a+c}$. Deducem că $\mathcal{A}_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{hac}{a+c} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{hac}{2\sqrt{ac}} = \frac{1}{4} h \cdot \sqrt{ac}$. Cum $h \le \min\{b, d\}$, rezultă cerinţa problemei. Egalitatea se atinge când $a = c$ şi $h = \min\{b, d\}$, deci în cazul în care $ABCD$ este dreptunghi.



VII.196. *Fie AP mediană în triunghiul ABC şi Q un punct pe segmentul AP, diferit de centrul de greutate al triunghiului. Notăm $\{M\} = CQ \cap AB$ şi $\{N\} = BQ \cap AC$.*

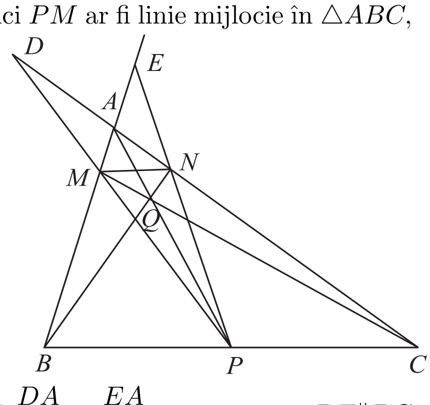
a) *Arătaţi că PM nu este paralelă cu AC, iar PN nu este paralelă cu AB.*

b) *Dacă $\{D\} = PM \cap AC$ şi $\{E\} = PN \cap AB$, arătaţi că $DE \| MN$.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. a) Dacă, prin absurd, $PM \| AC$, atunci PM ar fi linie mijlocie în $\triangle ABC$, deci Q va fi centrul de greutate al triunghiului, contradicţie. La fel se arată că $PN \nparallel AB$.

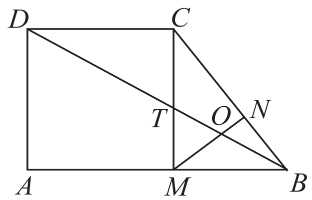
b) Din teorema lui Ceva aplicată în $\triangle ABC$ obţinem că $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$, de unde $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ (deci $MN \| BC$). Folosind teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversalele $D - M - P$ şi $E - N - P$, obţinem că $\frac{DA}{DC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{MA}{MB}$, respectiv $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{NA}{NC}$. Deducem că $\frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EB}$, prin urmare $DE \| BC$ şi, cu acasta, problema este rezolvată.



VII.197. *Fie $ABCD$ un trapez cu unghiurile $\widehat{A}$ şi $\widehat{D}$ drepte, în care $AD = DC < AB$. Fie M proiecţia lui C pe AB, iar N un punct de pe latura BC astfel încât $\frac{MO}{ON} = \frac{AB}{CD}$, unde $\{O\} = MN \cap BD$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{BMN}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $\{T\} = CM \cap BD$; aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle CMN$ cu

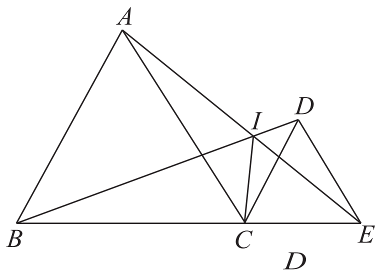


transversala $B-O-T$, obţinem că $\dfrac{BN}{BC}\cdot\dfrac{TC}{TM}\cdot\dfrac{OM}{ON}=1$. Însă $\dfrac{TC}{TM}=\dfrac{CD}{MB}$ (deoarece $CD\|AB$) şi $\dfrac{MO}{ON}=\dfrac{AB}{CD}$, prin urmare $\dfrac{BN}{BC}\cdot\dfrac{CD}{MB}\cdot\dfrac{AB}{CD}=1$, de unde $\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{MB}{AB}$. Rezultă că $MN\|AC$, aşadar $m(\widehat{BMN})=m(\widehat{BAC})=45°$.

VII.198. *Se consideră triunghiurile echilaterale ABC şi CDE astfel încât $C\in(BE)$, $BC=2CE$ iar A şi D nu sunt separate de dreapta BC. Dacă $\{I\}=BD\cap AE$, demonstraţi că $BI=2IE$.*

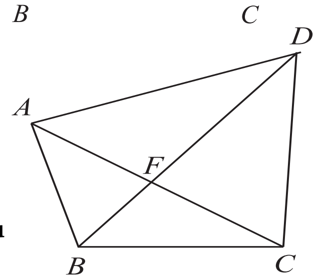
Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Triunghiurile BCD şi ACE sunt congruente (L.U.L.), deci $\widehat{CBD}\equiv\widehat{CAE}$. Atunci patrulaterul $ABCI$ este inscriptibil, prin urmare $\widehat{BIC}\equiv\widehat{BAC}$; obţinem astfel că $m(\widehat{BIC})=60°$. Analog se arată că $m(\widehat{CIE})=60°$, deci IC este bisectoarea unghiului $\widehat{BIE}$. Concluzia problemei rezultă din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul IBE.



