Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2013

Clasele primare

P.269. *Şapte forme geometrice sunt aşezate astfel:* □ □ △ ▭ ▭ ▭ ▭ *Mutaţi trei forme astfel încât în şirul obţinut triunghiul să fie la mijloc, iar pătratele să fie de o parte şi de alta a lui.*

(*Clasa I*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

Soluţie. Mutăm două dreptunghiuri în faţa triunghiului, iar un pătrat după triunghi.

P.270. *Afaţi numerele naturale a şi b astfel încât $a - 26 = 4 - b$.*

(*Clasa I*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

Soluţie. 1) $b = 4 \Rightarrow a - 26 = 0 \Rightarrow a = 26$; 2) $b = 3 \Rightarrow a - 26 = 1 \Rightarrow a = 27$; 3) $b = 2 \Rightarrow a - 26 = 2 \Rightarrow a = 28$; 4) $b = 1 \Rightarrow a - 26 = 3 \Rightarrow a = 29$; 5) $b = 0 \Rightarrow a - 26 = 4 \Rightarrow a = 30$.

P.271. *Din cei 28 elevi ai unei clase, 25 îndrăgesc fotbalul şi 24 tenisul. Fiecare dintre elevi îndrăgeşte cel puţin un sport. Câţi elevi îndrăgesc un singur sport?*

(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numai fotbalul este îndrăgit de $28 - 24 = 4$ elevi, iar numai tenisul de $28 - 25 = 3$ elevi. Un singur sport este îndrăgit de $4 + 3 = 7$ elevi.

P.272. *În trei cutii sunt 80 de nasturi. Câţi nasturi sunt în fiecare cutie, dacă în primele două cutii sunt 64 nasturi, iar în ultimele două 41?*

(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. În a treia cutie sunt $80 - 64 = 16$ nasturi, în prima $80 - 41 = 39$ nasturi, iar în a doua cutie $80 - (16 + 39) = 80 - 55 = 25$ nasturi.

P.273. *Există 12 numere mai mari ca zero, pare, diferite între ele şi care să aibă suma 154?*

Soluţie. Suma primelor 12 numere pare, nenule, este 156. Oricare alte 12 numere pare consecutive, nenule, au suma mai mare, deci nu există numere ca în enunţ.

P.274. *Într-o urnă sunt 34 de jetoane, pe fiecare fiind scris un număr; există jetoane cu numere de parităţi diferite. După ce s-au scos mai mult de 14 jetoane cu numere pare, în urnă au rămas tot atâtea jetoane cu numere pare. Câte jetoane cu numere impare sunt în urnă?*

(*Clasa a II-a*) **Iustina Diaconu, elevă, Iaşi**

Soluţie. În urnă putem avea $34 - (15 + 15) = 4$ jetoane cu numere impare sau $34 - (16 + 16) = 2$ jetoane cu numere impare.

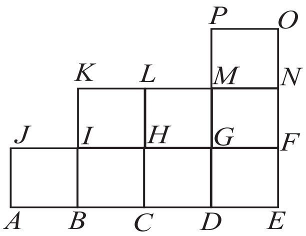
P.275. *Se dă şirul de numere* $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$ *Câte numere din şir, mai mici decât* 500*, au suma cifrelor* 18*?*
(*Clasa a III-a*) **Nicoleta Cumpătă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Singurul număr de forma $\overline{ab}$ cu suma cifrelor 18 este 99. Numerele de forma $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiţia sunt: $189, 198, 279, 288, 297, 369, 378, 387, 396, 459, 468, 477, 486, 495$. În total, vom avea 15 numere.

P.276. *Să se afle a şi b, ştiind că au loc egalităţile:* $a : 2 - 15 = b : 3$, $a + b = 90$.
(*Clasa a III-a*) **Alexandra Tololoi, elevă, Iaşi**

Soluţie. Să figurăm legătura dintre cele două numere: $c = a : 2 - 15 \Rightarrow a = 2c + 30$; $c = b : 3 \Rightarrow b = 3c$. Avem $5c + 30 = 90$, $c = 60 : 5$, $c = 12$; $b = 3 \times 12 = 36$, $a = 90 - 36 = 54$.

P.277. *În desenul alăturat, tăiaţi un număr minim de segmente, de aceeaşi lungime cu segmentul* AB*, astfel încât să nu mai rămână niciun pătrat de latură egală cu* AB.
(*Clasa a III-a*) **Maria Nastasia, elevă, Iaşi**



Soluţie. Tăind un segment, stricăm cel mult două pătrate mici. Cum trebuie să stricăm opt pătrate mici, numărul minim de segmente ce trebuie tăiate este 4. Acestea sunt: MN, GD, LH şi BI.

P.278. *Suma a patru numere naturale diferite este* S*. Dacă adăugăm* 2 *la primul număr, scădem* 2 *din al doilea număr, înmulţim cu* 2 *al treilea număr şi împărţim la* 2 *al patrulea număr, vom obţine acelaşi rezultat. Arătaţi că suma celor patru numere se împarte exact la* 9.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Notăm $t = a + 2 = b - 2 = 2 \cdot c = d : 2$. Găsim $2S = 9t$, deci S se împarte exact la 9.

P.279. *Suma a trei numere naturale nenule este zecimea produsului lor, iar suma ultimelor două este zecimea primului număr. Aflaţi suma celor* 3 *numere.*
(*Clasa a IV-a*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $a \cdot b \cdot c = 10 \cdot (a + b + c) = 10(a + a : 10) = 10a + a = 11a$, de unde $b \cdot c = 11$, deci $b + c = 12$ şi $a = 10 \cdot 12 = 120$. Obţinem $a + b + c = 120 + 12 = 132$.

P.280. *Fie* $\overline{abcde}$ *un număr cu suma cifrelor patru. Arătaţi că, dacă împărţim acest număr la trei, obţinem restul* 1.
(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gîlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. $\overline{abcde} = 9999a + 999b + 99c + 9d + a + b + c + d + e = 3(3333a + 333b + 33c + 3d) + 3 + 1 = 3(3333a + 333b + 33c + 3d + 1) + 1$, deci restul căutat este 1.

P.281. *Fie un poligon cu* 10 *laturi astfel încât oricare trei vârfuri nu se află pe aceeaşi dreaptă. Câte segmente se formează prin unirea oricăror două vârfuri nealăturate?*
(*Clasa a IV-a*) **Andreea Simion, elevă, Iaşi**

Soluţie. Fiecare vârf se poate uni cu alte 7 vârfuri care nu-i sunt alăturate. Dacă repetăm procedeul pentru fiecare vârf, atunci se obţine dublul numărului de segmente cerut în problemă. Aşadar, există $10 \times 7 : 2 = 70 : 2 = 35$ segmente.

P.282. *În* 10 *coşuri sunt mere, pere şi gutui, în total* 74 *de fructe. În fiecare coş sunt fructe de toate felurile. Să se arate că există două coşuri care au acelaşi număr de mere, două coşuri care au acelaşi număr de pere şi două coşuri care au acelaşi număr de gutui.*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Presupunem că nu există două coşuri care să aibă acelaşi număr de mere. Înseamnă că numărul minim de mere din toate coşurile este $3+4+5+\ldots+12=75$, fals, deoarece numărul total de fructe este 74. Deducem că există cel puţin două coşuri cu acelaşi număr de mere. Raţionamentul este analog pentru pere sau gutui.

