Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2014

Clasele primare

P.297. *Completaţi cu cifre căsuţele goale din şirul* $1, 2, \square, 5, 6, \square, 9$, *astfel încât cele şapte numere rezultate să fie în ordine crescătoare.*
(*Clasa I*) **Cătălina Bulei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1, 2, \boxed{3}, 5, 6, \boxed{7}, 9$; $1, 2, \boxed{3}, 5, 6, \boxed{8}, 9$; $1, 2\boxed{4}, 5, 6, \boxed{7}, 9$; $1, 2, \boxed{4}, 5, 6, \boxed{8}, 9$.

P298. *Pe tablă sunt scrise numerele de la* 1 *la* 6, *o singură dată fiecare. În câte moduri se pot şterge două numere astfel încât suma celor rămase să fie pară?*
(*Clasa I*) **Daniela Mititelu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$, deci suma celor două numere şterse trebuie să fie un număr impar. Putem şterge perechile: $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 6)$; $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, deci există 9 modalităţi de ştergere.

P299. *Tabloul alăturat are* 50 *linii. De câte ori apare în el numărul* 19*? Explicaţi răspunsul dat.*
(*Clasa I*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Soluţie. Pe linia a 19-a numărul apare o singură dată. Începând cu linia a 20-a până la linia a 50-a, numărul 19 apare de două ori pe fiecare linie. În total, numărul 19 apare de $1 + 31 + 31 = 63$ ori.

P300. *Aflaţi numărul* $\overline{abc}$, *ştiind că* $\overline{abc} + \overline{bc} = 756$ *şi* $\overline{cba} + \overline{ba} = 952$.
(*Clasa a II-a*) **Maria Boutiuc, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din $\overline{abc} + \overline{bc} = 756$ rezultă $a = 6$ sau $a = 7$, iar din $\overline{cba} + \overline{ba} = 952$ rezultă $c = 8$ sau $c = 9$. Observăm că: $\overline{abc} + \overline{bc} = 756 \Rightarrow c = 8$, $\overline{cba} + \overline{ba} = 952 \Rightarrow a = 6$, iar $\overline{6b8} + \overline{b8} = 756 \Rightarrow b = 7$ şi $\overline{abc} = 678$.

P301. *În desenul alăturat, pe fiecare linie sunt scrise numere consecutive astfel încât* $a + d = 13$, $e + h = 21$, $i + l = 29$. *Să se afle suma tuturor numerelor scrise în tabel.*

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

(*Clasa a II-a*) **Ana Stoica, elevă, Iaşi**

Soluţie. $a + d = b + c = 13$, $e + h = f + g = 21$, $i + l = j + k = 29$. Suma numerelor din tabel este: $13 + 13 + 21 + 21 + 29 + 29 = 126$.

P302. *Scrieţi cel mai mare număr format din trei cifre nenule care are suma dintre cifra zecilor şi cifra unităţilor* 8, *iar suma dintre cifra sutelor şi cea a zecilor* 9.
(*Clasa a II-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fie numărul $\overline{abc}$ cu condiţiile $a + b = 9$ şi $b + c = 8$. Deoarece cifrele sunt nenule iar numărul $\overline{abc}$ este maxim, avem: $a = 8, b = 1$, $c = 7$. Numărul căutat este 817.

P303. *Câte numere de forma* $\overline{abc}$ *îndeplinesc condiţia* $a \times \overline{bc} = c \times \overline{ba}$?
(*Clasa a III-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. $a \times \overline{bc} = c \times \overline{ba} \Rightarrow a \times (10b + c) = c \times (10b + a) \Rightarrow 10ab + ac = 10bc + ac \Rightarrow a = c$. Cum a şi b pot lua valori de la 1 la 9, concluzionăm că vom avea $9 \times 9 = 81$ numere ce îndeplinesc condiţia din enunţ.

P304. *Suma unor numere naturale este* 350*, iar produsul lor este* 35*. Să se afle aceste numere.*
(*Clasa a III-a*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numerele sunt $5, 7, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{338 \text{ de } 1}$ sau $35, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{315 \text{ de } 1}$.

P305. *O familie compusă din părinţi şi doi copii merge la teatru. Ei au ocupat patru locuri consecutive pe acelaşi rând astfel încât copiii să nu stea unul lângă celălalt. În câte moduri se pot aşeza membrii familiei pe cele patru locuri?*
(*Clasa a III-a*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem combinaţiile: $t, \_, m, \_$; $\_, t, m, \_$; $\_, t, \_, m$; $m, \_, t, \_$; $\_, m, t, \_$; $\_, m, \_, t$. În fiecare situaţie, copiii se pot aşeza în două moduri. Membrii familei se pot aşeza în $6 \times 2 = 12$ moduri.

P306. *Spunem că două numere sunt ,,asociate" dacă suma lor se împarte exact la* 2 *sau la* 3 *sau la* 5*. Găsiţi toate numerele asociate cu* 11 *aflate între* 10 *şi* 36*.*
(*Clasa a III-a*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numerele asociate cu 11 sunt: numerele impare (12 numere), numerele care au ultima cifră 4 (3 numere) şi numerele care dau restul 1 la împărţirea cu 3 (8 numere). Aşadar, numerele asociate cu 11 sunt: $13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 35$.

P307. *Să se determine câte perechi de numere consecutive formate din câte trei cifre au proprietatea că primul număr se împarte exact la trei, iar al doilea se împarte exact la patru.*
(*Clasa a IV-a*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**

Soluţie. Dacă n se împarte exact la 3 şi $n + 1$ se împarte exact la 4, atunci $n - 3$ se împarte exact atât la 3, cât şi la 4, deci $n - 3$ se împarte exact la 12. Înseamnă că n poate lua valorile $111, 123, 135, \ldots, 987$, prin urmare există 74 perechi cu proprietăţile din enunţ.

P308. *O suprafaţă dreptunghiulară de* $2m \times 3m$ *se acoperă cu plăci dreptunghiulare de gresie de* 25 *cm* $\times$ 50 *cm. Se poate face lucrarea numai cu plăci întregi?*
(*Clasa a IV-a*) **Marian Ciuperceanu, Craiova**

Soluţie. Da, deoarece $300 : 50 = 6$, iar $200 : 25 = 8$. Sunt necesare $6 \times 8 = 48$ plăci.

P309. *Să se găsească un număr care, adunat cu suma cifrelor sale, să dea* 78912*.*
(*Clasa a IV-a*) **Maria Boutiuc, elevă, Iaşi**

Soluţie. Se observă uşor că numerele căutate sunt, obligatoriu, de forma $\overline{788ab}$. Din $\overline{788ab} + 7 + 8 + 8 + a + b = 78912$ obţinem că $\overline{ab} + a + b = 89$, deci $11a + 2b = 89$. Singura posibilitate este $a = 7, b = 6$, deci numărul dorit este 78876.

P310. *Se consideră numerele* $1, 2, 3, \ldots, 9$*.*

a) *Să se arate că numărul* $1 + 2 + 3 + \ldots + 9$ *se împarte exact la* 3*.*

b) *Să se arate că există cel puţin o aranjare pe dreaptă a numerelor* $1, 2, 3, \ldots, 9$ *astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să nu se împartă exact la* 3.