VII.199. *Pe latura AC a triunghiului ABC cu $m(\widehat{A})=45°$ şi $m(\widehat{C})=30°$ se consideră punctul F astfel încât $BC^2=CF\cdot CA$. Perpendiculara în A pe AB intersectează dreapta BF în punctul D. Arătaţi că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău



Soluţie. Din $BC^2=CF\cdot CA$ se obţine că $\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CB}{CA}$ şi, cum $\widehat{FCB}=\widehat{BCA}$, rezultă că $\triangle FCB\sim\triangle BCA$. Atunci $m(\widehat{CBF})=m(\widehat{CAB})=m(\widehat{CAD})=45°$, prin urmare $ABCD$ este patrulater inscriptibil. Deducem că $m(\widehat{CDB})=m(\widehat{CAB})=45°$, aşadar $\triangle CBD$ are două unghiuri cu măsura de $45°$, deci este dreptunghic isoscel.

Clasa a VIII-a

VIII.193. *Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile exprimate prin numere naturale. Numărul ce reprezintă pătratul diagonalei este egal cu suma numerelor ce reprezintă dimensiunile paralelipipedului. Arătaţi că paralelipipedul este cub.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ dimensunile paralelipipedului; avem că $a^2+b^2+c^2=a+b+c$, prin urmare $(2a-1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2=3$. Obţinem că $a=b=c=1$, deci paralelipipedul este cub.

VIII.194. *Fie $a, m, p \in (0, \infty)$ cu $m \neq 1$. Considerăm numerele $a_1 = am + p$, $a_2 = a_1m+p, \ldots, a_{100} = a_{99}m+p$. Dacă $a_1=a_3$, calculaţi suma $S=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.*

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Soluţie. Avem: $a_2 = (am + p)m + p = am^2 + mp + p$, $a_3 = a_2m + p = am^3 + m^2p + mp + p$. Din $a_1 = a_3$ obţinem succesiv: $am = am^3 + m^2p + mp \Leftrightarrow a(1 - m^2) = p(m + 1) \Leftrightarrow a = \dfrac{p}{1-m}$. Atunci $a_1 = \dfrac{p}{1-m}m + p = \dfrac{p}{1-m} = a$ şi, din aproape în aproape, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{100} = a$. Astfel, $S = \dfrac{100p}{1-m}$.

VIII.195. *Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 = 54$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Avem că $x(x - y)^3 = 54$, de unde $x = \pm 54$, $x - y = \pm 1$ sau $x = \pm 2$, $x - y = \pm 3$. Soluţiile ecuaţiei sunt $(54, 53); (-54, -53); (2, -1)$ şi $(-2, 1)$.

VIII.196. *Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $x^3 + 3x^2 + 3x - y^2 + 2 = 0$.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Avem că $y^2 - (x + 1)^3 = 1$. *Teorema lui Preda Mihăilescu* (care rezolvă *Conjectura Catalan*) spune că singura soluţie netrivială a ecuaţiei diofantice $x^m - y^m = 1$ este $3^2 - 2^3 = 1$. În cazul nostru, $(y, x + 1) \in \{(\pm 1, 0); (\pm 3, 2)\}$. Soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt $(x, y) \in \{(-1, \pm 1); (-2, 0); (1, \pm 3)\}$.

VIII.197. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale nenule x şi y pentru care $\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 1$.*

Roxana Vasile şi Luminiţa Mihalache, Craiova

Soluţie. Relaţia din enunţ revine la $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 2$ şi este îndeplinită de numere de forma $x = 2(n + 1)^2$, $y = 2n^2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

VIII.198. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c) \leq \min\{(a^2 + b^2)^2, (b^2 + c^2)^2, (c^2 + a^2)^2\}$.*

Lucian Tuţescu şi Nicoleta Bran, Craiova

Soluţia 1. Folosind faptul că $4xy \leq (x + y)^2$, cu egalitate când $x = y$, precum şi egalităţile $(a+b+c)(-a+b+c) = (b+c)^2 - a^2$, $(a-b+c)(a+b-c) = a^2 - (b-c)^2$, obţinem că produsul P din membrul stâng al inegalităţii din enunţ este cel mult egal cu $\frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2 + a^2 - (b-c)^2]^2 = 4b^2c^2 \leq (b^2+c^2)^2$. La fel se arată că $P \leq (a^2+b^2)^2$ şi $P \leq (a^2 + c^2)^2$. Egalitatea se atinge când $(b + c)^2 - a^2 = a^2 - (b - c)^2$ şi $b^2 = c^2$ sau analoagele, deci pentru $a = b = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$ sau $b = c = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ sau $c = a = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Soluţia 2 (**Daniel-Cătălin Ploşniţă**, elev, Roşiori (Bacău))**.** Pentru produsul din enunţ obţinem prin calcul simplu că $P = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Să arătăm, de exemplu, că $P \leq (a^2 + b^2)^2$. Într-adevăr, $P - (a^2 + b^2)^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^4 - 2b^4 - c^4 = -(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \leq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a^2 = b^2$ şi $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ etc.