Clasa a V-a

V.165. *Arătaţi că fracţia* $\dfrac{3^{n+2}\cdot 5^n+3^n\cdot 5^{n+2}-15^n}{\overline{abcabc}}$ *este reductibilă.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Observăm că $3^{n+2}\cdot 5^n+3^n\cdot 5^{n+2}-15^n=3^n\cdot 5^n(3^2+5^2-1)=3^{n+1}\cdot 5^n\cdot 11$, iar $\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot 10^3+\overline{abc}=\overline{abc}(10^3+1)=\overline{abc}\cdot 7\cdot 11\cdot 13$. Fracţia se simplifică prin 11, deci este reductibilă.

V.166. *Numerele* $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\ldots$ *se scriu succesiv în câte una din* 2013 *căsuţe dispuse circular. În momentul în care ajungem la o căsuţă ocupată, ştergem numărul deja existent şi scriem noul număr. Aflaţi suma numerelor scrise în căsuţe imediat după ce s-a scris primul* 2013.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Când scriem primul 2013, celalte 2012 numere sunt, toate, 2012. Suma acestor numere este egală cu $2012\cdot 2012+2013=4050157$.

V.167. În tabloul alăturat sunt scrise, în ordine crescătoare, toate pătratele perfecte care nu se divid cu 6. Dacă pe rândul 58 al 25-lea număr este x^2, determinaţi valoarea lui x.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 4 & & 9 & & \\ & 16 & & 25 & & 49 & \\ 64 & & 81 & & 100 & & 121 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Vlad Tuchiluş, elev, Iaşi

Soluţie. Numărând în ordinea $1,4,9,16,\ldots$ al 25-lea termen de pe rândul 58 are rangul $1+2+3+\ldots+57+25=1678$. Problema se reduce la determinarea termenului de rang 1678 din şirul $1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,\ldots$, format din numerele naturale nenule din care am exclus multipli lui 6.

Grupăm termenii şirului câte cinci; atunci a_{1678}, termenul de rang 1678, este egal cu $5k+k+r$, unde k reprezintă numărul de grupe de câte cinci numere care conţin numere mai mici sau egale cu 1678, iar $r\in\{0,1,2,3,4\}$ reprezintă numărul de numere din grupa "$k+1$" mai mici sau egale cu 1678. Găsim $k=335$, $r=3$ şi $a_{1678}=2013$.

V.168. *a) Arătaţi că numărul* 2^{2013} *nu poate fi scris ca sumă de cel puţin două numere naturale consecutive.*

b) Scrieţi numărul $3\cdot 2^{2013}$ *ca sumă de cel puţin două numere naturale consecutive. Câte asemenea modalităţi de scriere există?*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. a) Presupunem că există numerele $a,a+1,\ldots,a+n-1$ cu proprietatea cerută. Atunci $2^{2013}=a+(a+1)+\ldots+(a+n-1)$, $n\geq 2$, şi, de aici, $2^{2014}=n(2a+n-1)$. Cum $n\geq 2$ şi $2a+n-1\geq 1$ au parităţi diferite, egalitatea obţinută este imposibilă, de unde concluzia.

b) Procedând ca mai sus, obţinem ecuaţia $3 \cdot 2^{2014} = n(2a + n - 1)$, $n \geq 2$.

Dacă n este par, rezultă că $2a + n - 1$ este impar, deci egal cu 1 sau cu 3, cazuri care nu convin. Prin urmare n este impar, deci egal cu 3. Atunci $2a + n - 1 = 2^{2014}$, aşadar $a = 2^{2013} - 1$. Rezultă că $3 \cdot 2^{2013}$ poate fi scris într-un singur mod sub forma cerută, anume $3 \cdot 2^{2013} = (2^{2013} - 1) + 2^{2013} + (2^{2013} + 1)$.

V.169. *Demonstraţi că numărul* $N = 2^{2^{2013}} + 27$ *se divide cu* 31.

Tamara Culac, Iaşi

Soluţie. Observăm că $2^{2013} = 2 \cdot 16^{503} = 2(M_5 + 1)^{503} = 2(M_5 + 1) = M_5 + 2$, prin urmare $N = 2^{5k+2} + 27 = 32^k \cdot 4 + 27 = 4(31 + 1)^k + 27 = 4(M_{31} + 1) + 27 = M_{31} + 31 = M_{31}$.

V.170. *Într-o urnă sunt* 68 *de bile. Două persoane joacă următorul joc: fiecare, alternativ, scoate din urnă între una şi cinci bile, până când urna se goleşte. Câştigă cel care a scos ultimul trei bile deodată. Care dintre cei doi jucători are strategie de câştig?*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Fie A jucătorul care începe jocul şi B adversarul. Arătăm că nici A, nici B nu au strategie de câştig. Pentru aceasta, arătăm că fiecare jucător are strategie să nu piardă jocul. Pentru început, să dovedim că B are strategie să nu piardă jocul.

număr de bile extrase de A	a_1	a_2	$\ldots$	a_{10}	a_{11}
număr de bile extrase de B	$6 - a_1$	$6 - a_2$	$\ldots$	$6 - a_{10}$	$6 - a_{11}$

După 11 runde, indiferent cum joacă A, sunt extrase 66 bile şi rămân două bile. Dacă dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ măcar unul este egal cu 3, atunci B câştigă jocul ($a_i = 3 \Rightarrow 6 - a_i = 3$). Prin urmare, B câştigă sau face remiză.

Să arătăm că şi A are strategie să nu piardă jocul.

număr de bile extrase de A	1	$6 - a_1$	$6 - a_2$	$\ldots$	$6 - a_{10}$	$6 - a_{11}$
număr de bile extrase de B	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{11}	1

După 12 runde se extrag $1 + 66 + 1 = 68$ bile. Dacă printre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ măcar unul este egal cu 3, A câştigă jocul ($a_1 = 3 \Rightarrow 6 - a_i = 3$); oricum, el nu pierde.

Observăm că A are strategie pentru remiză dacă începe extragând una sau două bile. Dacă A începe jocul extrăgând $3, 4$ sau 5 bile, atunci B are strategie de câştig:

număr de bile extrase de A	a	a_1	a_2	$\ldots$	a_{10}
număr de bile extrase de B	3	$6 - a_1$	$6 - a_2$	$\ldots$	$6 - a_{10}$

După 11 runde sunt extrase $a + 3 + 60 = 63 + a \in \{66, 67, 68\}$. Rămân $0, 1$ sau 2 bile, care nu mai influenţează rezultatul jocului. B câştigă jocul (dacă există $a_i = 3$ atunci $6 - a_i = 3$).

V.171. *Considerăm numărul* $n = 1\square 2\square 3\square \ldots \square 9$, *unde în fiecare pătrăţel se află unul dintre semnele „$\cdot$" sau „:". Ştiind că* n *este număr natural, arătaţi că este par şi cel puţin egal cu* 70.

Radu Miron, elev, Iaşi

Soluţie. După efectuarea calculelor, fără a face simplificări, $n = \dfrac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9 = 9!$. Rezultă că $nb^2 = 9!$. Cum $5|9!$ şi $5^2 \nmid 9!$, deducem că $5|n$. Analog, $7|n$. De asemenea, deoarece $2^7|9!$ şi $2^8 \nmid 9!$, deducem că $2|n$. Cum $2, 5$ şi 7 sunt două câte două prime între ele, $2 \cdot 5 \cdot 7|n$, prin urmare n este par şi cel puţin egal cu 70.

