Rezultă că $\widehat{7}^m + \widehat{5}^n \neq \widehat{0}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ şi, de aici, concluzia problemei.

XII.145. *Fie $(A, +, \cdot)$ inel cu $1 \neq 0$, având un număr impar de elemente, în care are loc implicaţia: ,,dacă $x^2 - 2xy + y^2 = 1+1+1+1$, atunci $x + y = 1+1+1+1$". Dacă $1 + 1$ nu este divizor al lui zero, demonstraţi că A este izomorf cu $\mathbb{Z}_3$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Fie $a \in A$, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Deoarece, pentru $x = a - 1$, $y = a + 1$, avem $x^2 - 2xy + y^2 = 1+1+1+1$, rezultă că $a(1+1) = 1+1+1+1$. Dar A are un număr impar de elemente, deci $1 + 1 \neq 0$ şi, cum A este finit şi $1 + 1$ nu este divizor al lui zero, acesta este inversabil. Rezultă că $a = (1+1)(1+1)^{-1} + (1+1)(1+1)^{-1} = 1+1$. Astfel, $A = \{0, 1, 1 + 1\}$ şi, de aici, concluzia problemei.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2013

A. Nivel gimnazial

G246. *Doi copii, A şi B, joacă un joc. Acesta se desfăşoară pe un careu format din $a \times b$ pătrăţele, în care a şi b sunt numere naturale impare, propuse fiecare de către unul dintre cei doi copii. Jucătorii bifează, pe rând, câte o căsuţă din careu, astfel: A începe jocul prin bifarea unui pătrăţel (m, n), unde m reprezintă linia, iar n coloana pătrăţelului bifat. Apoi, B bifează unul dintre pătrăţelele $(m \pm 1, n \pm 3)$ sau $(m \pm 3, n \pm 1)$, aflat în interiorul careului. De fiecare dată când un jucător vine la rând, el alege o poziţie (p, q) deja bifată şi are voie să bifeze una dintre poziţiile $(p \pm 1, q \pm 3)$ sau $(p \pm 3, q \pm 1)$ care este încă nebifată în careu. Pierde jucătorul care, atunci când îi vine rândul, nu mai are ce bifa.*

Demonstraţi că A are strategie de câştig.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Careul are un total de $a \cdot b$ pătrăţele, fiecare pătrăţel fiind identificat de perechea (x, y) care indică linia şi coloana pe care se află acesta. Fie $T = \dfrac{ab+1}{2}$ numărul pătrăţelelor (x, y) cu x şi y de aceeaşi paritate.

Dacă $T = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, A va bifa primul pătrăţel într-o poziţie (x, y) cu x, y de acelaşi paritate. Astfel, B va fi obligat să bifeze tot într-o poziţie având coordonate de aceeaşi paritate şi, apoi, la fel A. Jocul continuă până la ocuparea tuturor poziţiilor cu coordonate de aceeaşi paritate. Întrucât, în acest caz, numărul acestor pătrăţele este impar, A va bifa ultimul pătrăţel şi va câştiga.

Dacă $T = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că numărul pătrăţelelor care au coordonate de parităţi diferite este impar. Procedând ca mai sus, A va bifa într-o poziţie (m, n) cu m şi n de parităţi diferite şi va câştiga.

G247. *Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \geq 6$, şi X, Y două submulţimi disjuncte ale lui A, $X \cup Y = A$, având fiecare cel puţin trei elemente. Demonstraţi că există $x, y \in X$, $x \neq y$ şi $a, b \in Y, a \neq b$, astfel încât $x - y = a - b$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, $k \geq 3$ şi $Y = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_p$, $p \geq 3$.

Presupunem că există $i = \overline{1, k-1}$ astfel încât $a_{i+1} - a_i = m$, cu $m \geq 3$, deci $a_{i+1} = m + a_i$. Rezultă că $1 + a_i, 2 + a_i, \ldots, m - 1 + a_i \in Y$. Considerăm şi numărul $m+1+a_i$. Dacă $m+1+a_i \in X$, atunci $(m+1+a_i)-(m+a_i) = (2+a_i)-(1+a_i)$, deci concluzia problemei. Dacă $m+1+a_i \in Y$, atunci $(m+1+a_i)-(1+a_i) = (m+a_i)-a_i$ şi din nou conlcuzia problemei.