(*Clasa a IV-a*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

Soluţie. a) $1 + 2 + \ldots + 9 = 45 = 15 \cdot 3$.

b) Un exemplu de aşezare a numerelor pe dreaptă este $3, 1, 4, 6, 9, 2, 5, 7, 8$.

Clasa a V-a

V.179. *Arătaţi că numărul* $n = 1023 \cdot 1024 + 2^{30} - 2^{20}$ *se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.*

Viorica Dogaru, Giurgiu

Soluţie. Avem: $n = 1023 \cdot 1024 + 2^{20}(2^{10} - 1) = 1023 \cdot 1024 + 1024^2 \cdot 1023 = 1023 \cdot 1024 \cdot (1 + 1024) = 1023 \cdot 1024 \cdot 1025$.

V.180. *Determinaţi numerele* $\overline{ab}$ *cu proprietatea că* 2014 *se divide cu* $a^2 + b^2$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

Soluţie. Cum $a^2 + b^2 \leq 9^2 + 9^2 = 162$ şi $a^2 + b^2 \in D_{2014}$, rezultă că $a^2 + b^2 \in \{1, 2, 19, 38, 53, 106\}$. Prin verificări directe, se constată că există doar variantele $1^2 + 0^2 = 1$, $1^2 + 1^2 = 2$, $2^2 + 7^2 = 53$ şi $5^2 + 9^2 = 106$. Numerele căutate sunt $10, 11, 27, 72, 59$ şi 95.

V.181. *Anul naşterii unei persoane este* $\overline{abcd}$, *unde* $b = d^2$ *şi* $a + b = 10$. *Stabiliţi ce vârstă va avea persoana în anul* $2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

Soluţie. Cum ne aflăm în anul 2014, atunci $a \in \{1, 2\}$. Singura variantă pentru care este îndeplinită condiţia $a + b = 10$ este $a = 1, b = 9$; atunci $d = 3$. Anul naşterii este $\overline{19c3}$, iar $2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd} = 38 \cdot \overline{c3}$. Cum $38 \cdot 43 = 1634$ este număr prea mic, iar $38 \cdot 63 = 2394$ este prea mare, rezultă că $c = 5$, iar $38 \cdot 53 = 2014$. Vârsta persoanei în 2014 este de 61 ani.

V.182. *Găsiţi cele mai mici cinci numere naturale* n *pentru care numărul* $A = \dfrac{17}{14} + \dfrac{1717}{1414} + \ldots + \dfrac{1717\ldots17}{1414\ldots14}$ *(suma are* n *termeni) este pătrat perfect.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Observăm că $\underbrace{1717\cdots17}_{2n \text{ cifre}} = 17 \cdot \underbrace{101\ldots01}_{2n-1 \text{ cifre}}$ şi $\underbrace{1414\ldots14}_{2n \text{ cifre}} = 14 \cdot \underbrace{101\ldots01}_{2n-1 \text{ cifre}}$. Simplificând fracţiile, obţinem că $A = \frac{17}{14}(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ termeni}}) = \frac{17n}{14}$. Valorile lui n pentru care A este pătrat perfect sunt cele de forma $14 \cdot 17 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Dând lui k valorile $1, 2, 3, 4, 5$ obţinem cele mai mici cinci numere n cu proprietatea dorită.

V.183. *Stabiliţi dacă fracţia* $\dfrac{2013^{2014} + 2014^{2013}}{2013^{2013} + 2014^{2014}}$ *este subunitară, echiunitară sau supraunitară.*

Diana Gregoretti, Galaţi

Soluţie. Are loc inegalitatea $a^{a+1} + (a + 1)^a < a^a + (a + 1)^{a+1}$, deoarece aceasta revine la $a^a(a - 1) < (a + 1)^a \cdot a$, evident adevărat. Pentru $a = 2013$, obţinem că fracţia dată este subunitară.

V.184. *Fie* $E = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. *Determinaţi cel mai mic număr natural* n *pentru care orice submulţime cu* n *elemente a lui* E *conţine două elemente a căror sumă se divide cu* 3.

Viorica Momiţă, Iaşi

Soluţie. Dacă $X \subset \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 3\}$, atunci oricare ar fi elementele a, b din X, suma $a + b$ nu se divide cu 3; rezultă că $n \geq 9$. Vom arăta că $n = 9$ convine.

Fie $X \subset E$ o submulţime de cardinal 9. Cum E conţine şapte numere de forma $M_3 + 1$, şapte numere de forma $M_3 + 2$ şi şase numere M_3, atunci X conţine fie (măcar) două numere M_3, fie conţine atât un număr $M_3 + 1$, cât şi un număr $M_3 + 2$. În ambele situaţii, X conţine două numere a căror sumă este M_3.

V.185. *Pe o tablă uriaşă sunt scrise toate numerele naturale de la* 1 *la* 1000, *în ordine crescătoare. Cei* n *elevi dintr-un grup primesc numere de ordine de la* 1 *la* n *şi, în ordinea stabilită, şterg numere de pe tablă astfel: dacă un elev are număr impar, şterge toate numerele aflate pe poziţii impare în şirul de pe tablă; dacă are număr par, şterge toate numerele aflate pe poziţii pare în şirul de pe tablă. Cel de-al* n*-lea elev şterge ultimul număr aflat pe tablă. Stabiliţi care este acest ultim număr şters.*

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

Soluţie. În urma primului copil rămân pe tablă numerele $2, 4, 6, 8, \ldots, 1000$. În urma celui de-al doilea copil rămân pe tablă numerele $2, 6, 10, 14, \ldots, 998$. În urma celui de-al treilea copil rămân pe tablă numerele $6, 14, 22, \ldots, 998$. Continuând, constatăm că în urma celui de-al nouălea copil rămân numerele 342 şi 854. Cel de-al zecelea va şterge numărul 854 (aflat pe poziţie pară), iar cel de-al 11-lea (care este ultimul elev din grup, deci $n = 11$) va şterge numărul 342.

Clasa a VI-a

VI.179. *Măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct sunt exprimate, în grade, prin numerele* a, b, c, d *şi* e. *Dacă* $0,75 \cdot a$; $0,6 \cdot b$ *şi* $0,(3) \cdot c$ *sunt direct proporţionale cu* $3, 3$ *şi* 2, *iar* $0,8(3) \cdot c$; $0,(5) \cdot d$ *şi* $0,2(7) \cdot e$ *sunt invers proporţionale cu* $2, 2$ *şi* 3, *determinaţi numerele* a, b, c, d *şi* e.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Soluţie. Ipotezele problemei sunt: $a + b + c + d + e = 360$, $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{6}$ şi $\dfrac{5c}{3} = \dfrac{10d}{9} = \dfrac{5e}{6}$. Obţinem că $a = 40$, $b = 50$, $c = 60, d = 90$ şi $e = 120$.

VI.180. *Determinaţi numerele naturale* x *şi* y *pentru care* $x^2 + xy = y + 2014$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Avem că $y = \dfrac{2014 - x^2}{x - 1} = \dfrac{2013}{x - 1} - x - 1 \in \mathbb{N}$, prin urmare $x - 1 \in D_{2013} = \{1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013\}$. Verificând fiecare caz în parte, obţinem soluţiile $(x, y) \in \{(2, 2010); (4, 666); (12, 170); (34, 26)\}$.