VIII.199. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = AA' \cdot \sqrt{2}$ şi M un punct pe baza superioară $A'B'C'D'$ astfel încât unghiurile $\widehat{AMC}$ şi $\widehat{BMD}$ să fie suplementare. Demonstraţi că M este centrul pătratului $A'B'C'D'$.*

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Se ştie (sau se arată uşor) că $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Pe de altă parte, $MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cdot \cos\widehat{AMC} = AC^2 = BD^2 = MB^2 + MD^2 - 2MB \cdot MD \cdot \cos\widehat{BMD}$, prin urmare $MA \cdot MC \cdot \cos\widehat{AMC} = MB \cdot MD \cdot \cos\widehat{BMD}$. Dacă $\widehat{AMC}$ nu este drept, numerele din cei doi membri ai egalităţii precedente au semne opuse, contradicţie; rămâne deci că $m(\widehat{AMC}) = 90°$. În $\triangle AMC$ dreptunghic, mediana ipotenuzei MO este egală cu $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot AB = AA'$. Deducem că $M = O'$, unde O' este centrul bazei superioare.

Clasa a IX-a

Notă. Soluţia problemei **IX.154** publicată în *RecMat 1/2015*, p.63, este greşită; prin însumarea inegalităţilor $\frac{R}{r} \geq \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_a}$ şi analoagele se obţine că $\frac{3R}{r} \geq \left(\frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_c} + \frac{l_c}{l_a}\right) + \left(\frac{l_a}{l_c} + \frac{l_b}{l_a} + \frac{l_c}{l_b}\right)$ şi nu $\frac{3R}{2r} \geq \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_b}{l_c} + \frac{l_c}{l_a}$. Vina pentru această eroare aparţine redacţiei şi nu autorului problemei. Redăm în continuare soluţia d-lui **Vasile Jiglău**.

Cum $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$, folosind inegalitatea mediilor, obţinem că $l_a^2 \leq p(p-a)$, de unde $\sum l_a^2 \leq p^2$. Pe de altă parte, $\sum \frac{1}{l_a^2} \leq \frac{1}{3r^2}$ (problema 2821 din Crux Mathematicorum, vol. 29, nr. 2, cu soluţie în vol. 30, nr. 2, disponibile pe site-ul publicaţiei), deci $\frac{\sum l_a^2 l_b^2}{l_a l_b l_c} \leq \frac{1}{r\sqrt{3}}$. Folosind $C-B-S$ şi binecunoscuta $3\sqrt{3}R \geq 2p$, obţinem: $\sum \frac{l_a}{l_b} = \frac{\sum l_a^2 l_c}{l_a l_b l_c} \leq \frac{\sqrt{(\sum l_a^2)(\sum l_a^2 l_b^2)}}{l_a l_b l_c} \leq \frac{p}{r\sqrt{3}} \leq \frac{3R}{2r}$, adică tocmai cerinţa problemei.

IX.161. *Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$, arătaţi că*

$$\frac{a^m}{b^m} + \frac{b^m}{c^m} + \frac{c^m}{a^m} \leq \frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{c^n} + \frac{c^n}{a^n}.$$

Robert Antohi, elev, Iaşi

Soluţie. Notăm $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$; atunci $xyz = 1$. Vom arăta că $x^n + y^n + z^n \geq x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}$, $\forall x, y, z \in (0, \infty)$ cu $xyz = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi inegalitatea din enunţ va rezulta drept conecinţă. Aplicăm inegalitatea lui Cebîşev şirurilor (x, y, z) şi $(x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1})$, care pot fi reordonate astfel încât ambele să fie crescătoare; obţinem că

$$3(x^n + y^n + z^n) \geq (x + y + z)(x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}).$$

Însă $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ şi astfel urmează inegalitatea dorită.

IX.162. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere reale pozitive. Pentru fiecare $n \geq 2$, definim mulţimea $A_n = \{a_i a_j | 1 \leq i < j \leq n\}$.*

a) *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică, arătaţi că A_n conţine exact $2n - 3$ elemente, oricare ar fi $n \geq 2$.*

b) *Dacă* A_n *are* $2n-3$ *elemente, oricare ar fi* $n \geq 2$, *demonstraţi că* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este progresie geometrică.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. a) Pentru $n \geq 2$, considerăm mulţimea $B_n = \{a_1a_2, a_1a_3, \ldots, a_1a_n, a_2a_n, \ldots, a_{n-1}a_n\}$; evident că $B_n \subset A_n$ şi $|B_n| = 2n-3$. Observăm că, pentru $i+j-1 \leq n$, avem $a_ia_j = a_1^2q^{i+j-2} = a_1a_{i+j-1} \in B_n$, iar pentru $i+j-1 > n$, avem $a_ia_j = a_na_{i+j-n} \in B_n$, deci $A_n \subset B_n$. Rezultă că $A_n = B_n$, prin urmare $|A_n| = 2n-3$, $\forall n \geq 2$.