Dacă $m + 1 + a_i \notin A$, deci $a_{i+1} = n$, cum A are cel puţin 3 elemente, rezultă că $a_i \geq 2$, deci $a_i - 1 \geq 1$, prin urmare $a_i - 1 \in A$. Raţionăm ca mai sus cu $a_i - 1$ în loc de $m + 1 + a_i$. Deducem că $a_{i+1} - a_i \leq 2$ pentru orice $i = \overline{1, k-1}$ şi, procedând analog, $b_{i+1} - b_i \leq 2$, $\forall i = \overline{1, p-1}$. Dacă există i, j cu $a_{i+1} - a_i = 1$ şi $a_{j+1} - a_j = 2$ problema este evidentă (deoarece $b_{k+1} - b_k$ este 1 sau 2). Dacă $a_{i+1} - a_i = 1$, $\forall i = \overline{1, k-1}$, atunci $a_{i+2} - a_i = 2$, imposibil.

G248. *Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că numărul $5a(a^2+1)$ nu este pătrat perfect.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Presupunem că numărul $5a(a^2+1)$ este pătrat perfect. Atunci $a(a^2+1)$ se divide cu 5, deci $a = 5t$, $t \in \mathbb{N}^*$ sau $a = 5x + 2$, $x \in \mathbb{N}$ sau $a = 5y + 3$, $y \in \mathbb{N}$.

Dacă $a = 5t$, $5a(a^2+1) = 25t(25t^2+1)$. Cum t şi $25t^2 + 1$ sunt prime între ele iar produsul lor este pătrat perfect, rezultă că fiecare este pătrat perfect, imposibil: $(5t)^2 < 25t^2 + 1 < (5t+1)^2$.

Dacă $a = 5x+2$, atunci $5a(a^2+1) = 5^2(5x+2)(5x^2+4x+1)$. Numerele $a = 5x+2$ şi $5x^2 + 4x + 1$ sunt prime între ele, deci fiecare este pătrat perfect. Acest lucru este imposibil, deoarece numerele de forma $5x + 2$ au ultima cifră 2 sau 7 şi nu pot fi pătrate. Cazul $a = 5x + 3$ se tratează analog.

G249. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $85^m - n^4 = 4$.*

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = 5^m \cdot 17^m$. Fie d divizor comun al numerelor $n^2 - 2n + 2$ şi $n^2 + 2n + 2$. Găsim uşor că $d \in \{1, 2, 4, 8\}$. Cum d este impar (deoarece divide $5^m \cdot 17^m$), rezultă că $d = 1$, deci $n^2 - 2n + 2$ şi $n^2 + 2n + 2$ sunt prime între ele. Prin urmare, $n^2 - 2n + 2 = 5^m$ şi $n^2 + 2n + 2 = 17^m$. Rezultă că $n = \sqrt{5^m - 1} + 1$ şi $n = \sqrt{17^m - 1} - 1$, deci $\sqrt{17^m - 1} - \sqrt{5^m - 1} = 2$. Pentru $m \geq 2$, $\sqrt{17^m - 1} - \sqrt{5^m - 1} \geq 4^m - 3^m > 2$. Rămâne că $m = 1$, iar $n = 3$.

G250. *Demonstraţi că $a^3 + b^3 \geq 2\sqrt{ab}(a - 2b)(b - 2a)$, oricare ar fi numerele reale pozitive a şi b.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă $(a - 2b)(b - 2a) < 0$, inegalitatea este evidentă.

Dacă $(a - 2b)(b - 2a) \geq 0$, inegalitatea se obţine prin înmulţirea inegalităţilor $a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0$ şi $a^2 - ab + b^2 \geq (a - 2b)(b - 2a) \geq 0$.

G251. *Dacă a, b, c sunt numere reale poztive cu $ab + bc + ca = 3$, arătaţi că $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 6$.*

Monica Golea, elevă, Craiova

Soluţie. Observăm că $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) = (a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$. Din $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, rezultă $a+b+c \geq 3$, iar din $3 = ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, obţinem că $abc \leq 1$. Prin urmare, $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \geq 3 \cdot 3 - 3 = 6$.

