$\forall x > 0$, deci $g'(x) \leq 0$, $\forall x > 0$. Aşadar, g este descrescătoare pe $(0, \infty)$, fapt din care rezultă că $g(1) \geq \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} [e^x + F\left(\frac{1}{x}\right)] = \infty + F(0) = \infty$ (întrucât F este continuă în 0) şi ajungem la absurditatea $e + F(1) \geq \infty$. În final, funcţia f nu are primitive.

Soluţia 2 (**Gheorghe Iurea**, Iaşi)**.** Presupunem, prin absurd, că există $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ primitivă a funcţiei f. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $F : \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$, obţinem $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ pentru care $F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) = f(c_n) \cdot \frac{1}{n(n+1)}$. Cum $c_n > 0$, din ipoteză vom avea că $f(c_n) \geq \frac{1}{c_n^2} \cdot e^{\frac{1}{c_n}}$, aşadar $F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot e^{\frac{1}{c_n}}$. Din $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 1$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot e^{\frac{1}{c_n}} = \infty$. Însă F este continuă în 0, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \left[F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = 0$ şi, astfel, am ajuns la o contradicţie.

XII.155. Determinaţi funcţiile continue $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $\max\{f(a), g(a)\} \leq \int_0^a f(x) \cdot g(x) dx$, $\forall a \in [0, \infty)$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie (**Moubinool Omarjee**, Paris)**.** Funcţia $a \mapsto F(a) = \int_0^a f(x)g(x)\,dx$ este derivabilă, cu $F'(a) = f(a)g(a)$. Deoarece $g(a) \leq F(a)$, $\forall a \in [0, \infty)$, această inegalitate revine succesiv la:

$$f(a)g(a) \leq f(a)F(a) \Leftrightarrow F'(a) - f(a)F(a) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-\int_a^b f(x)dx} F'(a) - f(a)e^{-\int_0^a f(x)dx} F(a) \leq 0 \Leftrightarrow (e^{-\int_0^a f(x)dx} F(a))' \leq 0,$$

deci funcţia $a \mapsto K(a) = e^{-\int_0^a f(x)dx} F(a)$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$. Atunci $K(a) \leq K(0) = 0$, $\forall a \in [0, \infty)$, de unde deducem că $F(a) \leq 0$, $\forall a \in [0, \infty)$. Funcţiile f şi g sunt pozitive, continue şi au ca produs funcţia nulă; rezultă că $f(x) = g(x) = 0$, $\forall x \in [0, \infty)$. Reciproc, funcţiile $f = g = 0$ verifică ipotezele problemei.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2014

A. Nivel gimnazial

G266. *Determinaţi numărul natural n minim având proprietatea: oricare ar fi mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, există $B, C \subset A$ astfel încât $|B| = |C| = 3$, $B \cap C = \emptyset$ şi $S_B + S_C \vdots 3$. (Am notat cu S_M suma elementelor mulţimii M.)*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Evident, $n \geq 6$. Luând o mulţime A de cardinal 6 astfel încât suma elementelor lui A nu se divide cu 3, rezultă că $n = 6$ nu convine. Considerând o mulţime A care conţine cinci numere de tipul $M_3 + 1$ şi două numere de tipul $M_3 + 2$, constatăm că $n = 7$ nu are proprietatea din enunţ. Vom arăta că $n = 8$ are proprietatea dorită, deci $n_{\min} = 8$.

Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ o mulţime oarecare de numere naturale. Considerând cinci elemente oarecare ale lui A, există printre ele trei având suma divizibilă cu 3 (se arată uşor; a se vedea, de exemplu, soluţia problemei L77 din *RecMat 1/2006*); aceste trei numere vor forma mulţimea B. Considerând cele două numere rămase de mai înainte şi cele trei rămase în A, obţinem cinci numere din care, iarăşi, putem selecta trei având suma divizibilă cu 3; acestea vor forma mulţimea C şi B, C au proprietăţile dorite.

G267. *Demonstraţi că nu există numere naturale x, y prime între ele, de parităţi diferite, pentru care numărul $a = xy^3 - yx^3$ să fie pătrat perfect.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $x, y \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = 1$, x impar şi y par, astfel încât $xy^3 - yx^3 = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Cum $(x, y) = 1$, se arată uşor că $(x, y^2 - x^2) = (y, y^2 - x^2) = 1$ şi, cum $xy(y^2 - x^2)$ este pătrat perfect, rezultă că fiecare dintre numerele x, y şi $y^2 - x^2$ este pătrat perfect. Însă $y^2 - x^2 = (M_2)^2 - (M_2 + 1)^2 = M_4 + 3$, deci $y^2 - x^2$ nu poate fi pătrat perfect. Contradicţia la care am ajuns arată că este adevărată concluzia problemei.