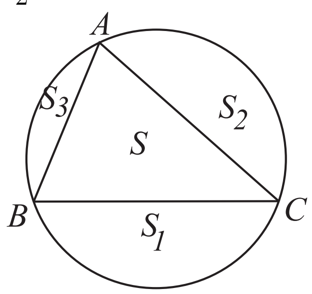
b) Dacă $|A_n| = 2n-3$,atunci $A_n = B_n$, $\forall n \geq 2$. Observăm că $a_2a_{n-1} > a_1a_{n-1} > a_1a_i$, $\forall i \in \overline{2, n-2}$ şi $a_2a_{n-1} < a_2a_n < a_ja_n$, $\forall j \in \overline{3, n-1}$; cum $a_2a_{n-1} \in B_n$, rămâne că $a_2a_{n-1} = a_1a_n$. Procedând analog pentru fiecare pereche de indici, obţinem că $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \ldots = \dfrac{a_2}{a_1}$, de unde concluzia problemei.

Notă (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Deoarece numerele a_n sunt pozitive, există numerele x_n astfel încât $x_n = \ln a_n$. Cum (a_n) este progresie geometrică dacă şi numai dacă (x_n) este progresie aritmetică, problema este echivalentă cu **L252** din *RecMat 2/2013*.

IX.163. *Fie* ABC *un triunghi de arie* S *şi* S_1, S_2, S_3 *ariile segmentelor de disc ce se formează între laturile triunghiului şi cercul circumscris acestuia. Arătaţi că* $S < S_1 + S_2 + S_3$.

Andrei Nicolaescu, elev, Craiova

Soluţie. Inegalitatea de demonstrat revine la $S < \dfrac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow abc < 2\pi R^3 \Leftrightarrow 8R^3 \sin A \sin B \sin C < 2\pi R^3 \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C < \dfrac{\pi}{4}$. Se ştie că $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ şi atunci, din inegalitatea mediilor, $\sin A \sin B \sin C \leq \left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} < \dfrac{3}{4} < \dfrac{\pi}{4}$.

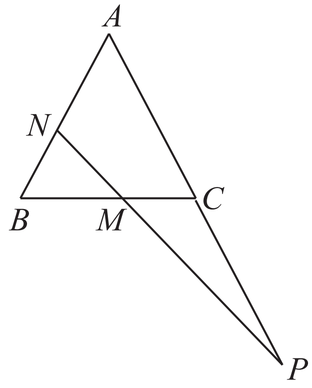


Notă (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Mai general, $S \leq S_{BMC} + S_{CNA} + S_{APC}$, unde M, N, P sunt punctele de intersecţie cu cercul circumscris ale bisectoarelor din A, B şi C. Într-adevăr, $S_1 = \dfrac{1}{4}a^2 \operatorname{tg} \dfrac{A}{2}$ şi analoagele; folosind inegalitatea Cebîşev, inegalitatea Ionescu-Weitzenback şi cunoscuta $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{C}{2} \geq \sqrt{3}$, obţinem că $S_{BMC} + S_{CNA} + S_{APC} = \dfrac{1}{4}\left(a^2 \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} + b^2 \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} + c^2 \operatorname{tg} \dfrac{C}{2}\right) \geq \dfrac{1}{12}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{C}{2}\right) \geq \dfrac{1}{12} \cdot 4\sqrt{3}S \cdot \sqrt{3} = S$.

IX.164. *Pe laturile* AB *şi* BC *ale triunghiului isoscel* ABC (*cu* $AB = AC$) *se consideră punctele* N, *respectiv* M, *astfel încât* $AN = 2NB$ *şi* $BM = MC$. *Dacă* $\{P\} = MN \cap AC$, *demonstraţi că* $\max\{AB, BC\} < MP < \sqrt{AB^2 + BC^2}$.

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie. Notăm $a = BC$, $b = AB = AC$. Folosind teorema lui Menelaus, se arată uşor că $AC = CP$. Cu teorema cosinusului aplicată în triunghiurile ABP şi ABC, obţinem că $BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP \cdot \cos A = b^2 + 4b^2 - 2 \cdot b \cdot 2b \cdot \dfrac{2b^2 - a^2}{2b^2} = b^2 + 2a^2$. Aplicăm acum teorema medianei în $\triangle BPC$ şi găsim $PM^2 = \dfrac{1}{4}(2BP^2 + 2PC^2 - BC^2) = b^2 + \dfrac{3}{4}a^2$. Inegalităţile cerute se deduc acum cu uşurinţă (pentru a demonstra că $MP > BC$ vom ţine cont de inegalitatea triunghiului $2b > a$).