Egalitatea se realizează pentru $a = b = c = 1$.

G252. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele reale pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, demonstraţi că*
$$\max\left(x_1 + \frac{1}{S - x_1}, x_2 + \frac{1}{S - x_2}, \ldots, x_n + \frac{1}{S - x_n}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Ani Drăghici şi Mariana Mărculescu, Craiova

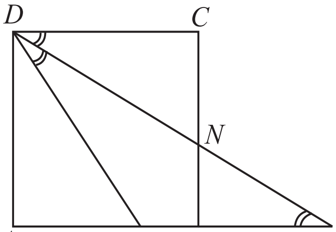
Soluţie. Observăm că
$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{S - x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n-1}(S - x_i) + \frac{1}{S - x_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{n-1}} = \frac{2n}{\sqrt{n-1}}$$
şi, de aici, concluzia problemei.

Egalitatea se realizează dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$.

G253. *Fie M un punct oarecare pe latura AB a pătratului $ABCD$. Bisectoarea unghiului $\widehat{MDC}$ intersectează BC în N. Arătaţi că $BM + BN < AM + CN$.*

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţia 1 (a autoarei). Dacă $\{P\} = ND \cap AB$ şi Q este simetricul lui P faţă de M, atunci $\triangle DPQ$ este dreptunghic în D (deoarece $MD = MP = MQ$). Ca urmare, $m(\widehat{ADQ}) = m(\widehat{CDN})$ şi, deci, avem că $AQ = CN$ (din $\triangle ADQ \equiv \triangle CDN$). Aşadar, $AM + CN = AM + AQ = MQ = MP = MB + BP > MB + BN$ (deoarece $m(\widehat{BNP}) > m(\widehat{BPN})$), de unde rezultă relaţia dorită.



Soluţia 2. Fie $AM = x$, $AB = a$. Notând $\{P\} = DN \cap AB$, din triunghiul isoscel DMP rezultă că $MP = \sqrt{a^2 + x^2}$, apoi din $\triangle PBN \sim \triangle PAD$, găsim $y = BN = a + x - \sqrt{a^2 + x^2}$. Inegalitatea de demonstrat se scrie sub forma $a - x + y < x + a - y \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow a - \sqrt{a^2 + x^2} < 0$, evident adevărată.

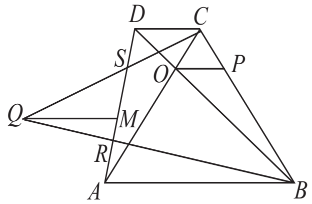
Soluţia 3 (**Necula Emanuel**, elev, Câmpulung Muscel)**.** Avem: $BM + BN < AM + CN \Leftrightarrow (a - AM) + (a - CN) < AM + CN \Leftrightarrow AM + CN > a$ (unde $a = AB$). Pentru a dovedi această ultimă inegalitate, notăm $\alpha = m(\widehat{ADM})$ şi observăm că $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{NDC}) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$. Imediat obţinem că $AM = a\operatorname{tg}\alpha(\triangle ADM)$, $CN = a\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)(\triangle CDN)$ şi, deci,
$$AM + CN = a\left[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = a\left[\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right] = a\frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} > a.$$

G254. *Diagonalele trapezului $ABCD$ se intersectează în O. Paralela prin O la baza AB intersectează latura BC în P. Punctul Q este situat în semiplanul opus celui determinat de dreapta AD şi punctul B, iar dreptele QB şi QC intersectează AD în R, respectiv S. Demonstraţi că dreptele PQ, BS şi CR sunt concurente.*

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $QM \| AB$, $M \in AD$; atunci $\dfrac{CS}{SQ} = \dfrac{CD}{QM}$ (deoarece $\triangle CDS$

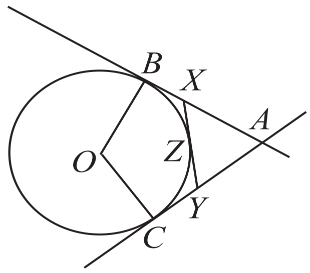
$\sim \triangle QMS$), $\dfrac{QR}{RB} = \dfrac{QM}{AB}$ (deoarece $\triangle QMR \sim \triangle BAM$) şi $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$ (deoarece $OP \| CD \| AB$). Rezultă că $\dfrac{CS}{SQ} \cdot \dfrac{QR}{RB} \cdot \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{CD}{QM} \cdot \dfrac{QM}{AB} \cdot \dfrac{AB}{CD} = 1$ şi, folosind reciproca teoremei lui Ceva, obţinem concluzia problemei.



