Folosind imparitatea lui f, rezultă că

$$I=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\pi)f(\cos x+\sin x)dx\right)+$$
$$+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\frac{\pi}{2})f(\cos x-\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\frac{3\pi}{2})f(\cos x-\sin x)dx\right)=$$
$$=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x+\sin x)dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x-\sin x)dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $\frac{\pi}{2}-x=y$, obţinem că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x-\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x-\cos x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x-\sin x)dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x-\sin x)dx=0$ şi concluzia problemei se impune.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2012

A. Nivel gimnazial

G226. *Câte dintre numerele de trei cifre în baza* 10 *se pot scrie sub forma* $\overline{abc}+\overline{ab}+a$*?*

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie. Arătăm mai întâi că $\overline{abc}+\overline{ab}+a=\overline{def}+\overline{de}+d\Leftrightarrow\overline{abc}=\overline{def}$. Implicaţia reciprocă este evidentă, iar $111a+11b+c=111d+11e+f\Rightarrow 111|11e+f-11b-c$, $-108\le 11e+f-11b-c\le 108\Rightarrow 11e+f=11b+c\Rightarrow 11|f-c$, $-9\le f-c\le 9\Rightarrow f=c\Rightarrow e=b\Rightarrow a=d\Rightarrow\overline{abc}=\overline{def}$. Avem aşadar $9\cdot 10\cdot 10=900$ de numere distincte de forma $\overline{abc}+\overline{ab}+a$, toate cel puţin egale cu 100. Numere mai mari de 999 obţinem numai dacă $a=9$ şi b,c nu sunt ambele nule. În concluzie, există $8\cdot 10\cdot 10+1=801$ numere de această formă.

G227. *Se consideră mulţimea* $M=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{100}\right\}$. *Demonstraţi că pentru fiecare* $n\in\{3,4,\ldots,15\}$, *există o submulţime* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *a lui* M *şi o alegere convenabilă a semnelor astfel încât* $a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n=0$.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Observăm că

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0\quad(1),\quad\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=0\quad(2),\quad\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{56}=0\quad(3),$$
$$\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{90}=0\quad(4),\text{ iar }\frac{1}{12}-\frac{1}{18}-\frac{1}{24}+\frac{1}{36}-\frac{1}{72}=0\quad(5).$$

Luând (2), (1), (5), (2)+(3), (1)+(2), (2) + (5), (1)+(5), (1)+(2) +(3), (2)+(3)+(5), (1)+(2)+(5), (1)+(2)+(3)+(4), (2)+(3)+(4)+(5), (1)+(3)+(4)+(5), obţinem cerinţa problemei.

G228. *Spunem că numărul natural m are proprietatea (P) dacă există $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a+b \leq 3m$ şi $\dfrac{7m+4}{11m+2} = \dfrac{a}{b}$. Notăm cu $E(n)$ numărul elementelor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care au proprietatea (P). Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $E(n) = 2012$.*

Vlad Emanuel, Bucureşti

Soluţie. Dacă m are proprietatea (P), fracţia $\dfrac{7m+4}{11m+2}$ este reductibilă, simplificându-se cel puţin prin $\dfrac{(7m+4)+(11m+2)}{3m} = 6 + \dfrac{2}{m}$, deci există $d \geq 7$ astfel încât $d|7m+4$ şi $d|11m+2$. Dar $d|11(7m+4) - 7(11m+2)$, adică $d|30$ şi atunci $d \in \{10, 15, 30\}$. Dacă $m = 10k+r$, $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, avem că $10|(7m+4, 11m+2) \Leftrightarrow 10|(7r+4, 11r+2) \Leftrightarrow r = 8$. Analog, scriind $m = 15l + p$, cu $p \in \{0, 1, \ldots, 14\}$, obţinem că $15|(7m+4, 11m+2) \Leftrightarrow p = 8$. În plus, $30|(7m+4, 11m+2) \Leftrightarrow m - 8 \vdots 10$ şi $m - 8 \vdots 15 \Leftrightarrow m - 8 \vdots 30$.

Definim $E_{10}(n)$ ca fiind cardinalul mulţimii $\{10k + 8 | k \in \mathbb{N}, 10k + 8 \leq n\}$ şi la fel definim $E_{15}(n)$ şi $E_{30}(n)$. Din principiul includerii şi excluderii, deducem că $E(n) = E_{10}(n) + E_{15}(n) - E_{30}(n)$. Considerând $n = 30k + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, 29\}$, din cele de mai sus rezultă că $E(n) = 4k+\alpha$, unde $\alpha = 0$ dacă $r \in \{0, 1, \ldots, 7\}$; $\alpha = 1$ dacă $r \in \{8, 9, \ldots, 17\}$; $\alpha = 2$ dacă $r \in \{18, 19, \ldots, 22\}$, $\alpha = 3$ dacă $r \in \{23, 24, \ldots, 27\}$; $\alpha = 4$ dacă $r \in \{28, 29\}$. Deoarece $2012 \vdots 4$, suntem fie în situaţia $4k = 2012$, cu $r \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ şi obţinem soluţiile $n \in \{15090, 15091, \ldots, 15097\}$, fie în situaţia $4k + 4 = 2012$, cu $r \in \{28, 29\}$ şi atunci $n \in \{15088, 15089\}$. În final, avem zece soluţii: $n \in \{15088, 15089, \ldots, 15097\}$.