G268. *Considerăm numărul $a = 0,149162536\ldots$, obţinut prin scrierea (după virgulă) a tuturor pătratelor perfecte, unul după altul. Demonstraţi că a este iraţional.*

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. Dacă, prin absurd, a ar fi număr raţional, atunci ar exista un grup de cifre $T = \overline{a_k a_{k+1} \ldots a_p}$ care să se repete în scrierea lui a, de la un loc încolo. Însă a conţine oricât de multe zerouri consecutive, deoarece conţine cifrele pătratului $10^{2t} = 100\ldots0$, unde $2t > p - k + 1$. Deducem că $T = \overline{00\ldots0}$, evident, imposibil.

G269. *Arătaţi că* $A = \dfrac{1}{25}(9^{8n+4} + 5 \cdot 9^{6n+3} + 33 \cdot 9^{4n+2} + 5 \cdot 9^{2n+1} + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, *este număr natural compus.*

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Cu notaţia $x = 9^{2n+1}$, numărătorul lui A se scrie sub forma $x^4 + 5x^3 + 33x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 7x + 1)^2 - 9x(x+1)^2 = (9^{4n+2} + 7 \cdot 9^{2n+1} + 1)^2 - 9^{2n+2} \cdot (9^{2n+1} + 1)^2 = (9^{4n+2} - 9^{3n+2} + 7 \cdot 9^{2n+1} - 9^{n+1} + 1)(9^{4n+2} + 9^{3n+2} + 7 \cdot 9^{2n+1} + 9^{n+1} + 1)$. Cum fiecare paranteză este divizibilă cu 5 şi strict mai mare ca 5, rezultă cerinţa problemei.

G270. *Scrieţi în ordine crescătoare numerele* $2014!$, $(201!)^{4!}$ *şi* $(20!)^{14!}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Vom ţine cont de inegalităţile

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

(Olimpiada austriacă de matematică, 1979; *GM(B)-1/1990*, p.39); inegalitatea din stânga se demonstrează prin inducţie, iar cea din dreapta aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $1, 2, \ldots, n$. Avem:

$$2014! < \left(\frac{2015}{2}\right)^{2014} < 1008^{2014} = 16^{2014} \cdot 67^{2014},$$
$$(201!)^{4!} > \left(\frac{202}{3}\right)^{201\cdot 24} > 67^{2014} \cdot 67^{2810} > 67^{2014} \cdot 16^{2014},$$

prin urmare $2014! < (201!)^{4!}$. Apoi,

$$(201!)^{4!} < \left(\frac{202}{2}\right)^{201\cdot 24} = 101^{4824},$$
$$(20!)^{14!} > \left[\left(\frac{21}{3}\right)^{20}\right]^{(\frac{15}{3})^{14}} = 7^{20\cdot 5^{14}}.$$

Însă $101^{4824} < 7^{20\cdot 5^{14}}$, deoarece această inegalitate revine la $101^{1206} < (7^5)^{5^{14}}$ şi este evident că $101 < 7^5$, iar $1206 < 5^{14}$.

În concluzie, avem ordinea $2014! < (201!)^{4!} < (20!)^{14!}$.

G271. *Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Arătaţi că*

$$\frac{x(y^2+z^2)}{y^2-yz+z^2} + \frac{y(z^2+x^2)}{z^2-zx+x^2} + \frac{z(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2} \geq 6xyz.$$

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Din $(y-z)^4 \geq 0$ rezultă sucesiv:

$$y^4 + z^4 + 6y^2z^2 \geq 4yz(y^2+z^2) \Leftrightarrow (y^2+z^2)^2 \geq 4yz(y^2-yz+z^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(y^2+z^2)}{y^2-yz+z^2} \geq \frac{4xyz}{y^2+z^2}.$$

Atunci

$$\sum \frac{x(y^2+z^2)}{y^2-yz+z^2} \geq 4xyz\left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2+z^2} + \frac{1}{z^2+x^2}\right) \geq$$
$$\geq 4xyz \cdot \frac{(1+1+1)^2}{2(x^2+y^2+z^2)} = 6xyz.$$

G272. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq 9\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - \frac{21}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

Soluţie. Din inegalitatea mediilor, rezultă că $\frac{a^3}{b^3} + \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} \geq \frac{3a^3}{abc}$ şi încă două relaţii similare. Prin adunarea acestora, obţinem că $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

Înseamnă că ar fi suficient să arătăm că

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq 9\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-\frac{21}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc} \geq 9\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(\sum(a-b)^2)}{2abc} \geq \frac{9}{2}\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}.$$

Pentru aceasta, vom demonstra că

$$\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{2abc} \geq \frac{9}{2}\cdot\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}.$$

Dacă $a=b$, avem egalitate; dacă $a\neq b$, trebuie să arătăm că $(a+b+c)(a+c)(b+c)\geq 9abc$, adică $c^2(a+b+c)+(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc$. Însă, din inegalitatea mediilor, $(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc$ şi, astfel, soluţia este completă.