G255. *Fie AB şi AC tangentele din punctul A la un cerc $\mathcal{C}$ (B şi C fiind punctele de tangenţă) şi $\mathcal{R}$ regiunea din plan determinată de arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ al cercului $\mathcal{C}$ şi segmentele AB şi AC. Demonstraţi că $MN \leq AB$, oricare ar fi segmentul $[MN]$ din $\mathcal{R}$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie XY tangenta la $\mathcal{C}$ paralelă cu MN, punctul Z de tangenţă fiind pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Evident, $MN \leq XY$; rămâne să arătăm că $XY \leq AB$. Avem că $XY = XZ + ZY = BX + CY$ şi $XY \leq AX + AY$, prin urmare $BX + CY \leq AX + AY$ şi, de aici, $BX \leq AY$ sau $CY \leq AX$ Dacă $BX \leq AY$, atunci $XY = BX + CY \leq AY + CY = AC$, iar dacă $CY < AX$, atunci $XY = BX + CY \leq BX + AX = AB$ şi problema este rezolvată.



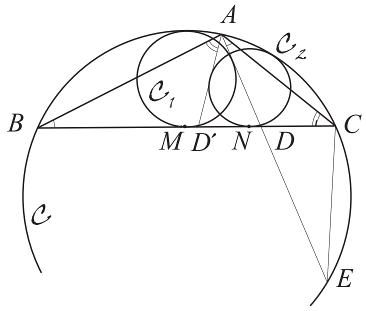
B. Nivel liceal

L246. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) \geq 90°$, înscris în cercul $\mathcal{C}$. Pe latura BC se consideră punctele D şi D' astfel încât $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD}$ şi $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BAD'}$. Cercul tangent dreptelor AD, BD şi cercului $\mathcal{C}$ este tangent segmentului BD în M. Cercul tangent dreptelor AD', CD' şi cercului $\mathcal{C}$ este tangent segmentului CD' în N. Arătaţi că $\dfrac{MN}{BC} \leq \sqrt{2} - 1$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie $\mathcal{C}_1$ cercul tangent segmentelor AD, BD şi cercului $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_2$ cercul tangent segmentelor AD', CD' şi cercului $\mathcal{C}$, iar $\{E\} = AD \cap \mathcal{C}$.

Avem că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD} \equiv \widehat{AEC}$, deci $AC = CE$. Aplicând teorema lui Casey cercurilor A, C, E (degenerate) şi $\mathcal{C}_1$, obţinem: $AC \cdot d(E, \mathcal{C}_1) + CE \cdot d(A, \mathcal{C}_1) = AE \cdot d(C, \mathcal{C}_1) \Rightarrow AC(d(E, \mathcal{C}_1) + d(A, \mathcal{C}_1)) = AE \cdot d(C, \mathcal{C}_1) \Rightarrow AC \cdot AE = AE \cdot CM \Rightarrow AC = CM$. Analog deducem că $BN = AB$.



Acum $BN + CM = BC + MN$ şi, de aici, $MN = AB + AC - BC$.

Dar $\dfrac{AB + AC}{2} = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AC^2}{2}}$ şi, cum $AB^2 + AC^2 \leq BC^2$ (deoarece $m(\widehat{BAC}) \geq 90°$), rezultă că $AB + AC \leq BC\sqrt{2}$.

Prin urmare $\dfrac{MN}{BC} \leq \dfrac{BC\sqrt{2} - BC}{BC}$, adică $\dfrac{MN}{BC} \leq \sqrt{2} - 1$.