G229. *Se consideră numerele întregi distincte a, b, c şi d, cu proprietatea că $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 500$. Demonstraţi că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 340$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a < b < c < d$; atunci $b - a \geq 1$, $c - a \geq 2$, $d - a \geq 3$, $c - b \geq 1$, $d - b \geq 2$ şi $d - c \geq 1$, prin urmare $(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (c-b)^2 + (d-b)^2 + (d-c)^2 \geq 20$. Rezultă de aici că $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 20 \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 1000$, de unde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq \dfrac{1020}{3} = 340$.

G230. *Arătaţi că $\dfrac{x}{y^3 + z^3 - 10} + \dfrac{y}{z^3 + x^3 - 10} + \dfrac{z}{x^3 + y^3 - 10} \leq \dfrac{1}{4}$, $\forall x, y, z \in [-1, 0)$.*

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

Soluţie. Folosind faptul că $y^3 + z^3 - 10 \leq x^3 + y^3 + z^3 - 9$, $\forall x, y, z \in [-1, 0)$ şi analoagele, rezultă că $\sum \dfrac{x}{y^3 + z^3 - 10} \leq \dfrac{x + y + z}{x^3 + y^3 + z^3 - 9}$, $\forall x, y, z \in [-1, 0)$. Rămâne să arătăm că $\dfrac{x + y + z}{x^3 + y^3 + z^3 - 9} \leq \dfrac{1}{4}$, $\forall x, y, z \in [-1, 0)$; această inegalitate revine la $4x+4y+4z \geq x^3+y^3+z^3-9$, adică $\sum(-x^3+4x+3) \geq 0$, altfel spus $\sum(x+1)(-x^2+x+3) \geq 0$, ceea ce este adevărat ($x+1 \geq 0$ şi $-x^2+x+3 = (1+x)(1-x)+(1+x)+1 \geq 1$, $\forall x \in [-1, 0)$).

G231. *Arătaţi că oricum am aşeza* 2012 *puncte în interiorul unui triunghi echilateral de latură* 2012, *există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele să fie mai mică decât* 46.

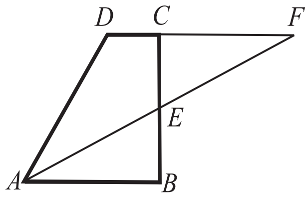
Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Împărţim fiecare latură în câte 44 de segmente egale şi, prin punctele obţinute, ducem paralelele la laturi. Obţinem astfel $1+3+5+\ldots+(44\cdot 2-1)=44^2=1936$ triunghiuri echilaterale cu latura $\dfrac{2012}{44}=45,73\ldots<46$. Conform principiului cutiei, vor exista două puncte în interiorul unui acelaşi astfel de triunghi, de unde cerinţa problemei.

G232. *Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $AB\|CD$, $m(\widehat{B})=90^\circ$ şi $AB=BC=a$. Notăm cu E mijlocul segmentului BC. Demonstraţi că AE este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ dacă şi numai dacă $CD=\dfrac{a}{4}$.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Fie $CD=x$ şi $\{F\}=AE\cap CD$; atunci $\triangle CEF\equiv\triangle BEA$ (C.U.), deci $CF=AB=a$. Avem: $\widehat{DAE}\equiv\widehat{EAB}\Leftrightarrow\widehat{DAE}\equiv\widehat{DFE}\Leftrightarrow DA=DF\Leftrightarrow\sqrt{(a-x)^2+a^2}=a+x\Leftrightarrow 2a^2-2ax+x^2=a^2+2ax+x^2\Leftrightarrow 4ax=a^2\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{4}$.

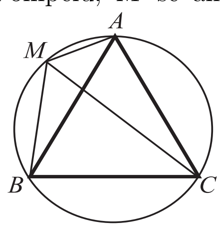


Notă. Dacă $AB=a$ şi $BC=b$ atunci, în ipoteza problemei, AE este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ dacă şi numai dacă $CD=\dfrac{b^2}{4a}$; demonstraţia este analoagă celei de mai sus.

G233. *Determinaţi punctele M din planul triunghiului echilateral ABC cu proprietatea că $MB=2MA$ şi $MC=3MA$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţia 1. Avem (*) $MC=MA+MB$, deci triunghiul construit cu segmentele $[MA]$, $[MB]$ şi $[MC]$ este degenerat. Conform teoremei lui Pompeiu, M se află pe cercul circumscris triunghiului echilateral. Tot din relaţia (*) mai rezultă că M se află pe arcul $\widehat{AB}$ ce nu conţine punctul C (teorema Van Schooten). Pe de altă parte, conform teoremei lui Pitagora generalizată aplicată în $\triangle MAB$, avem:

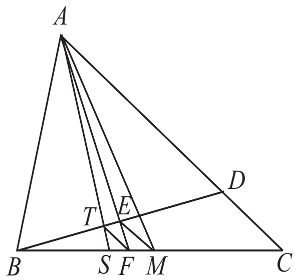


$$AB^2=MA^2+(2MA)^2+MA(2MA),$$

adică $AB^2=7MA^2$ sau $MA=AB\sqrt{\dfrac{1}{7}}$. Ultima relaţie ne conduce la un punct unic pe $\widehat{AB}$ (arc ce nu conţine vârful C) care satisface condiţiile problemei.