VI.181. *Fie* a, b, c *numere naturale cu proprietatea că* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + 5bc + ca$. *Arătaţi că* $(a + b)(b + c)(c + a)$ *este un număr divizibil cu* 8.

Denisa Alexandra Luchian, elevă, Iaşi

Soluţie. Dacă unul dintre numerele a, b, c este impar iar celelalte două sunt pare, atunci $a^2 + b^2 + c^2$ este impar, iar $ab + 5bc + ca$ este număr par, contradicţie. Dacă unul dintre numerele a, b, c este par, iar celelalte două sunt impare, atunci $a^2+b^2+c^2$ este par, iar $ab+5bc+ca$ este număr impar, contradicţie. Rămâne că numerele a, b şi c au aceeaşi paritate, deci sumele $a+b, b+c$ şi $c+a$ sunt pare. Rezultă că produsul $(a+b)(b+c)(c+a)$ este divizibil cu 8.

Să notăm faptul că problema are obiect: există numere naturale a, b, c cu proprietatea din enunţ, de exemplu $a=3, b=c=1$.

VI.182. *Se consideră numerele prime distincte p, q, r şi s, astfel încât $(r+s, q)=1$. Aflaţi numerele naturale nenule x, y şi z astfel încât $(x+z, y)=1$, iar $\dfrac{py}{q}=\dfrac{rz}{s}=x$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Evident că $p|x$, $r|x$ şi, cum p, r sunt numere prime distincte, rezultă că $x=prk$, $k\in\mathbb{N}$. Deducem că $y=qrk$ şi $z=psk$ şi atunci k divide $(x+z, y)$. Obţinem $k=1$, prin urmare $x=pr$, $y=qr$ şi $z=ps$; aceste numere verifică toate cerinţele problemei.

VI.183. *Arătaţi că şirul $133, 13333, 1333333, \ldots$ conţine numai numere compuse.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $a_n=\underbrace{13333\ldots33}_{2n+1 \text{ cifre}}$, atunci $3a_n=\underbrace{39999\ldots99}_{2n+1 \text{ cifre}}=4\underbrace{0000\ldots00}_{2n \text{ de } 0}-1=2\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ de } 0}{}^2-1=2\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ de } 0}1\cdot 1\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ de } 9}$. Cum primul factor se divide cu 3, atunci $a_n=\underbrace{66\ldots6}_{n-1 \text{ de } 6}7\cdot 1\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ de } 9}$, deci a_n este număr compus, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

VI.184. *Fie $A_{2n}=\underbrace{1010\ldots10}_{2n \text{ cifre}}$ şi $B_{4n}=\underbrace{11001100\ldots1100}_{4n \text{ cifre}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Determinaţi c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c ale numerelor A_{4n} şi B_{4n}.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Evident că $A_{4n}=1010\cdot\underbrace{10001000\ldots10001}_{4n-3 \text{ cifre}}$, în timp ce $B_{4n}=1100\cdot\underbrace{10001000\ldots10001}_{4n-3 \text{ cifre}}$. Prin urmare $A_{4n}=2\cdot 5\cdot 101\cdot C$ şi $B_{4n}=2^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot C$, unde $C=\underbrace{10001000\ldots10001}_{4n-3 \text{ cifre}}$. Rezultă că $(A_{4n}, B_{4n})=2\cdot 5\cdot C=\underbrace{10001000\ldots100010}_{4n-2 \text{ cifre}}$, iar $[A_{4n}, B_{4n}]=2^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 101\cdot C=\underbrace{111\ldots1100}_{4n+2 \text{ cifre}}$.

VI.185. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{B})=15^\circ$ şi $m(\widehat{C})=30^\circ$, mediatoarea laturii AB intersectează BC în M. Pe latura AB se consideră punctul N astfel încât $m(\widehat{AMN})=15^\circ$. Arătaţi că CN este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Notăm cu D şi E proiecţiile punctului N pe BC, respectiv AC. Triunghiul AMB este isoscel (M se află pe mediatoarea lui AB) şi atunci $m(\widehat{MAB})=m(\widehat{B})=15^\circ=m(\widehat{NMA})$, prin urmare $AN=NM$. Cum $m(\widehat{NMC})=m(\widehat{NMA})+m(\widehat{AMC})=15^\circ+30^\circ=45^\circ$, triunghiul NMD este dreptunghic isoscel. De asemenea, $m(\widehat{EAN})=45^\circ$, deci triunghiul ANE este dreptunghic isoscel. Rezultă că

$\triangle NMD \equiv \triangle NAE$, de unde $ND = NE$ şi, de aici, concluzia problemei.

Clasa a VII-a

VII.179. *Perechile de numere reale (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2 - 2y^2 = 1$. Arătaţi că $x_1x_2 + 2y_1y_2 \neq 0$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţia 1 (**Ciprian Gabriel Hîrţescu**, elev, Roşiori (Bacău)). Avem $x_1^2 = 2y_1^2+1$ şi $x_2^2 = 2y_2^2+1$. Înmulţind aceste relaţii, obţinem: $x_1^2x_2^2 = 4y_1^2y_2^2+2y_1^2+2y_2^2+1$ sau $(x_1x_2 + 2y_1y_2)(x_1x_2 - 2y_1y_2) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 1$. Membrul drept fiind diferit de zero, rezultă că $x_1x_2 + 2y_1y_2 \neq 0$.

Soluţia 2 (a autorului). Evident că x_1 şi x_2 sunt numere nenule. Presupunem, prin absurd, că $x_1x_2 + 2y_1y_2 = 0$; atunci $x_2 = -\dfrac{2y_1y_2}{x_1}$, prin urmare $1 = x_2^2 - 2y_2^2 = \dfrac{4y_1^2y_2^2}{x_1^2} - 2y_2^2 = -\dfrac{2y_2^2(x_1^2 - 2y_1^2)}{x_1^2} = -\dfrac{2y_2^2}{x_1^2} < 0$. Contradicţia la care am ajuns arată că este adevărată concluzia problemei.

VII.180. *Fie a, x, y astfel încât $a > 0$ şi $0 \leq x, y \leq a$. Arătaţi că $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} \geq \sqrt{a^2 - (x + y - a)^2}$. În ce condiţii are loc egalitatea?*

Dorina Goiceanu şi Nicoleta Bran, Craiova

Soluţie. Evident, radicalii din enunţ există. Ridicând la pătrat şi efectuând calculele, inegalitatea dată revine la $\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}+(a-x)(a-y) \geq 0$, adevărat pentru $0 \leq x, y \leq a$. Egalitatea se atinge când $x = a$ sau $y = a$.