Notă. S-a primit soluţie corectă din partea d-lui **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L247. *Pe laturile* BC, CA *şi* AB *ale triunghiului* ABC *se consideră punctele* A_1, B_1, *respectiv* C_1 *astfel încât* $AB + BA_1 = AC + CA_1$, $AB + AB_1 = BC + CB_1$ *şi* $AC + AC_1 = BC + BC_1$. *Dacă* A_2, B_2 *şi* C_2 *sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul* ABC *cu laturile* BC, CA, *respectiv* AB, *arătaţi că* $A_1B_1^2+B_1C_1^2+C_1A_1^2 \geq A_2B_2^2 + B_2C_2^2 + C_2A_2^2$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Vom folosi notaţiile uzuale într-un triunghi. Din enunţ rezultă imediat că $A_1C = p - b$, $B_1C = p - a$ (de fapt, A_1, B_1 şi C_1 sunt picioarele cevienelor punctului lui Nagel). Mai avem $A_2C = B_2C = p - c$ şi atunci, cu teorema cosinusului, obţinem că $A_1B_1^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos C$ şi $A_2B_2^2 = (p-c)^2 + (p-c)^2 - 2(p-c)^2 \cos C$. Putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
&A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 - A_2B_2^2 - B_2C_2^2 - C_2A_2^2 = \\
&= \sum[(p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos C] - \sum 2(p-c)^2(1-\cos C) = \\
&= \sum 2[(p-c)^2 - (p-a)(p-b)]\cos C = \\
&= \sum (a^2 + b^2 - ac - bc)\cos C = \\
&= \sum a(a-c)\cos C + \sum b(b-c)\cos C = \\
&= \sum a(a-c)\cos C + \sum c(c-a)\cos A = \\
&= \sum (a-c)(a\cos C - c\cos A) = \\
&= \sum (a-c)\frac{2(a^2-c^2)}{2b} = \sum \frac{(a-c)^2(a+c)}{b} \geq 0.
\end{aligned}$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$, deci în cazul triunghiului echilateral.

Notă. S-a primit soluţie corectă de la d-l **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş.

L248. *Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea*

$$\frac{3(r_a + r_b + r_c)}{2p^2} \geq \frac{1}{r_a + r_b} + \frac{1}{r_b + r_c} + \frac{1}{r_c + r_a} \geq \frac{6}{5R + 2r}.$$

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgovişte

Soluţie (**Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Vom folosi egalităţile $\Sigma r_a = 4R + r$, $\Sigma \dfrac{1}{r_a + r_b} = \dfrac{(4R+r)^2 + p^2}{4p^2R}$ şi (*) $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ (Gerretsen).

Prima inegalitate revine, după calcule, la inegalitatea $p^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2$. Ţinând seama de (*), este suficient să arătăm că $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2$ sau $(R - 2r)(4R + 2r) \geq 0$, ceea ce este adevărat.

A doua inegalitate revine la $p^2(19R - 2r) \leq (4R + r)^2(5R + r)$. Din nou utilizând (*), este suficient să arătăm că $(4R^2 + 4Rr + 3r^2)(19R - 2r) \leq (4R + r)^2(5R + 2r)$ sau, după calcule simple, $(R - 2r)(R^2 + 3Rr - r^2) \geq 0$, adevărat.

Evident, se obţine egalitate dacă şi numai dacă triughiul este echilateral.

Notă. S-au primit soluţii de la elevul **Necula Emanuel**, Câmpulung Muscel, şi d-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti.

L249. *Fie $ABCD$ un patrulater atât inscriptibil, cât şi circumscriptibil. Dacă notăm cu e şi f lungimile diagonalelor, demonstraţi că* $\dfrac{p}{\sqrt{2\sqrt{2}Rr}} \geq \dfrac{e+f}{\sqrt{ef}}$.

Vasile Jiglău, Arad

Soluţie. Într-un patrulater inscriptibil şi circumscriptibil, avem relaţiile $e+f = \dfrac{p}{2R}(\sqrt{4R^2+r^2}+r)$ şi $ef = 2r(\sqrt{4R^2+r^2}+r)$. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $2\sqrt{2}R \geq \sqrt{4R^2+r^2}+r$, care este adevărată pe baza inegalităţii lui Euler $R \geq r\sqrt{2}$.

Notă. S-a primit soluţie de la d-l **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş.