Soluţia 2. Considerăm în planul triunghiului reperul xoy (BC fiind axă Ox, iar perpendiculara din A pe BC axă Oy). Dacă latura triunghiului ABC este $AB=2$, atunci $C(1,0)$, $B(-1,0)$ şi $A(0,\sqrt{3})$. Considerând $M(x,y)$, obţinem sistemul $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4(x^2+(y-\sqrt{3})^2)\\(x-1)^2+y^2=9(x^2+(y-\sqrt{3})^2)\end{cases}$, cu unica soluţie $M\left(-\dfrac{5}{7},\dfrac{6\sqrt{3}}{7}\right)$.

G234. *Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$, D un punct pe latura AC astfel încât $AD = AB$ şi M mijlocul laturii BC. Paralela la AC prin M intersectează pe BD în punctul E, iar dreapta AE intersectează latura BC în punctul F. Dacă paralela prin F la AC intersectează pe BD în punctul T, demonstraţi că $\widehat{BAT} \equiv \widehat{MAC}$.*



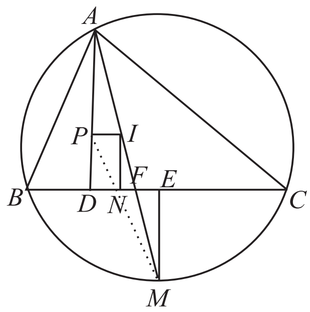
Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $\{S\} = AT \cap BC$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle BDC$ şi transversala $A - E - F$ obţinem că $\dfrac{AD}{AC} \cdot \dfrac{FC}{FB} \cdot \dfrac{EB}{ED} = 1$; dar $\dfrac{EB}{ED} = \dfrac{MB}{MC} = 1$, deci $\dfrac{FC}{FB} = \dfrac{AC}{AB}$. Aplicând din nou teorema lui Menelaus în $\triangle BDC$, dar cu transversala $A - T - S$, obţinem că $\dfrac{AD}{AC} \cdot \dfrac{SC}{SB} \cdot \dfrac{TB}{TD} = 1$. Cum $TF \| DC$, avem $\dfrac{TB}{TD} = \dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AB}{AC}$ şi relaţia precedentă conduce la $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, adică AS este simediană în $\triangle ABC$ şi deci $\measuredangle BAT = \measuredangle MAC$.

G235. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, M punctul în care bisectoarea din A retaie cercul circumscris, iar I centrul cercului înscris. Fie D piciorul înălţimii din A, iar N şi P sunt proiecţiile punctului I pe BC, respectiv AD. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Notăm cu E şi F piciorul medianei, respectiv bisectoarei din A în $\triangle ABC$; cum M este mijlocul arcului $\widehat{BC}$, avem că $EM \perp BC$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $AB < AC$. Din teorema bisectoarei obţinem că $\dfrac{IA}{IF} = \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \dfrac{b+c}{a}$. Folosind faptul că $\triangle API \sim \triangle ADF$, deducem că $\dfrac{PA}{AD} = \dfrac{DN}{DF} = \dfrac{b+c}{a+b+c}$. De aici, $DF = \dfrac{a+b+c}{a} \cdot NF$; avem $FE = BE - BF = \dfrac{a}{2} - \dfrac{ac}{b+c} = \dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}$; $NE = BE - BN = \dfrac{a}{2} - (p-b) = \dfrac{b-c}{2}$; $NF = NE - EF = \dfrac{(b-c)(b+c-a)}{2(b+c)}$, prin urmare $DF = \dfrac{(b-c)[(b+c)^2 - a^2]}{2a(b+c)}$. Din asemănarea $\triangle MEF \sim \triangle ADF$ găsim că



$$\frac{MF}{FA} = \frac{EF}{DF} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \cdot \frac{2a(b+c)}{(b-c)[(b+c)^2 - a^2]} = \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2},$$

aşadar $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{a^2}{(b+c)^2}$. Deducem că

$$\frac{PA}{PD} \cdot \frac{ND}{NF} \cdot \frac{MF}{MA} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a^2}{(b+c)^2} = 1$$

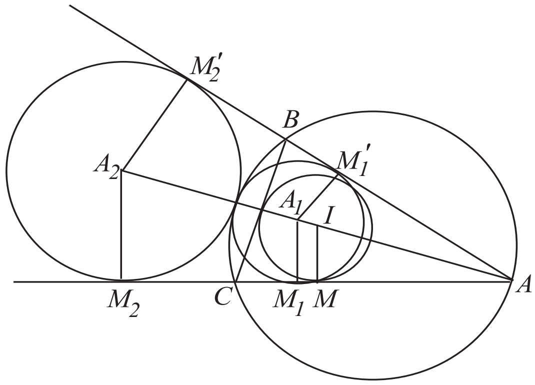
şi de aici concluzia urmează ţinând seama de reciproca teoremei lui Menelaus.