VII.181. *Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^2 + 2y$ este pătrat perfect. Arătaţi că $x^2 + y$ se poate scrie ca suma pătratelor a două numere naturale.*

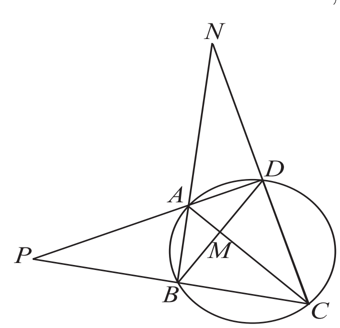
Aurel Chiriţă, Slatina

Soluţie. Fie $x^2 + 2y = z^2$; atunci $y = \dfrac{z^2 - x^2}{2}$, cu $x, y, z \in \mathbb{N}$. Observăm că $x^2 + y = x^2 + \dfrac{z^2 - x^2}{2} = \dfrac{x^2 + z^2}{2} = \left(\dfrac{x + z}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z - x}{2}\right)^2$. Cum $z^2 - x^2 = 2y$, numerele x şi z au aceeaşi paritate şi atunci $\dfrac{x + z}{2}$ şi $\dfrac{z - x}{2}$ sunt numere naturale (evident că $z \geq x$), de unde cerinţa problemei.

VII.182. *Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil şi punctele M, N, P astfel încât $\{M\} = AC \cap BD$, $\{N\} = AB \cap CD$ şi $\{P\} = AD \cap BC$. Arătaţi că $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{NC} \cdot \dfrac{PA}{PC}$.*

Silviu Boga, Iaşi

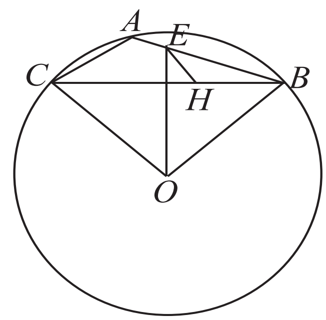
Soluţie. Folosind teorema lui Menelaus în $\triangle ACN$ cu transversala $B - M - D$, obţinem că $\dfrac{BA}{BN} \cdot \dfrac{ND}{DC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = 1$, deci $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{BA}{DC} \cdot \dfrac{ND}{BN}$. Din asemănarea triunghiurilor PAB şi PCD obţinem că $\dfrac{BA}{CD} = \dfrac{PA}{PC}$, iar din asemănarea triunghiurilor NAD şi NCB găsim că $\dfrac{ND}{BN} = \dfrac{NA}{NC}$. Rezultă că $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{PA}{PC} \cdot \dfrac{NA}{NC}$, ceea ce trebuia demonstrat.



VII.183. *Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 15^\circ$ şi $m(\widehat{C}) = 30^\circ$. Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului. Mediatoarea laturii BC taie AB în E. Paralela prin E la OC taie BC în H. Demonstraţi că $OH \perp AB$.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Măsura arcului mare $\overset{\frown}{BC}$ este $2 \cdot m(\widehat{BAC}) = 2 \cdot 135^\circ = 270^\circ$, prin urmare $m(\widehat{BOC}) = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$, adică $OC \perp OB$. Cum $EH \| OC$, rezultă că $EH \perp OB$. Avem şi $BC \perp OE$, aşadar H este ortocentrul triunghiului OBE şi, de aici, $OH \perp AB$.



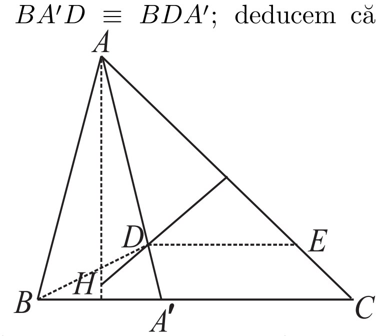
VII.184. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB < AC$. Fie A' piciorul bisectoarei din A, iar D este un punct pe segmentul AA' astfel încât $BA' = BD$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABA', arătaţi că:*

a) $\dfrac{AD}{AA'} = \dfrac{AB}{AC}$; b) $HD \perp AC$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. a) Triunghiul BDA' este isoscel, cu $\widehat{BA'D} \equiv \widehat{BDA'}$; deducem că $\widehat{AA'C} \equiv \widehat{BDA}$. Atunci $\triangle ADB \sim \triangle AA'C$ (U.U.), de unde $\dfrac{AD}{AA'} = \dfrac{AB}{AC}$.

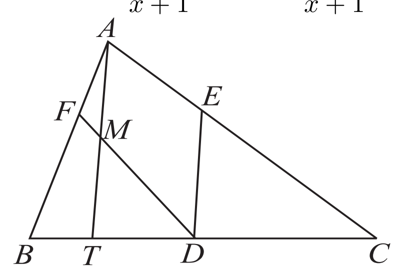
b) Construim $DE \| BC$, cu $E \in AC$; avem că $\triangle ADE \sim \triangle AA'C$, deci $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AA'}$. Deducem că $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$, prin urmare $AE = AB$. Bisectoarea AA' a triunghiului isoscel ABE va fi şi înălţime, aşadar $H \in BE$. Cum $DE \| BC$ şi $BC \perp AH$, rezultă că $DE \perp AH$, deci D este ortocentrul triunghiului AHE şi, de aici, $HD \perp AC$.



VII.185. *Fie ABC un triunghi şi D, E, F puncte situate pe laturile BC, CA, respectiv AB. Paralela prin A la DE intersectează dreapta FD în punctul M. Să se demonstreze că punctul M aparţine liniei mijlocii paralele cu BC dacă şi numai dacă cevienele AD, BE şi CF sunt concurente.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $x=\dfrac{BD}{DC}$, $y=\dfrac{EC}{EA}$, $z=\dfrac{AF}{FB}$ şi atunci $BD=\dfrac{ax}{x+1}$, $DC = \dfrac{a}{x+1}$. Fie $\{T\} = AM \cap BC$. Deoarece $AT \| ED$, avem $\dfrac{TD}{DC} = \dfrac{AE}{EC} \Rightarrow TD = \dfrac{a}{y(x+1)}$. Aplicând teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABT şi transversala $D - M - F$, obţinem:



$$\frac{DT}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{MA}{MT} = 1 \Rightarrow \frac{a}{y(x+1)} \cdot \frac{x+1}{ax} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{MA}{MT} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA}{MT} = xyz.$$

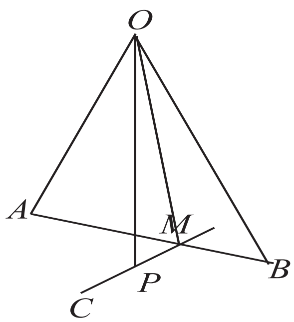
Dacă M este mijlocul lui AT, atunci $xyz = 1$ şi, cu reciproca teoremei lui Ceva, rezultă că AD, BE şi CF sunt concurente. Dacă AD, BE, CF sunt concurente, atunci teorema lui Ceva conduce la $xyz = 1$, prin urmare M este mijlocul lui AT.

Clasa a VIII-a

VIII.179. *Tetraedrul $OABC$ are $OA = OB = a$, $AB = b$, iar măsura unghiului diedru dintre planele (OAB) şi (ABC) este de u°. Determinaţi distanţa de la punctul O la planul (ABC).*

Adrian Corduneanu, Iaşi

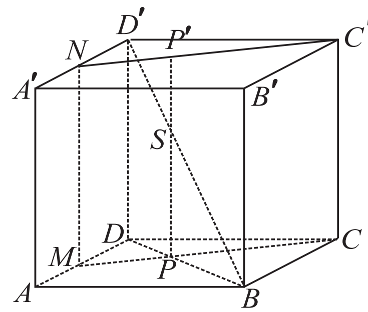
Soluţie. Fie P proiecţia punctului O pe planul (ABC); atunci $\triangle OPA \equiv \triangle OPB$ $(C.I.)$, prin urmare $PA = PB$, deci P se află pe mediatoarea segmentului AB. Pentru început, fie $u^\circ < 90^\circ$. În triunghiul dreptunghic POM, $m(\widehat{P}) = 90^\circ$, avem: $OP = OM \cdot \sin u = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} \cdot \sin u^\circ$. Remarcăm că rezultatul obţinut este valabil şi dacă $u^\circ \geq 90^\circ$, întrucât $\sin 90^\circ = 1$, iar $\sin(180^\circ - u^\circ) = \sin u^\circ$.