L250. *Stabiliţi pentru care dintre numerele $1, 2, \ldots, 9$ este adevărată egalitatea* $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{n} = \sqrt{3n}$.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Pentru $n = 2, 4, 8$, membrul stâng nu este definit, deci aceste valori nu sunt soluţii. Notăm $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{n}$. Avem: $a_1 = 0$; $a_3 = 3\sqrt{3}$; $a_5 = -\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5} < 0$; $a_6 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} < 0$; $a_7 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7} + \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{7} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7} - \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{7} < 0$; $a_9 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9} + \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{9} + \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{9}$.

Observăm că $\operatorname{tg} 3\cdot\dfrac{\pi}{9} = \sqrt{3}$; de aici $\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{\pi}{9} - \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{9}}{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{9}} = \sqrt{3}$, deci $\operatorname{tg}^3\dfrac{\pi}{9} - 3\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{9} - 3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9} + \sqrt{3} = 0$. Prin urmare, $x_1 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}$ este soluţie a ecuaţiei $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$; la fel arătăm că celelalte soluţii sunt $x_2 = \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{9}$ şi $x_3 = \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{9}$. Rezultă că $a_9 = x_1 + x_2 + x_3 = 3\sqrt{3}$.

În concluzie, soluţia problemei este $n = 9$.

Notă. Au rezolvat problema d-nii **Daniel Văcaru**, Piteşti, **Titu Zvonaru**, Comăneşti, şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş.

L251. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele reale nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu proprietatea că $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 3n^2$. Demonstraţi că $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^3 \geq 9n(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$.*

Lucian Tuţescu şi Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Inegalitatea este echivalentă cu

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^6 \geq 27(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)^2$$

şi rezultă prin aplicarea inegalităţii mediilor numerelor $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ şi $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$.

Notă. S-au primit soluţii de la elevii **Ştefan Cristian Popa**, Caracal, **Andrei Raul Spătaru**, Melineşti (Dolj), **Cristian Vîntur**, Paşcani, **Vladimir Guriţă**, Craiova, **Andrei Nicolăescu**, Craiova, şi d-l **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L252. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, şi numerele reale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Se calculează toate sumele $a_i + a_j$, $i \neq j$, obţinând t rezultate distincte. Demonstraţi că $t \geq 2n - 3$ şi că $t = 2n - 3$ dacă şi numai dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este progresie aritmetică.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţia 1 (a autorului)**.** Deoarece $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, avem cel puţin următoarele sume distincte:

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < a_3 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n,$$

care sunt în număr de $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$, deci $t \geq 2n - 3$.

Să presupunem că $t = 2n-3$; notăm $a_2 - a_1 = r$. Considerăm mulţimea $A = \{a_2 + a_3, a_2 + a_4, \ldots, a_2 + a_{n-1}\}$. Cum $a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < \ldots < a_2 + a_{n-1} < a_2 + a_n$, rezultă că $A \subset B$, unde $B = \{a_1 + a_4, a_1 + a_5, \ldots, a_1 + a_n\}$ şi, deoarece A şi B au acelaşi cardinal, deducem că $A = B$. De aici $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, $a_1 + a_5 = a_2 + a_4, \ldots a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$, prin urmare $a_4 = a_3 + r$, $a_5 = a_4 + r, \ldots, a_n = a_{n-1} + r$. Fie acum suma $a_3 + a_{n-1}$. Deoarece $a_3 + a_{n-1} > a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$ şi $a_3 + a_{n-1} < a_3 + a_n$, rezultă că $a_3 + a_{n-1} = a_2 + a_n$, deci $a_3 = a_n - a_{n-1} + a_2 = a_2 + r$.

În concluzie, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt în progresie aritmetică de raţie r, se arată uşor că $\{a_i + a_j | i \neq j, i, j = \overline{1, n}\} = \{2a_1 + kr | k = 1, 2, \ldots, 2n - 3\}$, aşadar $t = 2n - 3$.