B. Nivel liceal

L226. *Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului oarecare ABC, iar A_1 centrul cercului tangent interior cercului $\mathcal{C}$ şi laturilor $[AB]$ şi $[AC]$. În mod analog construim punctele B_1 şi C_1. Fie A_2 centrul cercului tangent exterior cercului $\mathcal{C}$ şi semidreptelor $[AB$, $[AC$ şi în mod similar construim punctele B_2 şi C_2. Arătaţi că $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Fie I centrul cercului înscris, $IM \perp AC$, $M \in AC$, $A_1M_1 \perp AC$, $M_1 \in AC$, $A_1M_1' \perp AB$, $M_1' \in AB$, $A_2M_2 \perp AC$, $M_2 \in AC$ şi $A_2M_2' \perp AB$, $M_2' \in AB$. Cum $IM \| A_1M_1 \| A_2M_2$, obţinem că $\dfrac{IA_1}{IA_2} = \dfrac{MM_1}{MM_2}$. Însă $MM_1 = AM_1 - AM = \dfrac{bc}{p} - (p-a) = \dfrac{4bc - 4p(p-a)}{4p} = \dfrac{4bc - (a+b+c)(-a+b+c)}{4p} = \dfrac{4bc + a^2 - (b+c)^2}{4p} = \dfrac{a^2 - (b-c)^2}{4p} = \dfrac{(p-b)(p-c)}{4p}$, iar $MM_2 = AM_2 - AM = \dfrac{bc}{p-a} - (p-a) = \dfrac{bc - (p-a)^2}{p-a}$, prin urmare $\dfrac{MM_1}{MM_2} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p[bc-(p-a)^2]} = \dfrac{IA_1}{IA_2}$. Analog se obţine că $\dfrac{IB_1}{IB_2} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p[ac-(p-b)^2]}$, $\dfrac{IC_1}{IC_2} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{4p[ab-(p-c)^2]}$. Observăm că $bc - (p-a)^2 = ac - (p-b)^2 = ab - (p-c)^2 = \dfrac{2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2}{4}$, aşadar $\dfrac{IA_1}{IA_2} = \dfrac{IB_1}{IB_2} = \dfrac{IC_1}{IC_2}$. De aici rezultă că $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{C_1A_1}{C_2A_2}$ şi atunci $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.



L227. *Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, D un punct pe latura BC şi M simetricul lui A faţă de D. Dacă $\dfrac{BM^2}{AB} + \dfrac{CM^2}{AC} = AB + AC$, arătaţi că AD este bisectoare sau înălţime în $\triangle ABC$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie (**Gheorghe Iurea**, Iaşi). Fie E, F proiecţiile punctelor B, C pe AM. Dacă E, F coincid cu D, deci $AD \perp BC$, condiţia $\dfrac{BM^2}{AB} + \dfrac{CM^2}{AC} = AB + AC$ se verifică (deoarece $(AB) \equiv (BM)$ şi $(AC) \equiv (CM)$).

Fie deci $m(\widehat{ADB}) \neq 90°$; putem presupune că $m(\widehat{ADB}) < 90°$, deci $E \in (AD)$, $F \in (DM)$. Scriem condiţia dată sub forma $\dfrac{BM^2 - AB^2}{AB} = \dfrac{AC^2 - CM^2}{AC}$. Cum

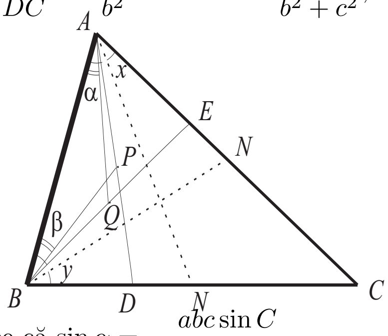
$BM^2 - AB^2 = ME^2 - AE^2 = (ME - AE)\cdot(ME + AE) = AM(MD + DE - AD + DE) = 2AM \cdot DE$ şi, analog, $AC^2 - CM^2 = 2AM \cdot DF$, condiţia precedentă devine $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{DF}{AC}$. Dar $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{BD}{DC}$ (din $\triangle BDC \sim \triangle CDF$) şi rezultă că $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$, adică AD este bisectoarea unghiului BAC. Prin urmare, AD este bisectoare sau înălţime în $\triangle ABC$.

Notă. Autorii problemei, precum şi domnii **Daniel Văcaru** şi **Ioan Viorel Codreanu**, exprimă raportul $\dfrac{BD}{DC}$ în funcţie de elementele triunghiului, găsind valorile posibile $\dfrac{c}{b}$ (ce corespunde bisectoarei) şi $\dfrac{c\cos B}{b\cos C}$ (ce corespunde înălţimii).

L228. *În triunghiul ABC considerăm simedianele AD şi BE, având mijloacele P, respectiv Q. Demonstraţi că* $\widehat{BAQ} \equiv \widehat{ABP}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţia 1 (a autorului)**.** Fie M şi N mijloacele laturilor BC, respectiv AC. Cum AD este simediană, avem: $\widehat{BAD} \equiv \widehat{MAC}$; $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow BD = \dfrac{ac^2}{b^2+c^2}$; $s_a = AD = \dfrac{2bc}{b^2+c^2}m_a$, cu $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$.