VIII.180. *Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor AD, respectiv $A'D'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $\{S\} = BD' \cap (CMN)$, demonstraţi că punctele C, S, N sunt coliniare.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Fie $\{P\} = CM \cap BD$ şi $\{P'\} = C'N \cap B'D'$; atunci $(CMN) \cap (BDD') = PP'$, iar $S \in PP'$. Din asemănări evidente, $\dfrac{P'S}{SP} = \dfrac{P'D'}{PB} = \dfrac{DP}{PB} = \dfrac{MP}{PC} = \dfrac{NP'}{PC}$. Astfel, triunghiurile dreptunghice $P'SN$ şi PSC au catetele proporţionale, deci sunt asemenea. Rezultă că, în planul (MNC), $\widehat{P'SN} \equiv \widehat{PSC}$, prin urmare punctele C, S, N sunt coliniare.



VIII.181. *Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $a = (\sqrt{2014} + 1)(\sqrt{2014} - \sqrt{n})$ este raţional.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Notăm $b = 2014$; atunci $a = b - \sqrt{bn} + \sqrt{b} - \sqrt{n}$, sau încă $r + \sqrt{bn} = \sqrt{b} - \sqrt{n}$, unde $r = a - b \in \mathbb{Q}$. Ridicând la pătrat, obţinem $2\sqrt{bn}(r+1) = b + n - r^2 - bn \in \mathbb{Q}$. Prin urmare, $r = -1$ sau $\sqrt{bn} \in \mathbb{Q}$. Dacă $r = -1$, atunci $b + n - 1 - bn = 0$, deci $(b-1)(1-n) = 0$, de unde $n = 1$. Dacă $\sqrt{bn} \in \mathbb{Q}$, cum $bn \in \mathbb{N}$, rezultă că $n = bk^2$, unde $k \in \mathbb{N}$. Deducem că $a = b - bk + \sqrt{b} - k\sqrt{b}$, aşadar $\sqrt{b}(k-1) = b - bk + a \in \mathbb{Q}$ şi, de aici, $k = 1$ şi $n = b$. În concluzie, $n = 1$ sau $n = 2014$.

VIII.182. *Determinaţi numerele naturale $m \geq 2$ pentru care există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m^n - 1$ divide $7^n - 1$.*

Gabriel Neamţu, Melineşti, Dolj

Soluţie. Este clar că $m \leq 7$. Pentru $m \in \{2,3,4,7\}$ putem considera $n = 1$, iar pentru $m = 5$ luăm $n = 2(5^2-1|7^2-1)$. Vom arăta că $m = 6$ nu are proprietatea dorită. Presupunem, prin absurd, că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $6^n - 1|7^n - 1$. Cum $5|6^n - 1$, obţinem că $5|7^n - 1$, deci $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci, întrucât $7|6^4 - 1$ şi $6^4 - 1|6^{4k} - 1$, condiţia $6^{4k} - 1|7^{4k} - 1$ implică $7|7^{4k} - 1$, imposibil.

În concluzie, numerele căutate sunt $m \in \{2,3,4,5,7\}$.

VIII.183. *Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y + z \geq 3$. Arătaţi că $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 3 \geq 3(x + y + z)$.*

Mihai Dicu şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie (**Ciprian Gabriel Hîrţescu**, elev, Roşiori (Bacău))**.** Se înmulţeşte cu 2 inegalitatea din enunţ şi, apoi, se pune sub forma: $(x+y-2)^2 + (y+z-2)^2 + (z+x-2)^2 + 2(x+y+z-3) \geq 0$. Ţinând seama de condiţia din enunţ, această inegalitate este adevărată. Avem egalitate dacă şi numai dacă $x + y - 2 = 0$, $y + z - 2 = 0$, $z + x - 2 = 0$ şi $x + y + z = 3$, adică dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

VIII.184. *Dacă $a, b, c \in (0, 1]$, arătaţi că*

$$\frac{ab}{abc+ab+c} + \frac{bc}{abc+bc+a} + \frac{ca}{abc+ca+b} \leq 1.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Inegalitatea $(1-a)(1-b)c \geq 0$, adevărată pentru $a, b, c \in (0, 1]$, este echivalentă cu $abc + ab + c \geq ab + bc + ca$, prin urmare $\dfrac{ab}{abc+ab+c} \leq \dfrac{ab}{ab+bc+ca}$. Scriem încă două inegalităţi similare şi, prin sumarea lor, obţinem inegalitatea de demonstrat.

VIII.185. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{2n-1} \cdot c + a^{n-1} \cdot b + 1 < 0$. Demonstraţi că $(a-c)^2 > (a+b+c)(a-b+c)$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Presupunem, prin absurd, că $(a-c)^2 \leq (a+b+c)(a-b+c)$; după calcule, aceatsă relaţie revine la $b^2 \leq 4ac$. Atunci $0 > a^{2n-2} \cdot ac + a^{n-1}b + 1 \geq a^{2n-2} \cdot \dfrac{b^2}{4} + a^{n-1} \cdot b + 1 = \left(a^{n-1} \cdot \dfrac{b}{2} + 1\right)^2 \geq 0$, contradicţie. Astfel, rămâne adevărată concluzia problemei.

Clasa a IX-a

IX.151. *Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bc + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Fie S şi P suma, respectiv produsul soluţiilor ecuaţiei $f(x) = 0$, iar $\alpha = f(S)$, $\beta = f(P)$. Găsiţi soluţiile ecuaţiei $\alpha(x-P)(1-x) = \beta x$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$; atunci $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, iar $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$. Rezultă că $\alpha = f(-\dfrac{b}{a}) = c$ şi $\beta = f\left(\dfrac{c}{a}\right) = \dfrac{(a+b+c)c}{a}$. Ecuaţia $c\left(x - \dfrac{c}{a}\right)(1-x) = \dfrac{(a+b+c)c}{a} \cdot x$ este echivalentă cu $(ax-c)(1-x) = (a+b+c)x$, deci cu $ax^2 + bx + c = 0$. Prin urmare, soluţiile acestei ecuaţii sunt tot x_1 şi x_2.