Notă. Am primit din partea d-lui **Moubinool Omarjee**, Paris, o soluţie care foloseşte metoda lui Sturm.

G273. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu laturile opuse neparalele şi fie O un punct în interiorul acestuia. Arătaţi că există un unic paralelogram $MNPQ$ având centrul O şi vârfurile pe dreptele AB, BC, CD respectiv DA.*

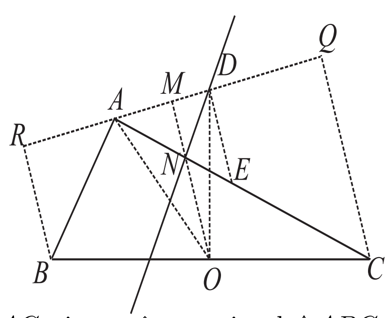
Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Observăm că, date dreptele neparalele d şi d' şi punctul O în afara lor, există şi sunt unice punctele $A\in d, B\in d'$ astfel încât $OA=OB$. Într-adevăr, dacă $OA=OB$ şi $A\in d$, atunci $B\in d''$, unde d'' este simetrica dreptei d faţă de punctul O. Cum d' şi d'' sunt concurente, punctul B este unic determinat ca $\{B\}=d'\cap d''$ şi acum construcţia lui A este imediată: $A=\mathrm{sim}_O(B)$.

Ţinând seama de acest rezultat, există şi sunt unic determinate punctele $M\in AB, P\in CD$ astfel încât $OM=OP$, precum şi punctele $N\in BC, Q\in DA$ astfel încât $ON=OQ$. Astfel, $MNPQ$ este unicul paralelogram de centru O având vârfurile pe dreptele suport ale laturilor lui $ABCD$.

G274. *Triunghiul dreptunghic neisoscel ABC are ipotenuza BC fixă, iar punctul E este situat pe cateta mai lungă astfel încât $AE=|AB-AC|$. Demonstraţi că mediatoarea segmentului AE trece printr-un punct fix.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

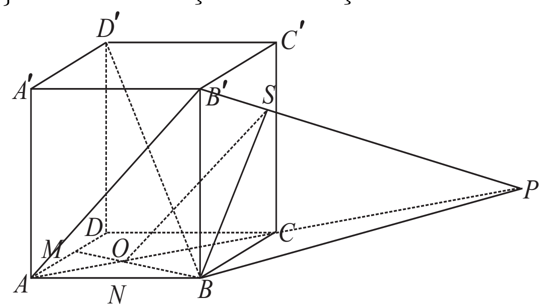


Soluţie. Notăm, uzual, lungimile laturilor $\triangle ABC$ cu a,b,c. Cum BC este fixă, a este constantă. Se consideră R şi Q vârfurile triunghiurilor dreptunghice isoscele cu ipotenuzele AB, respectiv AC, situate în exteriorul $\triangle ABC$. Notăm cu D intersecţia dintre mediatoarea segmentului AE şi dreapta AQ, cu M mijlocul segmentului RQ, cu O mijlocul ipotenuzei BC şi N mijlocul segmentului AE. Remarcăm că punctele R, A şi Q sunt coliniare, deoarece $m(\measuredangle RAQ)=180°$. Se observă că $BCQR$ este trapez dreptunghic, deoarece $BR \perp RQ$ şi $CQ \perp RQ$; prin urmare, $RQ = RA + AQ = \dfrac{c}{\sqrt{2}} + \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{b+c}{\sqrt{2}}$. Cum D este situat pe mediatoarea segmentului AE, rezultă că $\triangle DAE$ este isoscel, iar pentru că $m(\measuredangle DAE) = 45°$ rezultă că $\triangle DAE$ este şi drepuntghic în D, de unde $AD = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = \dfrac{b-c}{\sqrt{2}}$. Astfel, $DQ = RQ - (RA + AD) = \dfrac{b+c}{\sqrt{2}} - \left(\dfrac{c}{\sqrt{2}} + \dfrac{b-c}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$, adică $RA = DQ$, de unde rezultă că M este şi mijlocul segmentului AD. OM este linie mijlocie în trapezul dreptunghic $BCQR$, deci $OM \| CQ$, de unde $OM \perp RQ$. Triunghiul OAD este isoscel, deoarece OM este înălţime şi mediană a lui, deci $OD = OA = \dfrac{a}{2}$. Apoi, $m(\measuredangle ODN) = m(\measuredangle ODA) - 45°$, iar $m(\measuredangle OAC) = m(\measuredangle OAD) - 45°$. Deoarece $\triangle OAD$ este isoscel, rezultă $\measuredangle ODN \equiv \measuredangle OAC$. Pe de altă parte $\triangle OAC$ este isoscel, deci $\measuredangle OAC \equiv \measuredangle OCA$, de unde rezultă că $\measuredangle ODN \equiv \measuredangle OCA$. Acum, deoarece $DN \perp AC$, rezultă $DO \perp BC$. Prin urmare D este situat pe mediatoarea segmentului fix BC şi $OD =$ const., adică D este un punct fix ce aparţine mediatoarei segmentului AE.