Notăm $\alpha = m(\widehat{BAQ}), \beta = m(\widehat{ABP}), x = m(\widehat{MAC})$, $y = m(\widehat{NBC})$. Cu teorema sinusurilor în $\triangle AMC$ obţinem că $\dfrac{a}{2\sin x} = \dfrac{m_a}{\sin C} \Rightarrow \sin x = \dfrac{a\sin C}{2m_a}$, iar din teorema sinusurilor aplicată în $\triangle ABP$ rezultă că $\dfrac{BP}{\sin x} = \dfrac{AP}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sin x}{BP}\cdot\dfrac{AD}{2} = \dfrac{a\sin C}{2m_a}\cdot \dfrac{1}{BP}\cdot\dfrac{bc}{b^2+c^2}\cdot m_a = \dfrac{abc\sin C}{2(b^2+c^2)BP}$. Analog se deduce că $\sin\alpha = \dfrac{abc\sin C}{2(a^2+c^2)AQ}$.

Folosind teorema medianei în $\triangle ABD$ şi $\triangle ABE$, avem succesiv:

$$\begin{aligned}
&\widehat{BAQ} \equiv \widehat{ABP} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow (b^2+c^2)BP = (a^2+c^2)AQ \Leftrightarrow \\
&\quad\Leftrightarrow (b^2+c^2)^2BP^2 = (a^2+c^2)^2AQ^2 \Leftrightarrow (b^2+c^2)^2(2AB^2 + 2BD^2 - AD^2) = \\
&\quad= (a^2+c^2)^2(2AB^2 + 2AE^2 - BE^2) \Leftrightarrow (b^2+c^2)^2\left(2c^2 + \frac{2a^2c^4}{(b^2+c^2)^2} - \right.\\
&\quad\left. - \frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)}\cdot m_a^2\right) = (a^2+c^2)^2\left(2c^2 + \frac{2b^2c^4}{(a^2+c^2)^2} - \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\cdot m_b^2\right),
\end{aligned}$$

iar această relaţie se dovedeşte a fi adevărată după desfacerea parantezelor.

Soluţia 2 (**Gheorghe Iurea**, Iaşi)**.** Deoarece $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c^2}{b^2}$, deducem $\overrightarrow{BD} = \dfrac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{BC}$ şi, cum P este mijlocul lui (AD), rezultă că $\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \dfrac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{BC}\right)$.

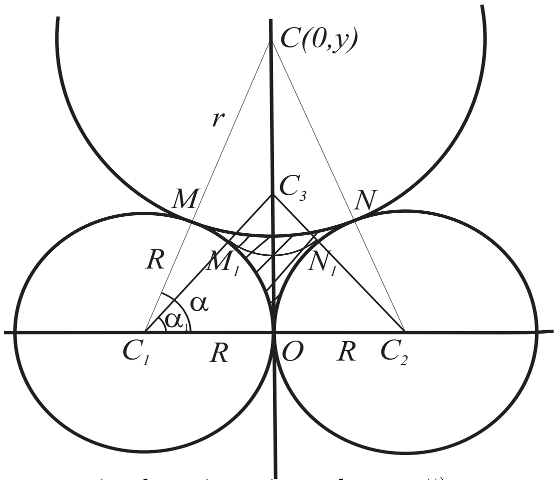
Deoarece $\cos(\widehat{ABP}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}}{BA\cdot BP}$ şi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BA} + \dfrac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{BC}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(c^2+\frac{c^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)=\frac{c^2(3c^2+a^2+b^2)}{4(b^2+c^2)}$, iar
$BP=\sqrt{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BP}}=\sqrt{\left(\overrightarrow{BA}+\frac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\frac{c^2}{b^2+c^2}\overrightarrow{BC}\right)}$
$=\sqrt{c^2+2\frac{c^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2}+\frac{c^4}{(b^2+c^2)^2}a^2}=\frac{c}{b^2+c^2}\sqrt{2c^4+2b^2c^2+2a^2c^2+a^2b^2}$,
deducem că $\cos(\widehat{ABP})=\frac{3c^2+a^2+b^2}{4\sqrt{2c^4+2b^2c^2+2a^2c^2+a^2b^2}}$. Schimbând pe a cu b, obţinem că $\cos\widehat{BAQ}=\frac{3c^2+b^2+a^2}{4\sqrt{2c^4+2a^2c^2+2b^2c^2+b^2a^2}}$. Prin urmare, $\cos\widehat{ABP}=\cos(\widehat{BAQ})$ şi, cum $\widehat{ABP}$, $\widehat{BAQ}\in(0,\pi)$, rezultă că $\widehat{ABP}\equiv\widehat{BAQ}$.

L229. *Considerăm cercurile de ecuaţii $x^2+2Rx+y^2=0$, respectiv $x^2-2Rx+y^2=0$ şi fie C_1 şi C_2 centrele lor. Cercul cu centrul în $C(0,y)$ cu $y>0$ este tangent celor două cercuri date. Fie $S=S(\alpha)$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ aria suprafeţei din semiplanul superior mărginită de cele 3 cercuri, unde α este măsura (în radiani) a unghiurilor de la baza $\triangle C_1C_2C$. Demonstraţi că funcţia $S=S(\alpha)$ este strict crescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi calculaţi $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}S(\alpha)$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Observăm că $C_1(-R,0)$, $C_2(R,0)$, iar $y=R\operatorname{tg}\alpha$, deci aria triunghiului CC_1C_2 este $R^2\operatorname{tg}\alpha$. Dacă $\alpha_1<\alpha$, $S(\alpha_1)$ este aria triunghiului curbiliniu OM_1N_1, inclus în triunghiul curbiliniu OMN a cărui arie este $S(\alpha)$. Rezultă că $S(\alpha_1)<S(\alpha)$ pentru $\alpha_1<\alpha$, aşadar funcţia $S(\alpha)$ este strict crescătoare pe $(0,\frac{\pi}{2})$.