IX.152. *Fie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ şi numere $a_i \in (0,\infty)$, $x_i \in [0,\infty)$, $i = \overline{1,n}$. Arătaţi că*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{a_i} \geq \frac{2}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{x_ix_j(x_i+x_j)}{a_i+a_j}.$$

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluţie. Demonstrăm mai întâi inegalitatea

$$(*)\qquad \frac{x_1^3}{a_1}+\frac{x_2^3}{a_2} \geq 2\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{a_1+a_2}.$$

Din inegalitatea lui Bergström, avem:

$$\frac{(\sqrt{x_1^3})^2}{\frac{a_1}{a_1+a_2}}+\frac{(\sqrt{x_2^3})^2}{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \geq \frac{(\sqrt{x_1^3}+\sqrt{x_2^3})^3}{\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2}} = x_1^3+x_2^3+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2}.$$

Pentru a obţine $(*)$, este suficient să mai arătăm că $x_1^3+x_2^3+2x_1x_2\sqrt{x_1x_2} \geq 2x_1x_2(x_1+x_2)$. Împărţind prin $x_1x_2\sqrt{x_1x_2}$ şi notând $a=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$, această din urmă inegalitate revine la $a^3+\frac{1}{a^3}+2 \geq 2\left(a+\frac{1}{a}\right)$. Cu substituţia $z=a+\frac{1}{a}\geq 2$, avem de demonstrat că $z^3-5z+2\geq 2$, adică $(z-2)[(z+1)^2-2]\geq 0$, ceea ce este adevărat pentru $z\in[2,\infty)$. Remarcăm că egalitatea în $(*)$ se atinge când $x_1=x_2$ şi $a_1=a_2=1$.

Scriem inegalităţile de tipul $(*)$ pentru $1\leq i<j\leq n$; prin sumarea acestora, obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitatea se atinge când $x_1=x_2=\ldots=x_n$ şi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

IX.153. *Arătaţi că $\sum\frac{a^2}{r_ar_b}\geq 4$, notaţiile fiind cele uzuale în triunghi.*

Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Soluţie. Cum $r_ar_b=\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}=p(p-c)$, avem că $\sum r_ar_b=p(p-a+p-b+p-c)=p^2$. Folosind inegalitatea lui Bergström, obţinem că $\sum\frac{a^2}{r_ar_b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum r_ar_b}=\frac{4p^2}{p^2}=4$. Egalitatea se atinge în cazul triunghiului echilateral.

IX.154. *Arătaţi că $\frac{3R}{2r}\geq\frac{l_a}{l_b}+\frac{l_b}{l_c}+\frac{l_c}{l_a}$, notaţiile fiind cele uzuale în triunghi.*

Vasile Jiglău, Arad

Soluţie. Avem că $l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}\cdot p(p-a)\leq p(p-a)$, prin urmare $l_a^2+l_b^2\leq p(p-a)+p(p-b)=pc$. Rezultă că $\frac{l_a}{l_b}+\frac{l_b}{l_a}=\frac{l_a^2+l_b^2}{l_al_b}\leq\frac{pc}{l_al_b}\leq\frac{pc}{h_ah_b}=\frac{pcab}{4S^2}=\frac{4rRp^2}{4r^2p^2}=\frac{R}{r}$. Analog se arată că $\frac{l_b}{l_c}+\frac{l_c}{l_b}\leq\frac{R}{r}$, $\frac{l_c}{l_a}+\frac{l_a}{l_c}\leq\frac{R}{r}$ şi, prin adunarea celor trei inegalităţi, rezultă concluzia problemei. Egalitatea se atinge în cazul triunghiului echilateral.

IX.155. *Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = b$, $BC = a$, $m(\widehat{BAC}) = 100°$. Arătaţi că $a^4 + 2b^4 + 2a^3b - 5ab^3 - 3a^2b^2 = 0$.*

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Relaţia de demonstrat este echivalentă cu $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\frac{a}{b} + 2 = 0$. Cum $a = 2b\cos 40°$, aceasta este echivalentă cu $16\cos^4 40° + 16\cos^3 40° - 12\cos^2 40° - 10\cos 40° + 2 = 0$. Deoarece $\cos 120° = \cos 3\cdot 40°$, rezultă că $-\frac{1}{2} = 4\cos^3 40° - 3\cos 40°$, deci $\cos^3 40° = \frac{3}{4}\cos 40° - \frac{1}{8}$. Relaţia de demonstrat devine $16\left(\frac{3}{4}\cos 40° - \frac{1}{8}\right)\cos 40° + 16\left(\frac{3}{4}\cos 40° - \frac{1}{8}\right) - 12\cos^2 40° - 10\cos 40° + 2 = 0$, care se verifică imediat.

Clasa a X-a

X.151. *Fie $x, y, z \in (1, \infty)$ şi $a > 0$ astfel încât $\lg x\sqrt{\lg y \cdot \lg z} + \lg y\sqrt{\lg x \cdot \lg z} + \lg z\sqrt{\lg x \cdot \lg y} \geq a$. Arătaţi că $xyz \geq 10^{\sqrt{3a}}$.*

Lucian Tuţescu şi Camelia Dană, Craiova

Soluţie. Evident că $\sum \lg x \cdot \frac{\lg y + \lg z}{2} \geq \sum \lg x \cdot \sqrt{\lg y \cdot \lg z} \geq a$ şi atunci $\sum \lg x \lg y \geq a$. Cum $(\lg x + \lg y + \lg z)^2 \geq 3\sum \lg x \lg y \geq 3a$, obţinem că $(\lg xyz)^2 \geq 3a$, inegalitate echivalentă cu cea din concluzie.

X.152. a) *Arătaţi că $\frac{7}{6} < \lg 16 < \frac{4}{3}$.*

b) *Determinaţi primele două cifre şi ultimele două cifre ale numărului 16^6, fără a-l calcula.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. a) Inegalitatea $\frac{7}{6} < \lg 16$ revine la $16^6 > 10^7$; avem: $16^6 = 2^4 \cdot (2^{10})^2 > 10 \cdot (10^3)^2 = 10^7$. Inegalitatea $\lg 16 < \frac{4}{3}$ revine la $16^3 < 10^4$; însă $16^3 = (2^3)^4 < 10^4$.

b) Numărul 16^6 are $[\lg 16^6] + 1$ cifre (în baza 10). De la a), ştim că $7 < \lg 16^6 < 8$, prin urmare 16^6 este un număr de opt cifre. Primele două cifre formează numărul $\left[\frac{16^6}{10^6}\right]$. Cum $\left(\frac{16}{10}\right)^6 = [(1,6)^3]^2 = (4,096)^2 > 4^2 = 16$ şi $\left(\frac{16}{10}\right)^6 = (4,096)^2 < 4,1^2 < 17$, înseamnă că primele două cifre ale lui 16^6 sunt 16.

Ultima cifră a lui 16^6 este 6, iar penultima sa cifră este ultima cifră a numărului $\frac{16^6 - 6}{10}$. Avem: $\frac{16^6 - 6}{10} = 1 + \frac{16(16^5 - 1)}{10} = 1 + \frac{8}{5}(16-1)(16^4 + 16^3 + 16^2 + 16 + 1) = 1 + 24 \cdot (\overline{\ldots 6} + \overline{\ldots 6} + 256 + 16 + 1) = \overline{\ldots 1}$. În concluzie, ultimele două cifre ale lui 16^6 sunt 16.