G275. *Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, iar M este mijlocul muchiei AD. Planul perpendicular în B pe MB intersectează planul $(B'AC)$ după dreapta d. Notăm cu S proiecţia punctului B pe dreapta d. Determinaţi tangenta unghiului dintre dreptele AB' şi BS.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie N mijlocul lui AB, $\{O\} = AC \cap BM$ şi P intersecţia lui AC cu perpendiculara în B pe MB. Dreptele BM şi CN sunt perpendiculare, prin urmare dreptele BP şi CN sunt paralele. Rezultă că CN este linie mijlocie în triunghiul ABP, deci punctul C este mijlocul segmentului AP.



Dreapta d va fi tocmai $B'P$. Cum $BP = 2CN = a\sqrt{5}$ (unde a este muchia cubului), rezultă că $\dfrac{B'S}{SP} = \dfrac{BB'^2}{BP^2} = \dfrac{a^2}{(a\sqrt{5})^2} = \dfrac{1}{5}$. Pe de altă parte, $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{2}$, de unde $\dfrac{AO}{OP} = \dfrac{1}{5}$. Deducem că $OS \| AB'$. Astfel, unghiul format de dreptele AB' şi BS este $\widehat{OSB}$.

Evident, triunghiul OSB este dreptunghic în B, având catetele de lungimi $BS = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$ şi $OB = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. Rezultă că $\operatorname{tg}\widehat{OSB} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

B. Nivel liceal

Notă. După încheierea numărului 2/2014, am primit soluţie corectă a problemei **L264** din partea d-lui **Gheorghe Stoica**, Petroşani.

L266. *Fie n un număr natural nenul, $p = 2^{2^n} + 1$ un număr prim Fermat şi d cel* *mai mare divizor impar al numărului* $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$*. Să se demonstreze că există numărul natural* a *astfel încât* $d \equiv a^2 (mod p)$.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

Soluţie. Exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a numărului $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ este $e = \sum_{k\geq 2}\left[\frac{p-1}{2^k}\right]$. Dacă $p = 2^m + 1$, cu $m = 2^n$, atunci $e = 2^{m-2} + 2^{m-3} + \ldots + 2 + 1 = 2^{m-1} - 1 = \frac{p-1}{2} - 1 = \frac{p-3}{2}$. Următorul rezultat este o consecinţă a teoremei lui Wilson: dacă p este un număr prim şi $p-1$ se divide cu 4, atunci $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. Deducem $2^{p-3}d^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. Înmulţim ultima congruenţă cu $2^2 = 4$, aplicăm teorema lui Fermat $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ şi deducem $d^2 + 4 \equiv 0 \pmod p$. Rezultă $d^2 + 4d + 4 = (d+2)^2 \equiv 4d \pmod p$.

Inversul lui 2 modulo p este $\frac{p+1}{2}$, aşadar $d \equiv \left[\frac{(p+1)(d+2)}{2}\right]^2 \pmod p$. Dacă a este restul împărţirii la p a numărului natural $\frac{(p+1)(d+2)}{2}$, atunci $d \equiv a^2$ (mod p), ceea ce încheie demonstraţia.

L267. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $18^a + 20^a + 30^a = 19^a + 24^a + 25^a$.

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţia 1. Observăm că ambii membri ai ecuaţiei din enunţ sunt funcţii convexe. Ca urmare, ecuaţia are cel mult două soluţii. Cum $a = 0$ şi $a = 1$ sunt soluţii, rezultă că ele sunt singurele soluţii ale ecuaţiei date.

Notă. Au rezolvat problema în acest fel următorii elevi din Craiova: **David Dăogaru, Cristian Pătraşcu**, **Andrei Raul Spătaru** şi **Andrei George Turcu**.