IX.165. *Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Dacă $\widehat{MAC} \equiv \widehat{B}$ şi $m(\widehat{BAM}) = 105°$, determinaţi $m(\widehat{B})$.*

Mircea Lascu şi Marius Stănean, Zalău

Soluţie (Gabriel Popa). Fie $x = m(\widehat{B})$, $a = BM = MC$ şi $b = AC$; atunci $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{AMC}) = 105° + x$. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile AMC şi ABC, obţinem că $\dfrac{b}{\sin(105° + x)} = \dfrac{a}{\sin x}$, respectiv $\dfrac{b}{\sin x} = \dfrac{2a}{\sin(105° + x)}$. De aici, $b^2 = 2a^2$ şi atunci $\sqrt{2} \sin x = \sin(105° + x)$. Efectuând calculele, ultima relaţie devine succesiv: $\sqrt{2} \sin x = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos x + \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \sin x \Leftrightarrow 4 \sin x = (\sqrt{3} + 1) \cos x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 30°$.

Clasa a X-a

X.161. *Pentru $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, arătaţi că $x < x^{\log_2 x} + 3^{\log_2^3 x} + 5^{\log_2^5 x}$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Notăm $a = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^a$; inegalitatea de demonstrat devine $2^a < 2^{a^2} + 3^{a^3} + 5^{a^5}$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Dacă $a \in (-\infty, 0]$, atunci $2^a \leq 1$, iar $2^{a^2} + 3^{a^3} + 5^{a^5} > 2^0 + 0 + 0 = 1$. Dacă $a \in (0, 1)$, atunci $2^a < 2$, iar $2^{a^2} + 3^{a^3} + 5^{a^5} > 2^0 + 2^0 + 2^0 = 3$. În sfârşit, dacă $a \in [1, \infty)$, atunci $2^a \leq 2^{a^2} < 2^{a^2} + 3^{a^3} + 5^{a^5}$.

X.162. *Fie a, b, c, d numere complexe astfel încât $\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{c}{|c|} + \dfrac{d}{|d|} = 0$. Arătaţi că $|z - a| + |z - b| + |z - c| + |z - d| \geq |a| + |b| + |c| + |d|$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.*

Irina Cristali, elevă, Bucureşti

Soluţie. Punctele $A\left(\dfrac{a}{|a|}\right)$, $B\left(\dfrac{b}{|b|}\right)$, $C\left(\dfrac{c}{|c|}\right)$ şi $D\left(\dfrac{d}{|d|}\right)$ se află pe cercul unitate şi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$; atunci $ABCD$ este dreptunghi (cu centrul în origine). Fie $A'(a)$, $B'(b)$, $C'(c)$ şi $D'(d)$; punctele A', O, C' sunt coliniare, la fel ca şi punctele B', O, D'. Dacă $Z(z)$ este un punct în plan, atunci $ZA' + ZC' \geq A'C' \Leftrightarrow |z - a| + |z - c| \geq |a| + |c|$, iar $ZB' + ZD' \geq B'D' \Leftrightarrow |z - b| + |z - d| \geq |b| + |d|$. Adunând aceste relaţii, se obţine inegalitatea dorită. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $\{Z\} = A'C' \cap B'D'$ i.e. $Z = O$, adică $z = 0$.

X.163. *Dacă* $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, *arătaţi că* $\sin 2x < \frac{1}{2x^2 - x^4}$.

Lucian Tuţescu şi Cristian Moanţă, Craiova

Soluţie. Cum $0 < x < \frac{\pi}{3} < \sqrt{2}$, avem că $2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) > 0$. Trebuie să arătăm că $\frac{2}{\sin 2x} > 4x^2 - 2x^4$ şi, cum $\frac{2}{\sin 2x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, rămâne de demonstrat inegalitatea $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2x^4 > 4x^2$. Din inegalitatea mediilor, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + x^4 + x^4 > 4\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x \cdot x^4 \cdot x^4} = 4x^2$; egalitate nu putem avea, căci egalitatea $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = x^4$ nu este posibilă pentru $x \in (0, \frac{\pi}{3})$.

X.164. *Determinaţi* $a, n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ *cu proprietatea că numerele* $\log_a(n-1)$ *şi* $\log_a n$ *sunt raţionale.*

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţie. Fie $n \geq 3$; cum $\log_a(n-1) > 0$ şi $\log_a n > 0$, vom avea $n - 1 = a^{\frac{x}{y}}$ şi $n = a^{\frac{z}{t}}$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$. Atunci $(n-1)^y = a^x$ şi $n^t = a^z$, de unde $(n-1)^{yz} = n^{tx}$. Însă yz, tx sunt numere naturale nenule iar $n, n-1$ sunt prime între ele, prin urmare relaţia precedentă este imposibilă.