Soluţia 2 (**Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Fie $S = \{a_i + a_j | i \neq j\}$ şi $S' = \{a_i + a_j | i \neq j,\ |i - j| \leq 2\}$. Din enunţ, avem că $|S| = t$ şi deducem imediat că

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 + a_2 + a_4 < \ldots < a_{n-2} + a_{n-1} < a_{n-2} + a_n < a_{n-1} + a_n.$$

Constatăm că $|S'| = 2(n - 2) + 1 = 2n - 3$ şi, deci, $t \geq 2n - 3$.

Dacă $t = 2n-3$, atunci $S = S'$. Deoarece avem că $a_k + a_{k+2} < a_k + a_{k+3} < a_{k+1} + a_{k+3}$ şi $a_k + a_{k+3} \in S'$, rezultă că $a_k + a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2}$ sau $a_{k+1} - a_k = a_{k+3} - a_{k+2}$, $\forall k = \overline{1, n-3}$.(1) Deoarece $a_k + a_{k+4} \in S'$ şi $a_{k+1} + a_{k+2} < a_{k+1} + a_{k+3} < a_{k+2} + a_{k+3}$, din faptul că $a_k + a_{k+4} > a_k + a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2}$ şi $a_k + a_{k+4} < a_{k+1} + a_{k+4} = a_{k+2} + a_{k+3}$ rezultă că $a_k + a_{k+4} = a_{k+1} + a_{k+3}$, adică $a_{k+4} - a_{k+3} = a_{k+1} - a_k$, $\forall k = \overline{1, n-4}$(2).

Dând valori lui K, în relaţiile (1) şi (2), obţinem: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_1$, adică $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este progresie aritmetică.

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este progresie aritmetică, se arată uşor că $t = 2n - 3$. Întradevăr, să arătăm că pentru suma $a_i + a_j$ cu $|i - j| \geq 3$ avem că $a_i + a_j \in S'$. Dacă $i + j$ este impar, observăm că $a_i + a_j = a_{\frac{i+j-1}{2}} + a_{\frac{i+j+1}{2}} \in S'$, iar dacă $i + j$ este par, avem că $a_i + a_j = a_{\frac{i+j-2}{2}} + a_{\frac{i+j+2}{2}} \in S'$.

Notă. A mai rezolvat problema d-l **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L253. *Fie a, b, c trei numere reale pozitive cu $a \leq c$ şi $x, y, z \in [a, c]$ astfel încât $x + y + z = a + b + c$ şi $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Arătaţi că numerele x, y şi z coincid într-o anumită ordine, cu a, b şi c.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $S = x + y + z$, $Q = xy + yz + xz$, $P = xyz$ şi polinomul $f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - St^2 + Qt - P$. Din ipoteză, $S = a+b+c$ şi $Q = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) P$, deci $f(t) = t^3 - (a + b + c)t^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) Pt - P$. Tot din ipoteză, $f(a) \leq 0$ şi $f(c) \geq 0$. Cum $f(a) = \frac{a(b+c)}{bc}(P - abc)$ şi $f(c) = \frac{c(a+b)}{ab}(P - abc)$, rezultă că $P = abc$.

Prin urmare, $f(t) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + ac + bc)t - abc$, deci rădăcinile lui f sunt a, b, c şi, de aici, conlcuzia.

L254. *Determinaţi numerele reale x, y, z din intervalul $[1, 3]$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ şi $x^3 + y^3 + z^3 = 36$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie $A = x + y + z$, $B = xy + yz + zx$, $C = xyz$ şi polinomul $f(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - At^2 + Bt - C$. Folosind ipoteza, din $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ rezultă $A^2 - 2B = 14$, iar din $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ rezultă că $3C + A^3 - 3AB = 36$. Prin urmare, $B = \frac{A^2 - 14}{2}$ şi $C = \frac{72 + A^3 - 42A}{6}$. Tot din ipoteză, $f(1) \leq 0$ şi $f(3) \geq 0$ şi, de aici, $(A - 3)(A - 6)(A + 6) \geq 0$ şi $(A - 6)(A^2 - 3A - 6) \leq 0$. Cum $A = x + y + z > 3$ (deoarece x, y, z nu pot fi toate egale cu 1), rezultă $A = 6$.

Pentru $A = 6$, $B = 11$, $C = 6$, polinomul $f(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$ are rădăcinile $1, 2$ şi 3. Prin urmare, x, y, z sunt egale cu $1, 2, 3$, într-o anumită ordine.