Soluţia 2. Observăm că $a = 0$ şi $a = 1$ verifică ecuaţia din enunţ. Presupunem că există $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ soluţie; atunci $(5^a - 4^a)(6^a - 5^a) = 19^a - 18^a$. Aplicând teorema lui Lagrange unor restricţii ale funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, găsim $c_1 \in (4,5)$, $c_2 \in (5,6)$ şi $c_3 \in (18,19)$ pentru care $5^a - 4^a = ac_1^{a-1}$; $6^a - 5^a = ac_2^{a-1}$ şi $19^a - 18^a = ac_3^{a-1}$. Rezultă că $a^2(c_1c_2)^{a-1} = ac_3^{a-1}$, adică $a\left(\frac{c_1c_2}{c_3}\right)^{a-1} = 1$, unde $\frac{c_1c_2}{c_3} \in \left(\frac{20}{19}, \frac{30}{18}\right)$. Evident că $a > 0$. Dacă $a \in (0,1)$, atunci $1 = a\left(\frac{c_1c_2}{c_3}\right)^{a-1} < 1\left(\frac{c_1c_2}{c_3}\right)^0 = 1$, absurd. Dacă $a \in (1,\infty)$, atunci $1 = a\left(\frac{c_1c_2}{c_3}\right)^{a-1} > 1\left(\frac{c_1c_2}{c_3}\right)^0$ =1, din nou contradicţie. În concluzie, a=0 şi $a = 1$ sunt singurele soluţii ale ecuaţii date.

Notă. În aceeaşi manieră au rezolvat problema d-nii **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung.

L268. *Demonstraţi că dacă* a, b, c *sunt numere reale pozitive, are loc inegalitatea*

$$\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{(a+b+c)^2} + \frac{2a}{2a+b+c} + \frac{2b}{a+2b+c} + \frac{2c}{a+b+2c} \geq \frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie (**Neculai Roman**, Mirceşti, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea, **Nicuşor Zlota**, Focşani şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung). Observăm că $\sum \frac{2a}{2a+b+c} = 2\sum \frac{a^2}{2a^2+ab+ac} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + \sum ab}$, conform inegalităţii lui Bergström. Notând $x = a^2+b^2+c^2 > 0$ şi $y = ab+bc+ca > 0$, ar fi suficient să mai demonstrăm că $\frac{x-y}{x+2y} + \frac{x+2y}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. Aceasta din urmă inegalitate este echivalentă cu $\frac{2x^2+2y^2+4xy}{x^2+2y^2+3xy} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - xy \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y$, fapt binecunoscut.

L269. *Arătaţi că* $a^{\sin x} \cdot (a+1)^{\cos x} < a^2$, $\forall a, x \in \mathbb{R}$, $a \geq 2$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

Soluţie (**Gheorghe Iurea**, Iaşi şi **Daniel Văcaru**, Piteşti)**.** Prin logaritmare, inegalitatea din enunţ este echivalentă cu

$$\sin x \ln a + \cos x \ln(a+1) < 2\ln a, \forall a, x \in \mathbb{R}, a \geq 2.$$

Cum $\sin x \ln a + \cos x \ln(a+1) \leq \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\ln^2 a + \ln^2(a+1))}$, este suficient să arătăm că $\ln^2(a+1) < 3\ln^2 a$, sau $\sqrt{3}\ln a > \ln(a+1)$ (deoarece $a \geq 2$), echivalent cu $a^{\sqrt{3}} > a+1$ pentru $a \geq 2$.

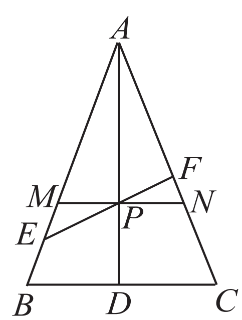
Funcţia $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(a) = a^{\sqrt{3}} - a = a(a^{\sqrt{3}-1} - 1)$ este produs de funcţii pozitive strict crescătoare, deci este strict crescătoare; rezultă că $a^{\sqrt{3}} - a \geq 2^{\sqrt{3}} - 2$. Rămâne să arătăm că $2^{\sqrt{3}} > 3 : 2^{\sqrt{3}} > 2^{\frac{8}{5}} = 256^{\frac{1}{5}} > 243^{\frac{1}{5}} = 3$.

Notă. Am mai primit soluţie corectă din partea d-lui **Corneliu Mănescu-Avram**, Ploieşti.

L270. *Se consideră triunghiul isoscel* ABC*, cu* $AB = AC$ *şi fie* P *un punct fixat pe înălţimea* AD*. O dreaptă variabilă care trece prin* P *intersectează laturile* AB *şi* AC *în punctele* $E \in [AB]$*, respectiv* $F \in [AC]$*. Determinaţi valorile extreme ale ariei triunghiului* AEF*, funcţie de* $a = BC$*,* $b = AB = AC$ *şi* $d = AP$*.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie MN paralela prin P la BC, cu $M \in AB, N \in AC$; notăm $h = AD = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, $x = AF$ şi $y = AE$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $F \in [AN]$. Teorema transversalei spune că $BD \cdot \frac{CF}{FA} + CD \cdot \frac{BE}{EA} = BC \cdot \frac{DP}{PA}$, deci $\frac{a(b-x)}{2x} + \frac{a(b-y)}{2y} = \frac{a(h-d)}{d}$; rezultă că $y = \frac{bdx}{2hx - bd}$. Cum $AM = \frac{bd}{h}$, din $y \leq b$ deducem că $x \geq \frac{bd}{2h-d}$. Astfel, $x \in \left[\frac{bd}{h}, \frac{bd}{2h-d}\right]$ şi $S_{AEF} = \frac{AE \cdot AF \cdot \sin A}{2} = \frac{bd \cdot \sin A}{2} \cdot \frac{x^2}{2hx - bd}$.