Pentru $n = 2$, $\log_a(n-1) = 0 \in \mathbb{Q}$ şi $\log_a 2 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2 = a^{\frac{z}{t}}$, $z, t \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a = 2^{\frac{t}{z}}$, $z, t \in \mathbb{N}$; cum $a \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 1$, obţinem că $\frac{t}{z} \in \mathbb{N}$. În concluzie, $n = 2$ şi $a = 2^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

X.165. *Determinaţi perechile* (m, n) *de numere întregi cu proprietatea că* $m(\sin^n x + \cos^n x - 1) = n(\sin^m x + \cos^m x - 1)$, *oricare ar fi* $x \in \mathbb{R}$.

Mihai Dicu, Craiova

Soluţie. Evident, orice pereche (m, m), $m \in \mathbb{Z}$, este soluţie a problemei. În continuare, presupunem că $m \neq n$. Relaţia din enunţ este adevărată pentru $x = \pi$, prin urmare $m((-1)^n - 1) = n((-1)^m - 1)$. Dacă m şi n ar fi ambele impare, ajungem la $m = n$, în contradicţie cu presupunerea făcută. Dacă m şi n ar avea parităţi diferite, ajungem la $m = n = 0$, imposibil. Rămâne că $m = 2p$ şi $n = 2q$, cu $p, q \in \mathbb{N}$. În relatia din enunţ, luăm $x = \frac{\pi}{4}$ şi obţinem, după calcule, că $\frac{2^{1-p} - 1}{p} = \frac{2^{1-q} - 1}{q}$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{2^{1-x} - 1}{x}$. Cum $f(1) = 0$, $f(2) = f(3) = -\frac{1}{4}$ şi $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x(x+1)}\left(1 - \frac{x+2}{2^x}\right) > 0$, $\forall x \geq 3$, rezultă că valorile $p = 2$, $q = 3$ (sau invers) sunt singurele pozitive care conduc la soluţii ale problemei. Pentru că $f(-1) = -3$, $f(-2) = -\frac{3}{2}$ şi $f(x+1) - f(x) < 0$, $\forall x \leq -2$, nu există soluţii având componente distincte negative. Evident, nu există nici soluţii având componente de semne contrare.

În concluzie, perechile căutate sunt $\{(4, 6), (6, 4)\} \cup \{(m, m) | m \in \mathbb{Z}\}$.

Clasa a XI-a

XI.161. *Se consideră parabola $\mathcal{P} : y = ax^2 + a$ $(a > 0)$ şi cercul $\mathcal{C}$, tangent la parabolă în M şi la axa Ox în N. Scrieţi ecuaţia cercului $\mathcal{C}$, ştiind că tangenta în M la parabolă trece prin origine.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie $M(x_0, y_0)$; panta tangentei în M la parabolă este $y'\Big|_{x=x_0} = 2ax_0$, deci ecuaţia acestei tangente este $d_i : y - y_0 = 2ax_0(x - x_0)$. Originea aparţine accestei drepte, deci $y_0 = 2ax_0^2 = ax_0^2 + a$, de unde $x_0 = \pm 1$. Obţinem două puncte $M : M_1(1, 2a)$ şi $M_2(-1, 2a)$. Fie $C(m, n)$ centrul cercului; raza lui $\mathcal{C}$ va fi egală cu n, iar distanţa de la C la tangenta d va fi tot egală cu n. În cazul $x_0 = 1$, această egalitate conduce la $m = n\dfrac{1 + \sqrt{4a^2 + 1}}{2a}$. În plus, CM_1 este perpendiculară pe tangenta d_1, de unde obţinem relaţia $\dfrac{n - 2a}{m - 1} \cdot 2a = -1$. Găsim, astfel, coordonatele lui C: $x_C = \sqrt{4a^2 + 1}$, $y_c = 2a + \dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{2a}\sqrt{4a^2 + 1}$. Cunoscând centrul şi raza, putem scrie ecuaţia cercului $\mathcal{C}_1$ tangent în M_1 la parabola $\mathcal{P}$. Va mai exista şi un al doilea cerc, simetricul primului în raport cu axa Ox.

XI.162. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu proprietatea că $3A^4 - 14A^3 - 13A^2 + 6I_n = O_n$. Demonstraţi că $\det A > 0$.*

Bogdan-Petre Posa, Bucureşti

Soluţie. Dacă λ este o valoare proprie a lui A, atunci $3\lambda^4 - 14\lambda^3 - 13\lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow (3\lambda^2 + 4\lambda + 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 3) = 0$. Dacă α şi $\overline{\alpha}$ sunt rădăcinile complexe nereale ale polinomului $3\lambda^2 + 4\lambda + 2$, iar β_1 şi β_2 sunt rădăcinile reale (pozitive) ale polinomului $\lambda^2 - 6\lambda + 3$, atunci $\lambda \in \{a, \overline{\alpha}, \beta_1, \beta_2\}$, prin urmare $\det A = \alpha^m \overline{\alpha}^m \beta_1^p \beta_2^q > 0$.