Fie $r=CM$; cum măsura unghiului $\widehat{C}$ este $\pi-2\alpha$, aria sectorului circular CMN este $\frac{1}{2}r^2(\pi-2\alpha)$. Din $\cos\alpha=\frac{R}{R+r}$ obţinem că $r=\frac{R(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$. Descompunând triunghiul CC_1C_2 în patru părţi (trei sectoare circulare şi porţiunea haşurată), avem:

$$R^2\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}R^2\alpha+\frac{1}{2}R^2\alpha+S(\alpha)+\frac{1}{2}\frac{R^2(1-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}(\pi-2\alpha)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S(\alpha)=R^2\operatorname{tg}\alpha-R^2\alpha-\frac{1}{2}\frac{R^2(1-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}(\pi-2\alpha)=R^2[f(\alpha)-\alpha].$$

Atunci, aplicând regula lui l'Hospital de două ori, obţinem: $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}f(\alpha)=$

$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2\alpha - (1-\cos\alpha)^2(\pi - 2\alpha)}{2\cos^2\alpha} = 2$. Ca urmare $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} S(\alpha) = R^2(2 - \dfrac{\pi}{2})$.

Notă. Soluţie corectă a dat d-l **Daniel Văcaru**, Piteşti.

L230. *Pentru $x \in \mathbb{R}$, demonstraţi inegalităţile*:

a) $\sqrt{1+2\cos^2 x}\cdot\sin^2 x + \sqrt{1+2\sin^2 x}\cdot\cos^2 x + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \geq |\sin x| + |\cos x|$;

b) $\sqrt{3-2\sin^4 x}\cdot\sin^4 x + \sqrt{3-2\cos^4 x}\cdot\cos^4 x \geq 1 - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. Vom demonstra că $t^2\sqrt{9-2t^2}+1 \geq 3t$, $\forall t \in [0,\sqrt{3}]$. Într-adevăr, dacă $t \in [0,1]$, atunci $\sqrt{9-2t^2} \geq \sqrt{7} > \dfrac{9}{4} \Rightarrow 4t^2\sqrt{9-2t^2} \geq 9t^2 \Rightarrow (t^2\sqrt{9-2t^2}+1)^2 \geq 4t^2\sqrt{9-2t^2} \geq 9t^2 \Rightarrow t^2\sqrt{9-2t^2}+1 \geq 3t$, iar dacă $t \in (1,\sqrt{3}]$, atunci inegalitatea $t^2\sqrt{9-2t^2} \geq 3t-1$ revine, după calcule, la $2t^6 - 9t^4 + 9t^2 - 6t + 1 \leq 0$; însă $2t^6 - 9t^4 + 9t^2 - 6t + 1 < 2t^6 - 9t^4 + 9t^2 - 5 = (2t^2-1)(t^2-1)(t^2-3) - (t^2+2) < 0$.

Luând în inegalitatea demonstrată $t = \sqrt{3}u$, cu $u \in [0,1]$, rezultă că $u^2\sqrt{3-2u^2} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \geq u$. Atunci a) se obţine înlocuind, pe rând, $u = |\sin x|$ şi $u = |\cos x|$ şi adunând relaţiile găsite, iar b) se obţine înlocuind, pe rând, $u = \sin^2 x$ şi $u = \cos^2 x$ şi adunând relaţiile găsite.

L231. *Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x, y, z şi diagonala d. Arătaţi că*

$$\frac{d^4}{ad^4+bx^4} + \frac{d^4}{ad^4+by^4} + \frac{d^4}{ad^4+bz^4} \geq \frac{3a+2b}{a(a+b)},$$

oricare ar fi $a > b \geq 0$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Soluţie. Cum $d^2 = x^2+y^2+z^2$, avem că

$$\frac{d^4}{ad^4+bx^4} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+u^2},$$

unde $u = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$. Mai notăm $v = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$, $w = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$; inegalitatea din enunţ revine la $\sum\dfrac{1}{1+u^2} \geq \dfrac{3a+2b}{a+b}$. Însă, conform problemei 7, pag. 271, din **V. Cîrtoaje** - *Algebraic Inequalities*, GIL, Zalău, 2006, dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$, cu $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n^2} \geq n - \max_{1\leq k\leq n}\frac{ks^2}{k^2+s^2}.$$

Considerăm $n = 3$, $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = w$ şi $s = u+v+w = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ şi deducem că $\sum\dfrac{1}{1+u^2} \geq 3 - M$, unde $M = \max\left\{\dfrac{b}{a+b}, \dfrac{2b}{4a+b}, \dfrac{3b}{9a+b}\right\}$. Se observă uşor că, dacă $a > b$, atunci $M = \dfrac{b}{a+b}$ şi, astfel, cerinţa problemei urmează imediat.