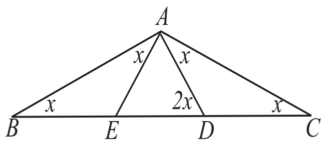
Succesiunea de operaţii $1 \cdot 2 : 3 : 4 \cdot 5 : 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ conduce la rezultatul $n = 70$.

Clasa a VI-a

VI.165. *Se consideră un triunghi isoscel ABC, $AB = AC$, cu proprietatea că există punctul D pe latura BC astfel încât $BD = 2DC$ şi $m(\widehat{BAD}) = 90°$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Deoarece D este pe latura BC a triunghiului ABC, în mod necesar $m(\widehat{BAC}) > 90°$. Fie E mijlocul segmentului BD; atunci $BE = ED = DC$. Cum triunghiul ABD este dreptunghic, iar AE este mediană, rezultă că $AE = BE = ED$. Obţinem că triunghiul AEB este isoscel. Notăm $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ABE}) = x$. Deoarece $\triangle ADC \equiv \triangle AEB$ (L.U.L), deducem $m(\widehat{ADC}) = 180° - 2x$ şi apoi $m(\widehat{ADB}) = 2x$. Folosind triunghiul dreptunghic ABD găsim $x + 2x = 90°$, deci $x = 30°$. Prin urmare, unghiurile triunghiului ABC au măsurile egale cu $30°$; $30°$ şi $120°$.

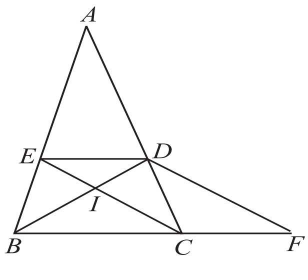


VI.166. *Se consideră triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, şi fie D şi E picioarele bisectoarelor din B, respectiv C. Punctul F este astfel încât $DF \| CE$, $DF = BD$, iar E şi F sunt separate de AC. Demonstraţi că punctele B, C şi F sunt coliniare.*

Ion Pătraşcu, Craiova

Soluţia 1 (**Boghian Vlăduţ**, elev, Roşiori (Bacău)). Notăm $\{I\} = BD \cap CE$. În $\triangle BIC$ avem: $m(\widehat{BIC}) = 180° - \dfrac{B}{2} - \dfrac{C}{2} = 180° - B$. Deoarece $DF \| CE$, obţinem că $m(\widehat{BDF}) = m(\widehat{BIC}) = 180° - B$. Deoarece $\triangle BDF$ este isoscel, obţinem că $m(\widehat{DBF}) = \dfrac{1}{2}(180° - m(\widehat{BDF})) = \dfrac{B}{2}$. Cum avem şi $m(\widehat{DBC}) = \dfrac{B}{2}$, rezultă că punctele B, C şi F sunt coliniare.

Soluţia 2. Cum triunghiul ABC este isocel, avem că $BD = CE$; atunci $DF = CE$ şi, cum $\widehat{CDF} \equiv \widehat{DCE}$ (alterne interne), obţinem că $\triangle DCF \equiv \triangle CDE$ (L.U.L.). Deducem că $\widehat{DCF} \equiv \widehat{CDE}$, prin urmare $CF \| DE$. Pe de altă parte, triunghiul AED este isoscel şi atunci $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{B}) = \dfrac{1}{2}(180° - m(\widehat{A}))$, deci $DE \| BC$. Din axioma paralelelor, rezultă coliniaritatea punctelor B, C şi F.



VI.167. *Arătaţi că nu există numere prime de trei cifre, având produsul acestor cifre egal cu 210.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Dacă un număr $\overline{abc}$ are proprietatea că $a \cdot b \cdot c = 210 = 5 \cdot 6 \cdot 7$, atunci cifrele a, b, c nu pot fi decât $5, 6, 7$, eventual în altă ordine. În fiecare caz, suma cifrelor numărului este 18, deci numărul se divide cu 9. Rezultă că $\overline{abc}$ nu este prim.

VI.168. *Demonstraţi că numărul* $A = \dfrac{1}{1007} + \dfrac{1}{1008} + \ldots + \dfrac{1}{2013}$ *nu este natural.*

Doina Stoica şi Mircea Stoica, Arad

Soluţie. Deoarece $\dfrac{1}{1007} > \dfrac{1}{1008} > \ldots > \dfrac{1}{2013}$, rezultă că $A < \dfrac{1}{1007} \cdot 1007 = 1$. Prin urmare $0 < A < 1$, deci $A \notin \mathbb{N}$.

VI.169. *Fie* $a \in \mathbb{N}^*$ *şi numărul* $n = a^2 + a^3 + \ldots + a^{2013}$. *Demonstraţi că numărul* $\dfrac{a+n}{1+a+a^2} - \dfrac{n}{1+a+a^2+a^3}$ *este natural nenul.*

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluţie. Deoarece $1 + a + a^2 + a^3 > 1 + a + a^2$, avem că $\dfrac{n}{1+a+a^2+a^3} < \dfrac{n}{1+a+a^2} < \dfrac{n+a}{1+a+a^2}$, deci $A = \dfrac{a+n}{1+a+a^2} - \dfrac{n}{1+a+a^2+a^3} > 0$.

Observăm că $a + n = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{2013} = a(1 + a + a^2) + a^4(1 + a + a^3) + \ldots + a^{2011}(1 + a + a^2)$ şi, de aici, $\dfrac{a+n}{1+a+a^2} = a + a^4 + \ldots + a^{2011} \in \mathbb{N}$. De asemenea, $n = a^2(1 + a + a^2 + a^3) + a^6(1 + a + a^2 + a^3) + \ldots + a^{2010}(1 + a + a^2 + a^3)$, aşadar $\dfrac{n}{1+a+a^2+a^3} = a^2 + a^6 + \ldots + a^{2010} \in \mathbb{N}$. Prin urmare, A este număr întreg strict pozitiv, deci $A \in \mathbb{N}^*$.

VI.170. *Stabiliţi care este cel mai mare număr de numere prime care pot fi găsite printre* 15 *numere naturale consecutive.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Fie numerele consecutive $p + 1, p + 2, \ldots, p + 15$, $p \in \mathbb{N}$. Pentru $p \in \{0, 1, 2\}$ se verifică faptul că şirul considerat conţine, în fiecare caz, şase numere prime.

Fie $p \geq 3$. Şirul considerat conţine cel mult opt numere impare consecutive, dintre care cel puţin două sunt divizibile cu 3 şi strict mai mari decât 3. Prin urmare, şirul considerat poate conţine cel mult şase numere prime. În concluzie, cel mai mare număr de numere printre 15 numere consecutive este şase.

VI.171. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale* a *cu proprietatea că* a *şi* $a + 1$ *sunt, fiecare, suma a câte trei pătrate perfecte nenule.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Ecuaţia $x^2 + y^2 = z^2$ au o infinitate de soluţii numere naturale nenule (de exemplu, $x = 3k$, $y = 4k$, $z = 5k$, $k \in \mathbb{N}^*$).

Dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluţie a ecuaţiei $x^2 + y^2 = z^2$, atunci $a = x_0^2 + y_0^2 + t^2$, $t \in \mathbb{N}^*$, satisface cerinţa problemei, deoarece $a + 1 = x_0^2 + y_0^2 + t^2 + 1 = z_0^2 + t^2 + 1^2$.

Clasa a VII-a

VII.165. *Fie* a, x, y *numere reale strict pozitive cu proprietatea că* $x(y - a) \geq y(a - x)$. *Demonstraţi că* $a^2 \leq xy$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

Soluţie. Condiţia dată este echivalentă cu $2xy \geq a(x+y)$. Deoarece $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, obţinem $2xy \geq a(x+y) \geq 2a\sqrt{xy}$ şi, cum $x, y > 0$, rezultă că $\sqrt{xy} \geq a$, deci $xy \geq a^2$.

VII.166. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\frac{x^2+4x+4+8y}{z} + \frac{y^2+4y+4+8z}{x} + \frac{z^2+4z+4+8x}{y} \geq 48.$$

Bogdan Chiriac, Bacău

Soluţie. Cum $u^2 + 4 \geq 4u$, $\forall u > 0$, rezultă că $\dfrac{x^2+4x+4+8y}{z} \geq 8\left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}\right)$ şi încă două relaţii similare.

Sumând aceste inegalităţi, membrul stâng este cel puţin egal cu

$$8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 8\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + 8\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 48,$$

deoarece $\dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u} \geq 2$, pentru orice $u, v > 0$.

VII.167. *Dacă ecuaţia $|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2013| = y(y+1)$ are o singură soluţie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, calculaţi $x_0 + y_0$.*

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţie. Observăm că dacă (x_0, y_0) este soluţie, atunci şi $(2014 - x_0, y_0)$ este soluţie. Din unicitatea soluţiei, în mod necesar, $x_0 = 2014 - x_0$, deci $x_0 = 1007$. Pentru $x = 1007$, obţinem că $1006 + 1005 + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + 1006 = y(y+1) \Leftrightarrow 1006 \cdot 1007 = y(y+1)$. Cum $y > 0$, rezultă că $y_0 = 1006$, aşadar $x_0 + y_0 = 2013$.

VII.168. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Arătaţi că există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $n^2 + k^2$ să nu fie pătrat perfect, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k > p$.*

Marian Panţiruc, Iaşi

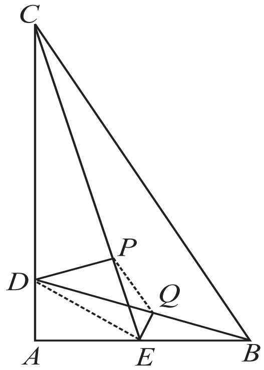
Soluţia 1. Alegem $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2 \leq 2p+1$; cum $k^2 < n^2+k^2 \leq 2p+1+k^2 < 2k+1+k^2 = (k+1)^2$, rezultă că $n^2 + k^2$ nu este pătrat perfect.

Soluţia 2. Considerăm ecuaţia $n^2 + k^2 = x^2$, cu necunoscutele $x, k \in \mathbb{N}$. Punând ecuaţia sub forma $(x-k)(x+k) = n^2$, deducem că aceasta are un număr finit de soluţii (deoarece n este fixat). Prin urmare, pentru k suficient de mare, ecuaţia nu are soluţie, deci $n^2 + k^2$ nu este pătrat perfect.

VII.169. *Fie D piciorul bisectoarei din A în triunghiul ABC. Cercul de diametru AD intersectează a doua oară laturile AB şi AC în mijloacele lor. Ce particularitate are triunghiul ABC? Dar raza cercului?*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Fie M, N mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Deoarece $[AD]$ este diametrul cercului considerat, $m(\widehat{DMA}) = 90°$. Prin urmare, în triunghiul ADB, DM este mediană şi înălţime; rezultă că acesta este isocel cu $AD = DB$. Analog, $AD = DC$. Obţinem că $BD = DC = AD$ şi, de aici, faptul că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel. Raza cercului este $R = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{4}BC$.



VII.170. *Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Punctele D, E, P şi Q se află pe segmentele AC, AB, CE, respectiv BD, astfel încât $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACE}$, $DP \perp CE$ şi $EQ \perp BD$.*

a) Demonstraţi că punctele A, D, E, P şi Q sunt conciclice.

b) Arătaţi că $DEQP$ este trapez dacă şi numai dacă $AB = AC$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. a) Triunghiurile dreptunghice AED, DPE, DEQ au ipotenuza DE comună, prin urmare punctele A, D, E, P şi Q sunt situate pe cercul de diametru DE.

b) Deoarece $DP \nparallel EQ$ (fiind perpendiculare pe două drepte secante), dacă $DPQE$ este trapez, atunci $DE \| PQ$. Cum $DPQE$ este şi inscriptibil, rezultă că $DP = QE$. Din congruenţa triunghiurilor CDP şi BEQ (C.U.), obţinem că $DC = EB$. De asemenea, $\widehat{ADE} \equiv \widehat{AED}$ (suplemente de unghiuri congruente), deci $AD = AE$. În concluzie, dacă $DEQP$ este trapez, atunci $AB = AC$.

Reciproc, dacă $AB = AC$, rezultă $AE = AD$ şi $EB = DC$. Deducem $\widehat{EDQ} \equiv \widehat{PED}$ (ca diferenţă de unghiuri congruente) şi, folosind faptul că $DEQP$ este inscriptibil, rezultă că $DE \| PQ$, deci $DEQP$ este trapez.

VII.171. *Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC, cu unghiul $\widehat{A}$ ascuţit. Perpendiculara în M pe BC taie dreapta AC în punctul N. Demonstraţi că $MN \cdot \sin A + MC \cdot \cos A \leq CN$. Când se atinge egalitatea?*

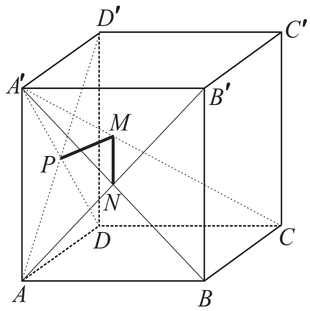
Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Folosim inegalitatea $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$, pentru orice $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Atunci: $(MN \sin A + MC \cos A)^2 \leq (MN^2 + MC^2)(\sin^2 A + \cos^2 A) = NC^2$ şi, de aici, inegalitatea cerută.

Egalitatea se atinge dacă $\dfrac{MN}{\sin A} = \dfrac{MC}{\cos A} \Leftrightarrow \dfrac{MN}{MC} = \dfrac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \Leftrightarrow A = C$, deci când triunghiul ABC este isoscel de bază AC.

Clasa a VIII-a



VIII.165. *Fie N şi P centrele feţelor $ABB'A'$, respectiv $ADD'A'$ ale unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă există un punct M pe diagonala $(A'C)$, diferit de mijlocul acesteia, cu proprietatea că $MN \perp AB'$ şi $MP \perp AD'$, arătaţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.*

Ştefan Dominte, elev, Iaşi

Soluţie. Deoarece $AB' \perp BC$ (din $BC \perp (ABB')$), $AB' \perp MN$, iar dreptele MN şi BC sunt coplanare secante (deoarece M nu este mijlocul lui $A'C$), rezultă că

$AB' \perp (A'BC)$. Obţinem că $AB' \perp A'B$, deci $ABB'A'$ este pătrat. Analog, din $MP \perp AD'$ deducem că $ADD'A'$ este pătrat. Rezultă că $AB = AD = AA'$, deci $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

VIII.166. *Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are muchia bazei $AB = a$ şi înălţimea $VO = h$. Determinaţi raza sferei înscrisă în piramidă.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $r = \dfrac{3V}{A_t}$, $V = \dfrac{a^2h}{3}$ şi $A_t = a^2 + a\sqrt{4h^2+a^2}$, rezultă că $r = \dfrac{ah}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}$.