XI.163. *Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $3 \leq m < n$ şi funcţia $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin^m x}{m} + \dfrac{\cos^m x}{n}$. Determinaţi imaginea funcţiei f.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Scriem $f(x) = \dfrac{1}{mn} \cdot g(x)$, unde $g(x) = m\cos^m x + n\sin^m x$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Funcţia g este derivabilă, cu $g'(x) = m\sin x \cos x(n\sin^{m-2} x - m\cos^{m-2} x)$. Notând $x_0 = \operatorname{arctg} \sqrt[m-2]{\dfrac{m}{n}} \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, avem că $g'(x) < 0$, $\forall x \in (0, x_0)$ şi $g'(x) > 0$, $\forall x \in \left(x_0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, prin urmare x_0 este unicul punct de minim al funcţiei g, deci şi al funcţiei f. Avem că $f_{\min} = f(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt[m-2]{m^2} + \sqrt[m-2]{n^2}}}\left(\dfrac{\sqrt[m-2]{m}}{m} + \dfrac{\sqrt[m-2]{n}}{n}\right)$, $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \dfrac{1}{m}$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{m}$. În concluzie, $\operatorname{Im} f = \left[f_{\min}, \dfrac{1}{m}\right)$.

XI.164. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} \sqrt[n+1]{n+1} - x_n \sqrt[n]{n})$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Dacă y_n este şirul a cărui limită se cere, atunci $y_n = (x_{n+1}-x_n)\sqrt[n+1]{n+1}+x_n(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n})$, $\forall n \geq 2$. Primul termen al acestei sume are limita $x \cdot 1 = x$. Al doilea termen are limita egală cu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}\cdot\lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n}\cdot\lim_{n\to\infty} n\cdot\sqrt[n]{n}\cdot u_n$$
$$= x\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-1}{\ln u_n}\cdot\ln u_n^n,$$

unde $u_n = \dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \to 1$. Avem că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n-1}{\ln u_n} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln u_n^n = 0$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x+0 = x$.

XI.165. *Există două funcţii strict convexe ale căror grafice se intersectează în exact n puncte?*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Da, iar punctele în care se intersectează graficele funcţiilor pot fi alese arbitrar. Anume, fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ numere reale fixate şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^{2m} + Ax^2 + h(x)$ şi $g(x) = x^{2m} + Ax^2$, unde $h(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Evident, graficele lui f şi g se intersectează în exact n puncte (ale căror abscise sunt $a_1, a_2, \ldots, a_n$), iar pentru m număr natural nenul şi A număr pozitiv, g este strict convexă. Mai rămâne să vedem cum să alegem pe m şi pe A pentru a asigura şi convexitatea funcţiei f.

Derivata a doua a lui f este $f''(x) = 2m(2m-1)x^{2m-2} + h''(x) + 2A$, deci este o funcţie polinomială de grad par dacă m este ales astfel încât $2m > n$. Fiind de grad par, are un minim absolut pe $\mathbb{R}$, acesta fiind $2A + \min\limits_{x\in\mathbb{R}}(2m(2m-1)x^{2m-2} + h''(x))$. E suficient deci să luăm $A > -\dfrac{1}{2}\min\limits_{x\in\mathbb{R}}(2m(2m-1)x^{2m-2} + h''(x))$, pentru ca f'' să aibă cea mai mică valoare strict pozitivă şi, în consecinţă, f să fie strict convexă pe $\mathbb{R}$.

Clasa a XII-a

XII.161. *Fie u, v numere reale fixate şi mulţimile*

$$M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & ua & vb & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}, \quad V = \{(ua, vb, c) | a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Pe mulţimea M definim operaţia de înmulţire a matricelor, iar pe mulţimea V considerăm adunarea vectorilor. Demonstraţi că $(M, \cdot)$ şi $(V, +)$ sunt grupuri comutative izomorfe.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Se verifică uşor fiecare dintre axiomele grupului, iar izomorfismul este cel natural.

XII.162. *Let* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *be a continuous differentiable function. Prove that* $\displaystyle\int_0^x (f(t) + \sin^2 t \cdot f'(t))dt \geq f(x) \cdot \sin^2 x$, $\forall x \geq 0$.

Zdravko Starc, Vrsac, Serbia

Soluţie. Se integrează pe $[0, x]$, unde $x \geq 0$, inegalitatea evidentă $f(t)\sin 2t \leq f(t)$, $\forall t \geq 0$.

XII.163. *Determinaţi funcţia derivabilă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dacă* $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ *şi* $2f - f' \in \displaystyle\int f(x)dx$.

Ovidiu Pop, Satu-Mare

Soluţie. Avem: $2f - f' \in \int f(x)dx \Leftrightarrow (2f - f')' = f \Leftrightarrow f'' - 2f' + f = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})'' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = a$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = (ax + b)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Din $f(x) = 1$, $f'(0) = 0$ obţinem că $a = -1$, $b = 1$, deci $f(x) = (1 - x)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

XII.164. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă cu proprietatea că* $f(x)f(1 - x) \geq \displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx$, $\forall x \in [0, 1]$. *Demonstraţi că funcţia* f *nu poate fi injectivă.*

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. Integrând relaţia din enunţ pe intervalul $[0, 1]$, obţinem că $\displaystyle\int_0^1 f(x)f(1-x)dx \geq \int_0^1 f^2(x)dx$. Facem, în ambele integrale, schimbarea de variabilă $1 - x = y$; obţinem că $\displaystyle\int_0^1 f(1 - x)f(x)dx \geq \int_0^1 f^2(1 - x)dx$. Sumând cele două inegalităţi, rezultă că $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1 - x))^2 dx \leq 0$, prin urmare $f(x) = f(1 - x)$, $\forall x \in [0, 1]$ şi, de aici, concluzia problemei.