Nota 1. Dacă a, b sunt numere reale nenegative, nu ambele nule, se constată că $M = \dfrac{b}{a+b}$ dacă $b \leq 2a$, $M = \dfrac{2b}{4a+b}$ dacă $2a \leq b \leq 6a$ şi $M = \dfrac{3b}{9a+b}$ dacă $b \geq 6a$. Corespunzător fiecărei situaţii, obţinem câte o inegalitate de tipul celei din enunţ.

Nota 2. Problema oferă o îmbunătăţire a rezultatului din E:13949 din G.M. 1/2010, unde se arată că suma din membrul stâng este cel puţin egală cu $\dfrac{6\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}$ (număr mai mic decât cele obţinute aici, în cele trei situaţii posibile).

L232. *Dacă $a \geq b \geq c > 0$, arătaţi că are loc inegalitatea*

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq (a^3 - c^3)\sqrt{(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (a autorului)**.** Este adevărată inegalitatea

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq (a^3 - b^3)(a^3 - c^3).$$

Într-adevăr, această inegalitate este echivalentă cu $(b^3 - c^3)^2 + a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 - 3a^2b^2c^2 \geq 0$, iar aceasta este adevărată deoarece $a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3 \cdot a^3b^3 \cdot b^3c^3}$ $= 3a^2b^2c^2$. Analog se arată că

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq (a^3 - c^3)(b^3 - c^3)$$

şi, prin înmulţirea membru cu membru a acestor două inegalităţi şi extragerea radicalului, obţinem cerinţa problemei.

Soluţia 2 (**Daniel Văcaru**, Piteşti şi **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung, Maramureş)**.** Din inegalitatea mediilor, avem $\dfrac{(a^3 - b^3) + (b^3 - c^3)}{2} \geq \sqrt{(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)}$. Dacă mai arătăm că $\dfrac{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}{a^3 - c^3} \geq \dfrac{a^3 - c^3}{2}$, soluţia ar fi încheiată. Inegalitatea precedentă revine, după calcule, la $a^6 + 2b^6 + c^6 + 2a^3c^3 \geq 6a^2b^2c^2$, care se obţine aplicând inegalitatea mediilor numerelor $a^6, b^6, b^6, c^6, a^3c^3$ şi a^3c^3.

Soluţia 3 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Se verifică identitatea

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = \frac{1}{2}[(a^3 - c^3)^2 + (a^3 - b^3)(b^3 - c^3)] +$$
$$+ \frac{1}{4}[(a^3 - b^3)^2 + (b^3 - c^3)^2 + (c^3 - a^3)^2] + (b^2 + 2ac)(b^2 - ac)^2.$$

Aplicând inegalitatea mediilor, obţinem că $(a^3 - c^3)^2 + (a^3 - b^3)(b^3 - c^3) \geq 2(a^3 - c^3)\sqrt{(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)}$ şi rezultă astfel o întărire a inegalitaţii din problemă:

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq (a^3 - c^3)\sqrt{(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)} +$$
$$+ \frac{1}{4}[(a^3 - b^3)^2 + (b^3 - c^3)^2 + (c^3 - a^3)^2] + (b^2 + 2ac)(b^2 - ac)^2.$$

L233. *Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive cu proprietatea că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$. Demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{a_1}{a_1^3 + a_1^2 + 1} + \frac{a_2}{a_2^3 + a_2^2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^3 + a_n^2 + 1} \leq \frac{n^3}{n^3 + n + 1}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + x^2 + 1}$; procedând ca în articolul *Inegalităţi omogene şi puţină analiză....* din *RecMat-1/2008*, vom demonstra inegalitatea

$$(1) \qquad \frac{x}{x^3 + x^2 + 1} \leq \frac{n^2}{n^3 + n + 1} + \frac{(n^3 - n - 2)n^3}{(n^3 + n + 1)^2}(x - \frac{1}{n}).$$

Inegalitatea (1) este echivalentă succesiv cu:

$$n^2(n^3 - n - 2)(nx - 1)(x^3 + x^2 + 1) + n^2(n^3 + n + 1)(x^3 + x^2 + 1) - x(n^3 + n + 1)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (n^5 - n^3 - 2n^2)(nx^4 - x^3 + nx^3 - x^2 + nx - 1) + (n^5 + n^3 + n^2)(x^3 + x^2 + 1) -$$
$$- x(n^6 + n^2 + 1 + 2n^4 + 2n^3 + 2n) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (n^6 - n^4 - 2n^3)x^4 + (n^6 - n^4 + 3n^2)x^3 + (2n^3 + 3n^2)x^2 -$$
$$- (3n^4 + 4n^3 + n^2 + 2n + 1)x + 2n^3 + 3n^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (nx - 1)^2[(n^4 - n^2 - 2n)x^2 + (n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n - 1)x + 2n^3 + 3n^2] \geq 0.$$