VIII.167. *Determinaţi numerele întregi k pentru care numărul $n = k^4 + 8k^3 - 35k^2 - 24k + 161$ este natural prim.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Observăm că $n = (k^2 - 5k + 7)(k^2 + 13k + 23)$. Dacă n este prim, în mod necesar unul dintre cei doi factori este egal cu 1 sau -1; obţinem $k \in \{2, 3, -11, -2\}$. Prin verificare, n este prim numai pentru $k = 2$ sau $k = 3$.

VIII.168. *Se consideră sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx^2 + dy^2 = \beta \end{cases}, \quad a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

Arătaţi că sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $\dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{d} = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$. Aflaţi soluţia sistemului în acest caz.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Din prima ecuaţie avem $y = \dfrac{1}{b}(\alpha - ax)$, care, introdus în a doua ecuaţie, conduce la

$$(b^2c + a^2d)x^2 - 2ad\alpha x + d\alpha^2 - b^2\beta = 0.$$

Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă ecuaţia de gradul al doilea obţinută are soluţie unică. Această condiţie revine la $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2d^2\alpha^2 - (b^2c + a^2d)(d\alpha^2 - b^2\beta) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{d} = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$. În acest caz, soluţia sistemului este $x = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{\beta}{\alpha}$; $y = \dfrac{b}{d} \cdot \dfrac{\beta}{\alpha}$.

VIII.169. *Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Conform inegalităţii $C - B - S$, avem

$$\sum \frac{a}{b^2+c^2} = \sum \frac{a^2}{ab^2+ac^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum(ab^2+ac^2)}.$$

Rămâne să arătăm că

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

După efectuarea calculelor, această inegalitate este echivalentă cu $2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2 \geq 0$, evident adevărată. Egalitatea se obţine pentru $a=b=c$.

VIII.170. *Fie $m \in \mathbb{N}$ şi numerele reale a şi b cu $a+b \geq 0$. Arătaţi că $a^{2m+1}+b^{2m+1} \geq a^m b^m (a+b)$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Inegalitatea din enunţ se scrie sub forma $(a^m-b^m)(a^{m+1}-b^{m+1}) \geq 0$; demonstrăm această inegalitate.

1. Dacă $a=0$ sau $b=0$, inegalitatea este evidentă.

2. Dacă $a>0$ şi $b>0$, cum numerele a^m-b^m şi $a^{m+1}-b^{m+1}$ au acelaşi semn, rezultă concluzia.

3. Dacă $a>0$ şi $b<0$, notăm $b=-c$, deci $c>0$ şi $a-c \geq 0$. Pentru m par, $a^m-b^m=a^m-c^m \geq 0$ şi $a^{m+1}-b^{m+1}=a^{m+1}+c^{m+1}>0$, iar pentru m impar, $a^m-b^m=a^m+c^m>0$ şi $a^{m+1}-b^{m+1}=a^{m+1}-c^{m+1} \geq 0$. Rezultă că $(a^m-b^m)(a^{m+1}-b^{m+1}) \geq 0$ şi în acest caz.

Egalitatea se obţine pentru $a=b \geq 0$.

VIII.171. *Demonstraţi că nu există numere naturale nenule a, b şi c pentru care $a(a^2b^2+1)=c^2$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Presupunem că există a, b, c cu proprietatea cerută. Cum a şi a^2b^2+1 sunt numere prime între ele iar produsul lor este un pătrat perfect, rezultă că fiecare este pătrat perfect. Prin urmare, există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a=x^2$, $a^2b^2+1=y^2$, $c=xy$.

Dar $a^2b^2+1=y^2 \Leftrightarrow (y-ab)(y+ab)=1 \Leftrightarrow y-ab=1$, $y+ab=1 \Leftrightarrow y=1$, $ab=0$, imposibil. Contradicţia obţinută rezolvă problema.

Notă. De fapt, am demonstrat că soluţiile ecuaţiei $a(a^2b^2+1)=c^2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sunt $a=k^2$, $b=0$, $c=k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Clasa a IX-a

IX.141. *Dacă a, b, c, d sunt numere reale pozitive, arătaţi că*

$$\frac{a+b^2+c^4+4}{d}+\frac{b+c^2+d^4+4}{a}+\frac{c+d^2+a^4+4}{b}+\frac{d+a^2+b^4+4}{c} \geq 28.$$

Cătălin Cristea, Craiova

Soluţie. Deoarece $u^2 \geq 2u-1$ şi $v^4 \geq 2v^2-1 \geq 4v-3$, pentru orice $u, v \in \mathbb{R}$, obţinem că

$$\frac{a+b^2+c^4+4}{d} \geq \frac{a+2b+4c}{d} = \frac{a}{d}+2\frac{b}{d}+4\frac{c}{d}.$$

Scriind încă trei inegalităţi similare, prin adunarea acestora membru cu membru, membrul stâng al inegalitaţii date va fi cel puţin egal cu

$$\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+2\left(\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}+\frac{a}{c}\right)+4\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 28,$$

deoarece fiecare paranteză este cel puţin egală cu 4.

Egalitatea se obţine dacă $a=b=c=d=1$.

IX.142. *Determinaţi funcţiile* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *cu proprietatea că*

$$f(x^4-y^4)=(x-y)(x^2+y^2)(f(x)+f(y)),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ion Nedelcu, Ploieşti

Soluţie. Fie f o funcţie cu proprietatea dată. Atunci, pentru $x=y$, obţinem $f(0)=0$; pentru $x=-1$ şi $y=0$, deducem că $f(-1)=-f(1)$.

Apoi, pentru $x\in\mathbb{R}$ şi $y=1$, $f(x^4-1)=(x-1)(x^2+1)(f(x)+f(1))$, iar pentru $x\in\mathbb{R}$ şi $y=-1$, $f(x^4-1)=(x+1)(x^2+1)(f(x)+f(-1))$. Folosind şi $f(-1)=-f(1)$, găsim că $(x-1)(f(x)+f(1))=(x+1)(f(x)-f(1))$ şi, de aici, $f(x)=xf(1)$. Prin urmare, $f(x)=kx$, $k\in\mathbb{R}$, funcţii ce verifică relaţia din enunţ.

IX.143. *Rezolvaţi în* $\mathbb{R}^3$ *sistemul*

$$\begin{cases} x+y=-1\\ x^2+y^2+2x^2y^2\sin z=1\\ x^3+y^3-x^6y^6\sin^3 z=1.\end{cases}$$

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Avem: $x^2y^2\sin z=xy$; $x^6y^6\sin^3 z=3xy-2$. Prin urmare, $(xy)^3=3xy-2$ şi, de aici, $xy=1$ sau $xy=-2$.