X.153. *Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este dat, determinaţi numerele reale a şi b pentru care numărul complex $z = \frac{a - i}{b + i}$ este rădăcină nereală de ordin n a unităţii.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Se impune că $|z| = 1$ şi atunci $|a| = |b|$. Dacă $a = -b$ vom avea că $z = -1 \in \mathbb{R}$, contradicţie. Rămâne deci că $a = b$, deci $z = \dfrac{a-i}{a+i} = \dfrac{a^2-1}{a^2+1} - \dfrac{2ai}{a^2+1} = -(\cos 2t + i\sin 2t)$, unde $t = \operatorname{arctg} a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Atunci $z^n = (-1)^n(\cos 2nt + i\sin 2nt)$ şi, cum $z^n = 1$, rezultă că $(-1)^n = \cos 2nt$ şi $\sin 2nt = 0$. Deducem că $t = \dfrac{k\pi}{2n}$, unde $k \in \mathbb{Z}$ şi, întrucât $(-1)^n = \cos 2nt = \cos k\pi = (-1)^k$, numerele k şi n au aceeaşi paritate. Condiţia $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ impune $|k| < n$. În concluzie, $a = b = \operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{2n}$, unde $k \in \mathbb{Z}$, $|k| < n$ şi k are aceeaşi paritate cu n.

X.154. *Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte. Arătaţi că*

$$\max\left(\frac{1}{|z_1-z_2|}, \frac{1}{|z_2-z_3|}, \frac{1}{|z_3-z_1|}\right) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3+3\max(|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2)}.$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Dacă A, B, C, O sunt punctele de afixe z_1, z_2, z_3 respectiv 0, inegalitatea din enunţ se scrie sub forma

$$\max\left(\frac{1}{AB}, \frac{1}{BC}, \frac{1}{CA}\right) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3+3\max(OA^2, OB^2, OC^2)}.$$

Presupunem că AB este cea mai mică latură a triunghiului (eventual degenerat) ABC şi fie $m = \max(OA^2, OB^2, OC^2)$; atunci trebuie să demonstrăm că $1 + m \geq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}AB$.

Din relaţia lui Leibniz, $3m \geq OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OG^2 + \dfrac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \geq AB^2$, deci $m \geq \dfrac{1}{3}AB^2$. Atunci $1 + m \geq 1 + \dfrac{1}{3}AB^2 \geq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}AB$, conform inegalităţii mediilor. Egalitatea se atinge când $AB = BC = CA = \sqrt{3}$ si $O = G$.

X.155. *Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ având proprietăţile*

(i) *f este injectivă şi g este surjectivă;*

(ii) $f(0) = g(0) = 0$;

(iii) $|f(m) - f(n)| \leq |g(m) - g(n)|, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţi că cele două funcţii sunt egale.

Claudiu Mîndrilă, elev, Târgovişte

Soluţie. Dacă $g(p) = g(q)$, din (iii) rezultă că $f(p) = f(q)$ şi, cum f este injectivă, urmează că $p = q$. Astfel, g este injectivă, deci este bijectivă. Considerăm funcţia $h = f \circ g^{-1}$. Luând în (iii) $m \mapsto g^{-1}(n+1)$ şi $n \mapsto g^{-1}(n)$, obţinem că $|h(n+1) - h(n)| \leq 1$. Însă h este injectivă şi atunci $|h(n+1) - h(n)| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Folosind injectivitatea lui h şi faptul că $h(0) = f(g^{-1}(0)) = f(0) = 0$, se arată inductiv că $h(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deducem că h este funcţia identică, de unde $f = g$.

Clasa a XI-a

XI.151. *Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_0 = 0$, $x_{n+1} = (n+1)^{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Determinaţi numerele naturale n pentru care $x_{n+2} = x_{n+1}^3 + x_n$.*

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

Soluţie. Valoarea $n=0$ nu convine, iar $n=1$ convine. Pentru $n\geq 2$, se arată prin inducţie că $x_{n+2}>x_{n+1}^3+x_n$, prin urmare $n=1$ este singura soluţie a problemei.

XI.152. *Calculaţi* $L_\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}((x+1)^\alpha\ln(x+1)-x^\alpha\ln x)$, *unde* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Stelian Piscan, Giurgiu

Soluţie. Dacă $\alpha<0$, atunci $L_\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^{-a}}-\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}\right]=0$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=0$. Dacă $\alpha=0$, atunci $L_0=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x+1}{x}=0$. Pentru $\alpha\in(0,1)$, avem: $(x+1)^\alpha\ln(x+1)-x^\alpha\ln x=(x+1)^\alpha(\ln(x+1)-\ln x)+((x+1)^\alpha-x^\alpha)\ln x=\dfrac{1}{(x+1)^{1-\alpha}}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}+\dfrac{(1+\frac{1}{x})^\alpha-1}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{\ln x}{x^{1-\alpha}}$, de unde $L_\alpha=0$. În sfârşit, dacă $\alpha\geq 1$, cum $(x+1)^\alpha\ln(x+1)-x^\alpha\ln x>[(x+1)^\alpha-x^\alpha]\ln x$, deducem că $L_\alpha=\infty$.

XI.153. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir şi propoziţiile:* (P_1) *,,Şirul* $(a_{n+1}-a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent";* (P_2) *,,Şirul* $(\max(a_n,a_{n+1}))_{n\geq 1}$ *este convergent";* (P_3) *,,Şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent". Arătaţi că:*

a) (P_1) *nu implică* (P_3)*;*
b) (P_2) *nu implică* (P_3)*;*
c) (P_1) *şi* (P_2) *implică* (P_3).

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. a) Şirul $a_n=n$ verifică (P_1), dar nu şi (P_3).

b) Şirul $a_n=1+(-1)^n$ verifică (P_2), dar nu şi (P_3).

c) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu (P_1) şi (P_2); notăm $x_n=a_{n+1}-a_n$ şi $y_n=\max(a_n,a_{n+1})$, $n\in\mathbb{N}^*$. Cum $2y_n=a_{n+1}+a_n-|a_{n+1}-a_n|$, rezultă că $a_{n+1}+a_n=2y_n+|x_n|$, prin urmare $2a_n=2y_n+|x_n|-x_n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Cum $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente, deducem că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

XI.154. *Determinaţi numerele reale* x *cu proprietatea că* $9^x+25^x=15^x+\dfrac{19}{225}$.

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9^x+25^x-15^x$; ecuaţia dată se scrie sub forma $f(x)=\dfrac{19}{225}$. Întrucât $f(x)=\dfrac{27^x+125^x}{3^x+5^x}$ şi $f'(x)=\dfrac{1}{(3^x+5^x)^2}[27^x\cdot 3^x(\ln 27-\ln 3)+27^x\cdot 5^x(\ln 27-\ln 5)+125^x\cdot 3^x(\ln 125-\ln 3)+125^x\cdot 5^x(\ln 125-\ln 5)]\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, funcţia f este strict crescătoare, deci injectivă. Ecuaţia $f(x)=\dfrac{19}{225}$ va avea cel mult o soluţie şi, cum $f(-1)=\dfrac{19}{225}$, rezultă că $x=-1$ este unica soluţie a ecuaţiei din enunţ.