L255. *Se consideră numerele $a < c < b$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ ce satisface condiţiile: 1) orice subşir convergent al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita a sau b, 2) subşirurile cu limita a converg uniform la a, iar cele cu limita b converg uniform la b. Notăm $A_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n$ şi $x_k \leq c\}$ şi $B_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n$ şi $x_k > c\}$. Dacă există şi este finită şi nenulă limita $L = \lim_{n\to\infty} \frac{card\, A_n}{card\, B_n}$, arătaţi că şirul $y_n = \frac{x_1 + x_n + \ldots + x_n}{n}$ este convergent şi aflaţi limita sa (funcţie de a, b şi L). Studiaţi şi cazurile $L = 0$ şi $L = +\infty$.*

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$, $a_n = \operatorname{card} A_n$, $b_n = \operatorname{card} B_n$; atunci $L - \varepsilon < \frac{n}{b_n} - 1 < L + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ şi rezultă că $\frac{n}{L + 1 + \varepsilon} < b_n < \frac{n}{L + 1 - \varepsilon}$, apoi $\frac{(L - \varepsilon)n}{L + 1 - \varepsilon} < a_n < \frac{(L + \varepsilon)n}{L + 1 + \varepsilon}$. Notăm $A_n^t = \{x_k | t < k \leq n$ şi $x_k \leq c\}$ şi $B_n^t = \{x_k | t < k \leq n, x_k > c\}$. În condiţiile problemei există n_0 suficient de mare, astfel încât $A_n^{n_0} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ şi $B_n^{n_0} \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ şi, implicit, pentru orice $t \geq n_0$, $A_n^t \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $B_n^t \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Atunci, dintre termenii sumei $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $a_n - t$ sunt în $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, iar $b_n - t$ sunt în $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Notând $\sigma = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_t|$, rezultă, mai întâi

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} < \frac{\sigma + (a_n - t)(a + \varepsilon) + (b_n - t)(b + \varepsilon)}{n} < \\
(1)\qquad &\frac{\sigma}{n} + \left(\frac{L + \varepsilon}{L + 1 + \varepsilon} - \frac{t}{n}\right)(a + \varepsilon) + \left(\frac{1}{L + 1 - \varepsilon} - \frac{t}{n}\right)(b + \varepsilon),
\end{aligned}
$$

iar

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} > -\frac{\sigma}{n} + \frac{(a_n-t)(a-\varepsilon)+(b_n-t)(b-\varepsilon)}{n} >$$

$$-\frac{\sigma}{n} + \left(\frac{L-\varepsilon}{L+1-\varepsilon} - \frac{t}{n}\right)(a-\varepsilon) + \left(\frac{n}{L+1+\varepsilon} - \frac{t}{n}\right)(b-\varepsilon). \tag{2}$$

(Problema nu se modifică dacă se translatează şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, adică putem presupune a, b suficient de mari astfel încât $a-\varepsilon > 0$ şi $b-\varepsilon > 0$, încât să nu fie nereguli în înmulţirea cantităţilor din (1) şi (2).)

Din (1) şi (2) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{L}{L+1}a + \frac{1}{L+1}b.$$

Dacă $L = 0$, şirul mediilor tinde la b, iar dacă $L = \infty$, tinde la a.

ERATĂ

În următoarele numere de *Recreaţii Matematice,* se vor face corecturile indicate mai jos:

2/2011,	p.147,	r.1 de jos:	pag. 75	se înlocuieşte cu	pag. 180
1/2012,	p. 24,	r.16 de jos:	(1). Punând	se înlocuieşte cu	(1), punând
		r.6 de jos:	demonstraţie	se înlocuieşte cu	O demonstraţie
		r.5 de jos:	p.	se înlocuieşte cu	20-21
	p. 33,	r.1 de jos:	pag. 35	se înlocuieşte cu	pag.37
	p. 37,	r.6 de jos:	pag.31	se înlocuieşte cu	pag.33
2/2012,	p.127,	r.6 de jos:	geometric	se înlocuieşte cu	Geometric
2/2013,	p.164,	r.8 de sus:	44 de fructe	se înlocuieşte cu	74 de fructe.