Obţinem sistemele: (i) $xy=1$, $x+y=-1$, $\sin z=1$, care nu are soluţii reale şi (ii) $xy=-2$, $x+y=-1$, $\sin z=-\dfrac{1}{2}$, cu soluţiile $(-2,1,z_k)$ şi $(1,-2,z_k)$, unde $z_k=(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$.

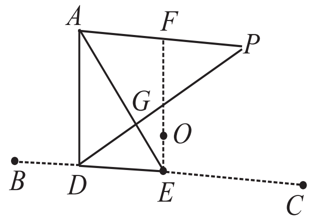
IX.144. *Se consideră triunghiul ADE, dreptunghic în D, şi triunghiul DAP, dreptunghic în A, astfel încât* $(AE)\cap(DP)=\{G\}$ *şi* $2DE=AP$.

a) Arătaţi că există o infinitate de triunghiuri ABC în care AE este mediană, iar AD este înălţime.

b) Demonstraţi că cercurile circumscrise tuturor triunghiurilor ABC trec prin punctul P.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă Blaj

Soluţie. a) Considerăm B şi C pe dreapta DE, simetrice faţă de E. Triunghiul ABC verifică cerinţele problemei. Cum B şi C pot fi alese într-o infinitate de moduri, problema are o infinitate de soluţii.



b) Fie ABC unul dintre triunghiurile ce verifică cerinţa de la a) şi O centrul cercului circumscris acestuia; atunci $OE\perp BC$ (deoarece E este mijlocul lui BC). Rezultă că

$OE \perp AP$ (deoarece $AB \| BC$) şi fie F intersectia dreptei OE cu AP. Deoarece $FP = AP - AF = 2DE - DE = DE = AF$, deducem că F este mijlocul lui AP. Astfel, $OA = OP$, de aici, rezultă că cercul circumscris triunghiului ABC trece prin P.

IX.145. *Demonstraţi că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea* $\dfrac{h_a}{i_a} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$, *unde h_a şi i_a reprezintă lungimile înălţimii, respectiv bisectoarei din A.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Deoarece $h_a = \dfrac{2S}{a}$ şi $i_a = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$, inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{2S}{a} \cdot \dfrac{b+c}{2\sqrt{bc}\sqrt{p(p-a)}} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$. Înlocuind $R = \dfrac{abc}{4S}$ şi $r = \dfrac{S}{p}$, acesta devine, după câteva transformări,

$$(b+c)^2 \geq 8a(p-a) \Leftrightarrow (2p-a)^2 \geq 8a(p-a) \Leftrightarrow (2p-3a)^2 \geq 0,$$

cu egalitate dacă $2p - 3a = 0$, deci $b + c = 2a$.

Notă. Autorul dă o soluţie geometrică problemei: consideră A_1 piciorul bisectoarei din A şi A' intersecţia dreptei AA_1 cu cercul circumscris. Dacă I este centrul cercului înscris, stabileşte relaţia

$$\frac{h_a}{i_a} = \frac{AA'}{2R} = \frac{AI + IA'}{2} \cdot \frac{1}{R} \geq \frac{\sqrt{AI \cdot IA'}}{R}.$$

Cum $AI \cdot IA' = \rho(I) = R^2 - OI^2 = 2Rr$, rezultă concluzia problemei. Egalitatea se obţine dacă $AI = IA' \Leftrightarrow OI \perp AA_1$.

Clasa a X-a

X.141. *Rezolvaţi ecuaţia* $2013^{x^3} + \log_{2013} x = 2013^{x^2}$.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Aurel Chiriţă, Slatina

Soluţie. Observăm că $x = 1$ este soluţie. Dacă $x > 1$, atunci $x^3 > x^2$ şi $\log_{2013} x > 0$, deci $2013^{x^3} + \log_{2013} x > 2013^{x^2}$. Dacă $x \in (0,1)$, $x^3 < x^2$ şi $\log_{2013} x < 0$, deci $2013^{x^3} + \log_{2013} x < 2013^{x^2}$. Prin urmare, $x = 1$ este soluţie unică a ecuaţiei date.

X.142. *Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe distincte, de modul 1, astfel încât $z_1z_2z_3 = (z_1 + z_2 + z_3)(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$. Arătaţi că cele trei numere sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.*

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Dimitru Săvulescu, Bucureşti

Soluţia 1. Notăm $z_1 + z_2 + z_3 = a$, $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = b$; atunci $z_1z_2z_3 = ab$. Rezultă că z_1, z_2, z_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $t^3 - at^2 + bt - ab = 0 \Leftrightarrow (t-a)(t^2+b) = 0$. Prin urmare, $z_1 = a$ şi $z_2 + z_3 = 0$. Considerând $A(a)$, $B(z_2)$, $C(-z_2)$, deducem că $O(0)$ este mijlocul segmenului BC, deci B şi C sunt diametral opuse în cercul circumscris triunghiului ABC, aşadar aceasta este dreptunghic.

Soluţia 2 (**Necula Emanuel**, elev, Câmpulung Muscel). În condiţiile din enunţ, avem: $1 = (z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \Leftrightarrow 1 = (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3) \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 1$. Faţă de un sistem de coordonate cu originea într-un punct O, considerăm punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ (evident, $\triangle ABC$ este înscris în cercul de centru O şi rază egală cu 1. Pentru ortocentrul H al $\triangle ABC$, avem că $H(z_1+z_2+z_3)$. Din faptul că $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$, rezultă că H este pe cercul circumscris triunghiului ABC. De aici, deducem că $\triangle ABC$ este dreptunghic.

X.143. *Determinaţi numerele reale* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ *cu proprietatea că* $2013^x+1 = 2012^x + |\sin x - \cos x|$.

Sven Cortel, elev, Satu Mare

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma $2013^x - 2012^x + 1 = |\sin x - \cos x|$. Pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $2013^x < 2012^x$, deci $2013^x - 2012^x + 1 < 1$ şi $1 \le |\sin x - \cos x|$ (deoarece aceasta este echivalentă cu $\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, adevărată pentru $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$). Prin urmare, ecuaţia nu are soluţii în $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Analog, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $2013^x - 2012^x + 1 > 1 \ge |\sin x - \cos x|$, deci ecuaţia nu are soluţii în $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pentru $x \in [1, \infty)$, $2013^x - 2012^x + 1 \ge 2$ (deoarece funcţia $f(x) = 2013^x - 2012^x + 1$ este strict crescătoare), şi cum $|\sin x - \cos x| \le \sqrt{2} < 2$, ecuaţia nu are soluţie nici pe acest interval.

Evident, $x = 0$ este soluţie, prin urmare aceasta este unica soluţie a ecuaţiei date.

X.144. *Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi $MN \| BC$, $PQ \| AC$, $RS \| AB$ astfel încât $MN \cap PQ \cap RS = \{H\}$, iar punctele M, N, P, Q, R şi S sunt situate pe laturile triunghiului. Arătaţi că:*

a) $\frac{MN}{\sin A} + \frac{PQ}{\sin B} + \frac{RS}{\sin C} = 4R$;

b) $MN \cdot PQ \cdot RS \le \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

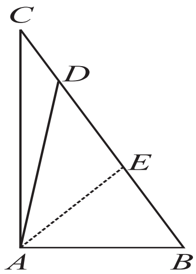
Soluţie. Folosind asemănarea triunghiurilor AMN şi ABC, deducem $\frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AA'}$, unde $\{A'\} = AH \cap BC$. De aici, $MN = BC \cdot \frac{HA}{AA'} = 2R \sin A \cdot \frac{2R \cos A}{c \sin B}$, prin urmare $\frac{MN}{\sin A} = \frac{2R \cos A}{\sin B \sin C}$. Astfel, $\Sigma \frac{MN}{\sin A} = 2R \sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C} = 4R$.

b) Folosind punctul a), $4R \ge 3\sqrt{\frac{MN \cdot PQ \cdot RS}{\sin A \sin B \sin C}}$ şi, cum $\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$, deducem egalitatea cerută.