Considerăm funcţia $f(x) = \frac{x^2}{2hx - bd}$, $x \in \left[\frac{bd}{h}, \frac{bd}{2h-d}\right]$, despre care se arată uşor că este strict crescătoare. Rezultă că S_{AEF} este minimă pentru $x = \dfrac{bd}{h}$ (deci când $EF \| BC$) şi este maximă pentru $x = \dfrac{bd}{2h-d}$ (deci când E coincide cu B). Obţinem că $\min S_{AEF} = \dfrac{ad^2}{2h}$, iar $\max S_{AEF} = \dfrac{adh}{2(2h-d)}$.

Notă. Soluţie corectă au trimis d-nii **Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Neculai Stanciu**, Buzău şi **Neculai Roman**, Mirceşti.

L271. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea:*

$$\frac{bc}{(p-a)^2} + \frac{ac}{(p-b)^2} + \frac{ab}{(p-c)^2} \geq \frac{20R-4r}{3r}.$$

Andi Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti, **Neculai Stanciu**, Buzău, **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea şi **Nicuşor Zlota**, Focşani)**.** Vom folosi inegalitatea lui Schur $\sum a^3 + 3abc \geq \sum a^2b + \sum ab^2$, care aplicată pentru numerele xy, yz, zx devine

$$\sum x^3y^3 + 3x^2y^2z^2 \geq xyz \sum x^2y + xyz \sum xy^2. \tag{1}$$

Să trecem la problemă. Folosim substituţiile Ravi: $a = y+z, b = z+x, c = x+y$. Avem $p = x+y+z$, Aria $(ABC) = [ABC] = \sqrt{xyz(x+y+z)}$,

$$\frac{R}{r} = \frac{abc}{4[ABC]} : \frac{[ABC]}{p} = \frac{pabc}{4[ABC]^2} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz}.$$

Rezultă că inegalitatea din enunţ se scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{(x+y)(y+z)}{x^2} \geq \frac{5(x+y)(y+z)(z+x)}{3xyz} - \frac{4}{3}\\
&\Leftrightarrow \sum \frac{x^2+xy+yz+zx}{x^2} \geq \frac{5(x+y)(y+z)(z+x)}{3xyz} - \frac{4}{3}\\
&\Leftrightarrow 3 + \sum xy \sum \frac{1}{x^2} \geq \frac{5(x+y)(y+z)(z+x)}{3xyz} - \frac{4}{3}\\
&\Leftrightarrow 3 \sum xy \sum x^2y^2 \geq 5xyz(\sum x^2y + \sum xy^2 + 2xyz) - 13x^2y^2z^2\\
&\Leftrightarrow 3 \sum x^3y^3 + 3xyz \sum x^2y + 3xyz \sum xy^2 \geq\\
&\geq 5xyz \sum x^2y + 5xyz \sum xy^2 - 3x^2y^2z^2\\
&\Leftrightarrow 3 \sum x^3y^3 + 3x^2y^2z^2 \geq 2xyz(\sum x^2y + \sum xy^2).
\end{aligned}$$

Folosind inegalitatea (1), rămâne de arătat că $\sum x^3y^3 \geq 3x^2y^2z^2$, care este adevărată cu inegalitatea mediilor.

Notă. Autorul problemei şi d-nii **Neculai Roman**, Mirceşti şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, rezolvă problema folosind *inegalitatea lui Gerretsen* $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

L272. *Determinaţi valorile numărului real k pentru care există un patrulater convex $ABCD$ având lungimile laturilor a, b, c, d şi aria S, astfel încât $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$.*

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Fie $ABCD$ patrulater convex cu $AB = a, BC = b, CD = c$, $DA = d$ şi având aria S; fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $AC = 1$. Raportăm planul la un reper cartezian în raport cu care $A(0,0), B(m,n), C(1,0)$ şi $D(p,q)$. Observăm că $4a^2 + 5b^2 = 4AB^2 + 5BC^2 = 4(m^2 + n^2) + 5((m-1)^2 + n^2) = 9\left(m - \frac{5}{9}\right)^2 + 9n^2 + \frac{20}{9} \geq 9n^2 + \frac{20}{p}$. Analog, $10c^2 - d^2 = 9\left(p - \frac{10}{9}\right)^2 + 9q^2 - \frac{10}{9} \geq 9q^2 - \frac{10}{9}$. Adunând aceste relaţii, obţinem că $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 \geq 9n^2 + 9q^2 + \frac{10}{9} = \left(3n - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 2|n| \cdot \sqrt{5} + \left(3q - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 2|q| \cdot \sqrt{5} \geq 2|n|\sqrt{5} + 2|q|\sqrt{5} = 4\sqrt{5}(S_{ABC} + S_{ACD}) = 4\sqrt{5}S_{ABCD}$. În concluzie, $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 \geq 4\sqrt{5}S$, aşadar $k \geq \sqrt{5}$. În inegalitatea precedentă, se atinge egalitatea când $B\left(\frac{5}{9}, -\frac{\sqrt{5}}{9}\right)$ şi $D\left(\frac{10}{9}, \frac{\sqrt{5}}{9}\right)$, prin urmare $k_{\min} = \sqrt{5}$.