XII.165. *Calculaţi* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{(-1)^{[\sqrt{x}]}}{x^2} dx$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Notăm integrala din enunţ cu I_n şi scriem:

$$I_n = \sum_{p=1}^{k-1} \int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{(-1)^p}{x^2} dx + \int_{k^2}^n \frac{(-1)^k}{x^2} dx = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{(-1)^{p-1}}{x}\bigg|_{p^2}^{(p+1)^2} + \frac{(-1)^{k-1}}{x}\bigg|_{k^2}^n.$$

Cum $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x}\bigg|_{k^2}^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k^2}\right) = 0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^{p-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{q=2}^{k} (-1)^q \frac{1}{q^2} + \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^p \frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(2\sum_{p=1}^{k} (-1)^p \frac{1}{p^2} + 1 - (-1)^k \frac{1}{k^2}\right) = -2 \cdot \frac{\pi^2}{12} + 1 = 1 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Am folosit faptul că $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$; ca urmare, $\sum\limits_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\frac{1}{p^2}=$ $\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p^2}-2\sum\limits_{q=1}^{k}\frac{1}{(2q)^2}=\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{q=1}^{[\frac{k}{2}]}\frac{1}{q^2}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2015

A. Nivel gimnazial

G286. *Definim mulţimile $(A_n)_{n\geq 0}$ astfel: $A_0=\{1,2,\ldots,2015\}$; A_1 se obţine înlocuind fiecare element al lui A_0 cu suma tuturor celorllate elemente ale lui A_0; A_2 se obţine înlocuind fiecare element al lui A_1 su suma tuturor celorlate elemente ale lui A_1 ş.a.m.d. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, arătaţi că nu există elemente în A_n care să fie congruente modulo* 2016*.*

Vlad Tuchiluş, elev, Iaşi

Soluţie. Să observăm că $|A_n|=2015$, $\forall n\in\mathbb{N}$: dacă $A_n=\{a_1,a_2,\ldots,a_{2015}\}$ şi $S=a_1+a_2+\ldots+a_{2015}$, atunci $A_{n+1}=\{S-a_1,S-a_2,\ldots,S-a_{2015}\}$. Pentru $a_i,a_j\in A_n$, $i\neq j$, corespondentele lor în $A_{n+1}, S-a_i$ şi $S-a_j$, au proprietatea că $|(S-a_i)-(S-a_j)|=|a_i-a_j|$, deci valorile absolute ale diferenţelor perechilor de elemente din A_n sunt mereu aceleaşi. Astfel, o mulţime A_n ar conţine elemente congruente modulo 2016 dacă şi numai dacă A_0 ar conţine astfel de elemente. Cum acest lucru nu se întâmplă, rezultă concluzia problemei.

G287. *Avem un număr nemărginit de jetoane de opt culori. Stabiliţi care este cel mai mic număr de jetoane care trebuie aşezate în rând astfel încât, pentru oricare două culori diferite, să se găsească în rând două jetoane vecine având aceste culori.*

Ioan Viorel Codreanu, Satulung

Soluţie. Pentru o culoare fixată A, un jeton de culoare A trebuie să fie vecin cu jetoane de alte şapte culori. Cum un jeton nu are mai mult de doi vecini, în rând trebuie să existe măcar patru jetoane de culoare A; analog pentru celelalte culori. În total, trebuie să avem măcar $4\cdot 8=32$ jetoane. Un exemplu de aşezare a 32 jetoane este următorul:

$$12345678246857315271483618534762.$$

G288. *Fie a,b,c numere naturale nenule astfel încât $3ab=2c^2$. Arătaţi că numărul $a^3+b^3+c^3$ este compus.*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

Soluţie. Cum $3ab=2c^2$, rezultă că $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c)=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)$. Însă a,b,c nu pot fi toate egale (relaţia $3ab=2c^2$ ar conduce la $3=2$) iar $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc=\frac{1}{2}((a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2)\geq\frac{1}{2}(0^2+(1+1)^2+(1+1)^2)=4$; rămâne să mai arătăm că $a+b-c\geq 2$. Presupunem că $a+b-c=1$; ipoteza $3ab=2c^2$ conduce la $3ab=2(a+b-1)^2$, adică $(a-1)^2+(b-1)^2+a^2+b^2+ab=0$, ceea ce este imposibil. Cu aceasta, soluţia este completă.