X.145. *Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ şi $m(\widehat{B}) = 60^\circ$, iar punctele D şi E de pe latura BC sunt astfel încât AE este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$, iar $AD = CE$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{CAD}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $m(\widehat{CAD}) = 2x$; folosind teorema sinusurilor în triunghiurile CAD şi CAE, obţinem: $AD = \dfrac{AC\sin 30^\circ}{\sin(2x+30^\circ)}$, $CE = \dfrac{AC\sin(x+45^\circ)}{\sin(x+75^\circ)}$. Deoarece $AD = CE$, avem: $\dfrac{1}{2\sin(2x+30^\circ)} = \dfrac{\sin(x+45^\circ)}{\sin(x+75^\circ)} \Leftrightarrow 2\sin(2x+30^\circ)\sin(x+45^\circ) = \sin(x+75^\circ) \Leftrightarrow \cos(x-15^\circ) - \cos(3x+75^\circ) = \cos(15^\circ - x) \Leftrightarrow \cos(3x+75^\circ) = 0$ şi, cum $2x < 90^\circ$, rezultă $3x + 75^\circ = 90^\circ$, adică $x = 5^\circ$ şi $m(\widehat{CAD}) = 10^\circ$.



Clasa a XI-a

XI.141. *Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$ şi $det(A + iB) = 0$. Calculaţi determinantul matricei $A^5 + A^4B + AB^4 + B^5$, funcţie de $a = det A$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Considerăm polinomul $P(X) = \det(A + XB) = \det A + mX + X^2 \det B$, unde $m \in \mathbb{R}$. Cum $P(i) = 0$, avem $\det A - \det B + mi = 0$ şi, de aici, $\det A = \det B (= a)$ şi $m = 0$. Rezultă că $P(X) = a(1 + X^2)$. Fie $C = A^5 + A^4B + AB^4 + B^5 = (A + B)(A^4 + B^4) = (A + B)(A - x_1B)(A - x_2B)(A - x_3B)(A - x_4B)$, x_1, x_2, x_3, x_4 fiind rădăcinile ecuaţiei $x^4 + 1 = 0$. Dacă $Q(X) = X^4 + 1$, atunci $\det C = P(1)P(-x_1)P(-x_2)P(-x_3)P(-x_4) = a^5 \cdot 2(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)(1 + x_3^2)(1 + x_4^2) = 2a^5(x_1 - i)(x_2 - i)(x_3 - i)(x_4 - i)(x_1 + i)(x_2 + i)(x_3 + i)(x_4 + i) = 2a^5 \cdot Q(-i)Q(i) = 8a^5$.

XI.142. *Considerăm ecuaţia $X^2 + Y^2 + Z^2 + I_n = XY + XZ + YZ$, unde X, Y, Z sunt matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, care comută două câte două.*

a) Arătaţi că ecuaţia nu are soluţii pentru n impar.

b) Dacă n este par, arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. a) Fie n impar şi (X, Y, Z) o soluţie; considerând $\varepsilon \neq 1$ o rădăcină cubică a unităţii, avem: $X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX = (X + \varepsilon Y + \varepsilon^2 Z)(X + \overline{\varepsilon} Y + \overline{\varepsilon}^2 Z) = U \cdot \overline{U}$. Prin urmare, $\det(X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX) = \det(U \cdot \overline{U}) = \det U \cdot \overline{\det U} = |\det U|^2 \geq 0$. Rezultă că $\det(-I_n) = (-1)^n \geq 0$, fals. Rămâne că ecuaţia dată nu are soluţii pentru n impar.

b) Scirem ecuaţia sub forma $(X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2 = -2I_n$. Observăm că, dacă (X_0, Y_0, Z_0) este o soluţie, atunci $(X_0 + \alpha I_n, Y_0 + \alpha I_n, Z_0 + \alpha I_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este soluţie. Mai trebuie să determinăm o soluţie a ecuaţiei date. Cum $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ verifică ecuaţia $A^2 = -I_2$, matricea scrisă cu blocuri $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}$ verifică $B^2 = -I_n$. Deci, pentru n par, (B, O_n, O_n) este soluţie a ecuaţiei date şi de aici concluzia problemei.

XI.143. *Între unghiurile triunghiului ABC are loc relaţia $A^2 = B^2 + C^2$. Demonstraţi că $A \in \left[(\sqrt{2} - 1)\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţia 1. Triunghiul ABC există dacă sistemul $B+C=\pi-A$, $B^2+C^2=A^2$, cu necunoscutele B,C admite soluţiile în $(0,\pi)$.

Se obţine uşor $B+C=\pi-A$, $2BC=\pi^2-2A\pi$, deci B, C sunt soluţiile ecuaţiei $t^2-(\pi-A)t+\dfrac{\pi^2-2A\pi}{2}=0$. În mod necesar, $\Delta\geq 0$ şi $P>0$; rezultă că $A\in[(\sqrt{2}-1)\pi,\frac{\pi}{2})$. Pentru aceste valori ale lui A, $B=\dfrac{\pi-A-\sqrt{A^2+2A\pi-\pi^2}}{2}$, $C=\dfrac{\pi-A+\sqrt{A^2+2A\pi-\pi^2}}{2}$ sau invers şi se verifică faptul că $B,C\in(0,\pi)$.

Soluţia 2 (**Necula Emanuel**, elev, Câmpulung Muscel)**.** Cu inegalitatea dintre mediile aritmetică şi pătratică avem că $\sqrt{\dfrac{B^2+C^2}{2}}\geq\dfrac{B+C}{2}$, de unde $\sqrt{2}\sqrt{A^2}\geq\pi-A$, deci $A\geq\pi(\sqrt{2}-1)$.

Prin absurd, să presupunem că pentru un $\triangle ABC$ am avea $A\geq\dfrac{\pi}{2}$. Pentru acest triunghi, urmează că $B^2+C^2\geq\dfrac{\pi^2}{4}$ şi $B+C\leq\dfrac{\pi}{2}$. Aşadar, $C\leq\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}$, de unde $C^2\leq\dfrac{\pi^2}{4}+B^2-\pi B$ sau $B^2+C^2\leq\dfrac{\pi^2}{4}+2B^2-\pi B$. Combinând cu o inegalitate obţinută mai sus, rezultă că $\dfrac{\pi^2}{4}\leq\dfrac{\pi^2}{4}+2B^2-\pi B$, adică $B\geq\dfrac{\pi}{2}$, absurd. Deci, $A\in\left[(\sqrt{2}-1)\pi,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

XI.144. *Şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este astfel încât* $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *iar* $x_n(x_{n+1}-1)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Determinaţi limita şirului.*

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. Deoarece $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, inductiv, rezultă că $x_n\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, prin urmare şirul este corect definit. Căutăm x_n sub forma $x_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Deducem $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$, $n\in\mathbb{N}$. Rezultă $a_n=C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $C_1+C_2=a_0$, $C_1\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=a_1$. Prin urmare, $x_n=\dfrac{C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, deoarece $C_1\neq 0$ ($C_1=0\Rightarrow x_n=$ constant, fals).