Vom demonstra acum că pentru orice $k \in [\sqrt{5}, \infty)$, există un patrulater $ABCD$ având proprietăţile dorite. Să considerăm punctele $A(0,0), B\left(\frac{5}{9}, -x\right)$, $C(0,1)$ şi $D\left(\frac{10}{9}, x\right)$, unde $x \in (0, \infty)$ va fi determinat convenabil. Avem: $a^2 = AB^2 = \frac{25}{81} + x^2$, $b^2 = BC^2 = \frac{16}{81} + x^2$, $c^2 = CD^2 = \frac{1}{81} + x^2$, $d^2 = DA^2 = \frac{100}{81} + x^2$ şi $S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{|x|}{2} + \frac{x}{2} = x$. Înlocuind în $4a^2 + 5b^2 + 10c^2 - d^2 = 4kS$, obţinem ecuaţia $81x^2 - 18kx + 5 = 0$, care admite soluţia reală pozitivă $x = \frac{k + \sqrt{k^2 - 5}}{9}$, prin urmare există un patrulater $ABCD$ având proprietăţile din enunţ.

L273. *Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi A_1 centrul cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $[AB$, $[AC$. În mod analog definim punctele B_1 şi C_1. Arătaţi că:*

$$\sqrt{I_aA_1 \cdot I_bB_1 \cdot I_cC} + \sqrt{I_bB_1 \cdot I_cC_1 \cdot I_aA} + \sqrt{I_cC_1 \cdot I_aA_1 \cdot I_bB} = \sqrt{I_aA \cdot I_bB \cdot I_cC}.$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti şi **Neculai Stanciu**, Buzău)**.** Notăm S aria triunghiului, r_A raza cercului de centru A_1, r_a raza cercului exînscris şi $q = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Conform unei formule cunoscute (de exemplu, *RecMat -1/2014*, p. 10), avem $r_A = \frac{rbc}{(p-a)^2}$. Punctele I_a şi A_1 se află pe bisectoarea unghiului A. Ducând perpendiculare din I_a şi A_1 pe latura AB, obţinem:

$$AA_1 = \frac{r_A}{\sin\frac{A}{2}}, AI_a = \frac{r_a}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{rp}{(p-a)\sin\frac{A}{2}},\ A_1I_a = \frac{r(p-b)(p-c)}{(p-a)^2\sin\frac{A}{2}}.$$

Rezultă că

$$\sqrt{I_aA_1\cdot I_bB_1\cdot I_cC}+\sqrt{I_bB_1\cdot I_cC_1\cdot I_aA}+\sqrt{I_cC_1\cdot I_aA_1\cdot I_bB}=\sum\sqrt{\frac{r^2(p-c)S}{(p-a)(p-b)q}}$$

$$=\sum r\sqrt{\frac{(p-c)S}{(p-a)(p-b)q}}=r^2\sqrt{\frac{pS}{q}}\sum\frac{1}{(p-a)(p-b)}=r^2\sqrt{\frac{pS}{q}}\cdot\frac{1}{r^2}=\sqrt{\frac{pS}{q}};$$

$$\sqrt{I_aA\cdot I_bB\cdot I_cC}=\sqrt{\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)q}}=\sqrt{\frac{pS}{q}}.$$

Din aceste inegalităţi obţinem concluzia problemei.

L274. *Fie punctele $A_1,\ldots,A_n$ şi $B_1,\ldots,B_n$ aparţinând unei elipse $\mathcal{E}$ cu centrul O. Să se arate că există un punct $M\in\mathcal{E}$ astfel încât*