XI.155. *Se consideră matricele* $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *cu* $AB=BA$ *şi numărul* $a\in\left(\dfrac{1}{4},\infty\right)$. *Dacă* $det(A^2+AB+aB^2)=0$, *arătaţi că* $det(A+B)=detA+adetB$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Cum $a\in\left(\dfrac{1}{4},\infty\right)$, ecuaţia $x^2-x+a=0$ are soluţiile complexe şi nereale z şi $\overline{z}$. Avem: $\det(A^2+AB+aB^2)=\det(A+zB)(A+\overline{z}B)=|\det(A+zB)|^2=0$, deci $\det(A+zB)=0$, prin urmare polinomul $f=\det A+bX+cX^2+(\det B)X^3$ se anulează în $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ cu $z^2-z+a=0$. Cum $z^2=z-a$, $z^3=z^2-az=z(1-a)-a$, rezultă că

$f(z) = (\det A - ac - a\det B) + (b + c + \det B - a\det B)z$. Întrucât $f(z) = 0$ şi $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, deducem că $c = \dfrac{1}{a}\det A - \det B$, iar $b = -c + a\det B - \det B = -\dfrac{1}{a}\det A + a\det B$. Înlocuind, găsim că $f(1) = \det A + a\det B$; însă $f(1) = \det(A + B)$, de unde concluzia problemei.

Clasa a XII-a

XII.151. *Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = \dfrac{1}{2} + 3X - 4X^3$ şi $g\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0$. Demonstraţi că f divide g.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Polinomul f este de grad 3 şi nu are radăcini raţionale, deci este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Întrucât $\dfrac{1}{2} = \cos 3\cdot\dfrac{\pi}{9} = 4\cos^3\dfrac{\pi}{9} - 3\cos\dfrac{\pi}{9}$, rezultă că $f\left(\cos\dfrac{\pi}{9}\right) = 0$. Nu există polinoame de gradul II, având coeficienţii raţionali, care să admită radăcina $\cos\dfrac{\pi}{9}$, aşadar f este polinomul minimal al numărului $\cos\dfrac{\pi}{9}$ peste $\mathbb{Q}$. Cum g are rădăcina $\cos\dfrac{\pi}{9}$, rezultă că $f|g$.

XII.152. *Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm cu $\sigma(n)$ suma divizorilor pozitivi ai lui n şi cu $\varphi(n)$ numărul numerelor din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ care sunt relativ prime cu n. Pentru $n \in \{p^\alpha | p = \text{prim}, \alpha \in \mathbb{N}\}$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\sigma(n)\cdot\varphi(n)}}{n}$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Avem că $\sigma(n)\cdot\varphi(n) = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}\cdot p^{\alpha-1}(p-1) = p^{2\alpha} - p^{\alpha-1} \leq p^{2\alpha} - 1 = n^2 - 1$, iar $\sigma(n)\cdot\varphi(n) \geq p^{2\alpha} - p^\alpha \geq n^2 - n$. Rezultă că $n^2 - n \leq \sigma(n)\cdot\varphi(n) \leq n^2 - 1$ şi, de aici, limita cerută este egală cu 1.

XII.153. *Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat. Determinaţi funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x)\cdot f(x) + \lambda(f(x))^2 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Sven Cortel, elev, Satu-Mare

Soluţie. Relaţia din enunţ se scrie sub forma $(f^2(x))' + 2\lambda f^2(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $(e^{2\lambda x} f^2(x))' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi atunci $e^{2\lambda x} f^2(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde c este o constantă reală nenegativă. Dacă $c = 0$, atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $c > 0$, atunci f este nenulă pe $\mathbb{R}$ şi, cum este continuă, f va avea semn constant pe $\mathbb{R}$. Deducem că $f(x) = \sqrt{c}e^{-\lambda x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) = -\sqrt{c}e^{-\lambda x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. În concluzie, soluţiile problemei sunt funcţiile $f_k(x) = ke^{-\lambda x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $k \in \mathbb{R}$ este constantă.

XII.154. *Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $x^2 f(x) \geq e^{\frac{1}{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$. Arătaţi că funcţia f nu are primitive.*

Florin Nicolaescu, Balş

Soluţia 1 (**Emanuel Necula**, elev, Câmpulung Muscel). Inegalitatea din enunţul problemei este echivalentă cu $\dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq e^x$, $\forall x > 0$, sau cu $e^x - \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 0$, $\forall > 0$. Presupunând că funcţia f admite primitive, fie F una dintre ele. Considerând funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de $g(x) = e^x + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, avem că $g'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

$\forall x > 0$, deci $g'(x) \leq 0$, $\forall x > 0$. Aşadar, g este descrescătoare pe $(0, \infty)$, fapt din care rezultă că $g(1) \geq \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} [e^x + F\left(\frac{1}{x}\right)] = \infty + F(0) = \infty$ (întrucât F este continuă în 0) şi ajungem la absurditatea $e + F(1) \geq \infty$. În final, funcţia f nu are primitive.

Soluţia 2 (**Gheorghe Iurea**, Iaşi)**.** Presupunem, prin absurd, că există $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ primitivă a funcţiei f. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $F : \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$, obţinem $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ pentru care $F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) = f(c_n) \cdot \frac{1}{n(n+1)}$. Cum $c_n > 0$, din ipoteză vom avea că $f(c_n) \geq \frac{1}{c_n^2} \cdot e^{\frac{1}{c_n}}$, aşadar $F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot e^{\frac{1}{c_n}}$. Din $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 1$; atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{c_n^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot e^{\frac{1}{c_n}} = \infty$. Însă F este continuă în 0, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \left[F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = 0$ şi, astfel, am ajuns la o contradicţie.

XII.155. Determinaţi funcţiile continue $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $\max\{f(a), g(a)\} \leq \int_0^a f(x) \cdot g(x) dx$, $\forall a \in [0, \infty)$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie (**Moubinool Omarjee**, Paris)**.** Funcţia $a \mapsto F(a) = \int_0^a f(x)g(x)\, dx$ este derivabilă, cu $F'(a) = f(a)g(a)$. Deoarece $g(a) \leq F(a)$, $\forall a \in [0, \infty)$, această inegalitate revine succesiv la:

$$f(a)g(a) \leq f(a)F(a) \Leftrightarrow F'(a) - f(a)F(a) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-\int_a^b f(x)dx} F'(a) - f(a)e^{-\int_0^a f(x)dx} F(a) \leq 0 \Leftrightarrow (e^{-\int_0^a f(x)dx} F(a))' \leq 0,$$

deci funcţia $a \mapsto K(a) = e^{-\int_0^a f(x)dx} F(a)$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$. Atunci $K(a) \leq K(0) = 0$, $\forall a \in [0, \infty)$, de unde deducem că $F(a) \leq 0$, $\forall a \in [0, \infty)$. Funcţiile f şi g sunt pozitive, continue şi au ca produs funcţia nulă; rezultă că $f(x) = g(x) = 0$, $\forall x \in [0, \infty)$. Reciproc, funcţiile $f = g = 0$ verifică ipotezele problemei.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2014

A. Nivel gimnazial

G266. *Determinaţi numărul natural n minim având proprietatea: oricare ar fi mulţimea* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, *există* $B, C \subset A$ *astfel încât* $|B| = |C| = 3$, $B \cap C = \emptyset$ *şi* $S_B + S_C \vdots 3$. *(Am notat cu* S_M *suma elementelor mulţimii* M.*)*

Cristian Lazăr, Iaşi