XI.145. *Se consideră funcţia derivabilă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *cu* $f(a)=a$ *şi* $f(b)=b$. *Demonstraţi că oricare ar fi* $n\in\mathbb{N}^*$, *există punctele distincte* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ *astfel încât* $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\ldots+\dfrac{1}{f'(x_n)}=n$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Soluţie. Considerăm diviziunea intervalului $[a,b]$: $a<a+\dfrac{L}{n}<a+\dfrac{2L}{n}<\ldots<a+\dfrac{(n-1)L}{n}<b$, unde $L=b-a$. Cum f are proprietatea lui Darboux şi $f(a)=a$, $f(b)=b$, există numerele $c_0=a<c_1<c_2<\ldots<c_{n-1}<b=c_n$

pentru care $f(c_k) = a + \frac{k}{n}L$, $k = \overline{0, n}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe fiecare interval $[c_k, c_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, găsim $x_{k+1} \in (c_k, c_{k+1})$ astfel încât $f'(x_{k+1}) = \frac{f(c_{k+1}) - f(c_k)}{c_{k+1} - c_k} = \frac{L}{n} \cdot \frac{1}{c_{k+1} - c_k}$. Atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{L}(c_k - c_{k-1}) = \frac{n}{L}(b-a) = n$.

Clasa a XII-a

XII.141. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + 1}$, calculaţi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t)dt$ şi $\int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)}dx - \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie. Deoarece f este continuă, admite primitive. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă; atunci $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{F(x) - F(0)}{x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}$. Apoi, $\int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)}dx - \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}dx = \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = \left.\frac{f'(x)}{f(x)}\right|_0^1 = \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{1}{3}$.

XII.142. *Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$ şi funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea că $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calculaţi $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2 + 2013)(1 + f(x))}$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Facem substituţia $x = -t$ şi avem: $I = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2 + 2013)(1 + f(x))} = \int_{a}^{-a} \frac{-dt}{(t^2 + 2013)(1 + f(-t))} = \int_{-a}^{a} \frac{f(t)dt}{(t^2 + 2013)(1 + f(t))} = \int_{-a}^{a} \frac{dt}{t^2 + 2013}\left(1 - \frac{1}{1 + f(t)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2013}} \operatorname{arctg} \left.\frac{t}{\sqrt{2013}}\right|_{-a}^{a} - I$, deci $I = \frac{1}{\sqrt{2013}} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{2013}}$.

XII.143. *Calculaţi $\int (x - \sin x + \cos x)\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 - \cos x}dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Turnu Severin

Soluţie. Se observă că $\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 - \cos x} = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sqrt{2}}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prin urmare integrala de calculat se scrie sub forma $\frac{-1}{\sqrt{2}} \int (x - \sin x + \cos x)(x - \sin x + \cos x)'dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \sin x + \cos x)^2 + \mathcal{C}$.

XII.144. *Demonstraţi că nu există numere naturale n şi m astfel încât 19 să dividă $5^n + 7^m$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. În corpul $(\mathbb{Z}_{19}, +, \cdot)$, avem: $\{\widehat{7}^m | m \in \mathbb{N}\} = \{\widehat{1}, \widehat{7}, \widehat{11}\}$ şi $\{\widehat{5}^n | n \in \mathbb{N}\} = \{\widehat{1}, \widehat{4}, \widehat{5}, \widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{9}, \widehat{11}, \widehat{16}, \widehat{17}\}$.

Rezultă că $\widehat{7}^m + \widehat{5}^n \neq \widehat{0}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ şi, de aici, concluzia problemei.

XII.145. *Fie* $(A, +, \cdot)$ *inel cu* $1 \neq 0$, *având un număr impar de elemente, în care are loc implicaţia: ,,dacă* $x^2 - 2xy + y^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, *atunci* $x + y = 1 + 1 + 1 + 1$*". Dacă* $1 + 1$ *nu este divizor al lui zero, demonstraţi că* A *este izomorf cu* $\mathbb{Z}_3$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Fie $a \in A$, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Deoarece, pentru $x = a - 1$, $y = a + 1$, avem $x^2 - 2xy + y^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, rezultă că $a(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1$. Dar A are un număr impar de elemente, deci $1 + 1 \neq 0$ şi, cum A este finit şi $1 + 1$ nu este divizor al lui zero, acesta este inversabil. Rezultă că $a = (1+1)(1+1)^{-1} + (1+1)(1+1)^{-1} = 1+1$. Astfel, $A = \{0, 1, 1 + 1\}$ şi, de aici, concluzia problemei.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2013

A. Nivel gimnazial

G246. *Doi copii, A şi B, joacă un joc. Acesta se desfăşoară pe un careu format din* $a \times b$ *pătrăţele, în care* a *şi* b *sunt numere naturale impare, propuse fiecare de către unul dintre cei doi copii. Jucătorii bifează, pe rând, câte o căsuţă din careu, astfel: A începe jocul prin bifarea unui pătrăţel* (m, n), *unde* m *reprezintă linia, iar* n *coloana pătrăţelului bifat. Apoi, B bifează unul dintre pătrăţelele* $(m \pm 1, n \pm 3)$ *sau* $(m \pm 3, n \pm 1)$, *aflat în interiorul careului. De fiecare dată când un jucător vine la rând, el alege o poziţie* (p, q) *deja bifată şi are voie să bifeze una dintre poziţiile* $(p \pm 1, q \pm 3)$ *sau* $(p \pm 3, q \pm 1)$ *care este încă nebifată în careu. Pierde jucătorul care, atunci când îi vine rândul, nu mai are ce bifa.*

Demonstraţi că A are strategie de câştig.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Careul are un total de $a \cdot b$ pătrăţele, fiecare pătrăţel fiind identificat de perechea (x, y) care indică linia şi coloana pe care se află acesta. Fie $T = \dfrac{ab + 1}{2}$ numărul pătrăţelelor (x, y) cu x şi y de aceeaşi paritate.

Dacă $T = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, A va bifa primul pătrăţel într-o poziţie (x, y) cu x, y de acelaşi paritate. Astfel, B va fi obligat să bifeze tot într-o poziţie având coordonate de aceeaşi paritate şi, apoi, la fel A. Jocul continuă până la ocuparea tuturor poziţiilor cu coordonate de aceeaşi paritate. Întrucât, în acest caz, numărul acestor pătrăţele este impar, A va bifa ultimul pătrăţel şi va câştiga.

Dacă $T = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că numărul pătrăţelelor care au coordonate de parităţi diferite este impar. Procedând ca mai sus, A va bifa într-o poziţie (m, n) cu m şi n de parităţi diferite şi va câştiga.

G247. *Fie* $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \geq 6$, *şi* X, Y *două submulţimi disjuncte ale lui* A, $X \cup Y = A$, *având fiecare cel puţin trei elemente. Demonstraţi că există* $x, y \in X$, $x \neq y$ *şi* $a, b \in Y, a \neq b$, *astfel încât* $x - y = a - b$.

Gheorghe Iurea, Iaşi