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2-\sum_{k=1}^n MB_k^2=\sum_{k=1}^n OA_k^2-\sum_{k=1}^n OB_k^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Să considerăm elipsa $\mathcal{E}$ într-un sistem de coordonate în care ecuaţia ei este $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ şi fie $A_k(a\cos\alpha_k,b\sin\alpha_k),B_k(a\cos\beta_k,b\sin\beta_k)$, cu $\alpha_k,\beta_k\in[0,2\pi)$, pentru orice $1\le k\le n$. Dat fiind un punct oarecare $P(a\cos t,b\sin t)$ al elipsei avem, pentru $f(t):=\sum\limits_{k=1}^n PA_k^2$,

$$f(t)=\sum_{k=1}^n(a^2(\cos t-\cos\alpha_k)^2+b^2(\sin t-\sin\alpha_k)^2)=na^2\cos^2t+nb^2\sin^2t-$$

$$-2a^2\cos t\sum_{k=1}^n\cos\alpha_k-2b^2\sin t\sum_{k=1}^n\sin\alpha_k+\sum_{k=1}^n(a^2\cos^2\alpha_k+b^2\sin^2\alpha_k)=$$

$$=na^2\cos^2t+nb^2\sin^2t-2a^2\cos t\sum_{k=1}^n\cos\alpha_k-2b^2\sin t\sum_{k=1}^n\sin\alpha_k+\sum_{k=1}^n OA_k^2.$$

Se verifică imediat că $\int_0^{2\pi}\left(f(t)-\sum\limits_{k=1}^n OA_k^2\right)dt=n\pi(a^2+b^2)$. Asemănător, pentru $g(t):=\sum\limits_{k=1}^n PB_k^2$, avem: $\int_0^{2\pi}\left(g(t)-\sum\limits_{k=1}^n OB_k^2\right)dt=n\pi(a^2+b^2)$. Cu alte cuvinte, am obţinut că

$$\int_0^{2\pi}\left(f(t)-\sum_{k=1}^n OA_k^2\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(g(t)-\sum_{k=1}^n OB_k^2\right)dt,$$

de unde rezultă existenţa unui $t_0\in[0,2\pi]$ astfel încât $f(t_0)-\sum\limits_{k=1}^n OA_k^2=g(t_0)-\sum\limits_{k=1}^n OB_k^2$. Evident, punctul $M(a\cos t_0,b\sin t_0)$ verifică egalitatea cerută în enunţ.

Notă. A rezolvat problema d-l **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L275. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ două matrice de ordinul al treilea astfel încât $AB - BA$ să fie inversabilă. Demonstraţi că*

$$Tr(AB(AB-BA)^{-1}) = 1 + S(AB(AB-BA)^{-1}),$$

unde $Tr\, M$ este urma matricei M, iar $S(M)$ este suma minorilor elementelor de pe diagonala principală a lui M.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. În această problemă avem nevoie de relaţia

$$\det(xI_3 + M) = x^3 + Tr(M)x^2 + S(M)x + \det M,$$

valabilă pentru orice matrice pătratică de ordinul al treilea. Considerăm polinomul (de gradul al treilea) $f(x) = \det(AB + x(BA - AB)) = \det(BA - AB)\det(xI_3 + C) = \det(BA - AB)(x^3 + Tr(C)x^2 + S(C)x + \det C) = \det(BA - AB)g(x)$, unde $C = AB(BA - AB)^{-1}$.

Avem că $f(0) = \det(AB) = \det(BA) = f(1)$, relaţie care se transferă şi la polinomul g din paranteză. Însă condiţia $g(0) = g(1)$ revine la $1 + Tr(C) + S(C) = 0$. Observăm că

$$\mathrm{Tr}\,(C) = \mathrm{Tr}(AB(BA-AB)^{-1}) = -\mathrm{Tr}(AB(AB-BA)^{-1});$$
$$S(C) = S(AB(BA-AB)^{-1}) = S(AB(AB-BA)^{-1})$$

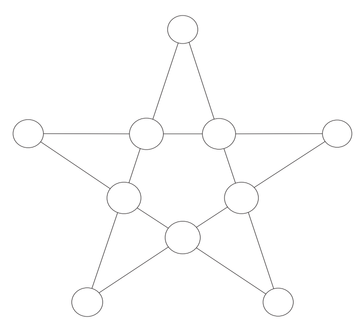
şi, de aici, egalitatea din enunţ.

Notă. Procedând ca în soluţia problemei L155 din *RecMat 2/2008*, se poate arăta că, pentru $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $AB - BA$ inversabilă, este adevărată relaţia $\mathrm{Tr}(AB(AB-BA)^{-1}) = 1$.

Recreaţii ... matematice

I. *Puneţi numerele $1, 2, 3, \ldots, 10$ în punctele de intersecţie ale pentagramei astfel încât să fie îndeplinite condiţiile următoare*:

(i) *numerele să fie folosite o singură dată;*
(ii) *suma oricăror patru numere aflate în puncte coliniare să fie aceeaşi.*



II. *Problemă similară relativ la poligonul stelat cu şase vârfuri: să se pună numerele $1, 2, 3, \ldots, 12$ în punctele de intersecţie ale acestuia, cu respectarea condiţiilor (i) şi (ii).*

(*Răspuns la pag. 90*)