Ultima inegalitate este adevărată pentru $x \geq 0$ deoarece, când $n \geq 2$, avem că $n^4 - n^2 - 2n \geq 3n^2 - n^2 - 2n = 2n^2 - 2n \geq 0$ şi $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n - 1 > 2n^3 + 2n^3 - n^2 - 2n - 1 = n^3 - n^2 + n^3 - 1 + 2n^3 - 2n > 0$. Folosind (1) şi ipoteza $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1$ obţinem că

$$\frac{a_1}{a_1^3 + a_1^2 + 1} + \frac{a_2}{a_2^3 + a_2^2 + 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^3 + a_n^2 + 1} \leq \frac{n^3}{n^3 + n + 1} +$$
$$+ \frac{n^3(n^3 - n - 2)}{(n^3 + n + 1)}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n - 1) \leq \frac{n^3}{n^3 + n + 1}.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

L234. *Determinaţi mulţimile A de numere reale cu proprietatea „$x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \in A \Rightarrow x^3 + y^3 \in A$".*

Vlad Emanuel, Bucureşti

Soluţie. Notăm $a = x^2 + y^2 \geq 0$, $s = x + y$, $p = xy$; atunci $x^3 + y^3 = s^3 - 3sp = s^3 - 3s\dfrac{s^2 - a}{2} = -\dfrac{1}{2}s^3 + \dfrac{3}{2}as$. Din inegalitatea $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ deducem că $s^2 \leq 2a$ şi se arată că oricare ar fi $s \in [-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}]$, sistemul $x^2 + y^2 = a$, $x + y = s$ are soluţie. Funcţia $f : [-a\sqrt{2}, a\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $f(t) = -\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}at$ are punctele de extrem $t_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ şi valorile extreme $\pm a\sqrt{a}$, deci valorile expresiei $x^3 + y^3$ acoperă în întregime intervalul

$[-a\sqrt{a}, a\sqrt{a}]$. În concluzie, problema se poate reformula astfel: *Determinaţi mulţimile A de numere reale cu proprietatea: „$a \in A \cap [0,\infty) \Rightarrow [-a\sqrt{a}, a\sqrt{a}] \subset A$".*

Dacă există $x_1 \in A \cap (1,\infty)$, definim şirul $x_{n+1} = x_n\sqrt{x_n}$. Prin inducţie se arată că $[-x_n, x_n] \subset A$ şi, cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, rezultă că $A = \mathbb{R}$.

Presupunem în continuare că $A \subset (-\infty, 1]$ şi fie $a = \sup A$. Dacă $a \leq 0$, atunci A poate fi orice mulţime inclusă în $(-\infty, a]$. Dacă $a > 0$, deosebim două situaţii: I. $a \in A$. Atunci $[-a\sqrt{a}, a\sqrt{a}] \subset A$ şi A va fi o mulţime de forma $M \cup [-a\sqrt{a}, a\sqrt{a}] \cup N$, unde $M \subset (-\infty, -a\sqrt{a})$ şi $N \subset (a\sqrt{a}, a)$ sunt arbitrare; se verifică imediat faptul că mulţimile de această formă au proprietatea dorită. II. $a \notin A$. În acest caz, $(-a\sqrt{a}, a\sqrt{a}) \subset A$ şi A va fi o mulţime de forma $M \cup (-a\sqrt{a}, a\sqrt{a}) \cup N$, unde $M \subset (-\infty, -a\sqrt{a}]$ este o mulţime arbitrară, iar $N \subset [a\sqrt{a}, a)$ este o mulţime care conţine un şir convergent la a (din condiţia de supremum). Cu aceasta, soluţia este completă.

L235. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu derivata a doua mărginită pe intervalul I. Demonstraţi că există un număr $k \geq 0$ (depinzând de funcţia f) astfel încât inegalitatea*

$$f(x) + f(y) + 6f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k(x-y)^2 \geq 4\left[f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right]$$

să fie adevărată pentru orice $x, y \in I$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie m şi M marginile derivatei a doua a lui f pe intervalul I, deci $m \leq f''(t) \leq M$, pentru orice $t \in I$ şi să considerăm $a, b \in I$; conform formulei lui Taylor, avem

$$f(a) = f(b) + (a-b)f'(b) + \frac{f''(c)}{2}(a-b)^2,$$

pentru un anumit $c \in I$, deci obţinem inegalitatea

$$f(a) \geq f(b) + (a-b)f'(b) + \frac{m}{2}(a-b)^2,$$

valabilă pentru orice $a, b \in I$. În conformitate cu aceasta avem:

$$f(x) \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{3(x-y)}{4}f'\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{9m}{32}(x-y)^2,$$
$$f(y) \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{3(y-x)}{4}f'\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{9m}{32}(x-y)^2,$$
$$3f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{3(x-y)}{4}f'\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{3m}{32}(x-y)^2,$$
$$3f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{3(y-x)}{4}f'\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{3m}{32}(x-y)^2.$$

Adunăm membru cu membru toate aceste inegalităţi şi obţinem:

$$f(x) + f(y) + 6f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 4\left(\left(\frac{x+3y}{4}\right) + f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right) -$$
$$-\frac{3(x-y)}{2}\left(f'\left(\frac{3x+y}{4}\right) - f'\left(\frac{x+3y}{4}\right)\right) + \frac{3m}{4}(x-y)^2.$$

Cu teorema lui Lagrange scriem

$$f'\left(\frac{3x+y}{4}\right)-f'\left(\frac{x+3y}{4}\right)=\frac{x-y}{2}f''(z),$$

pentru un anume z din intervalul I (cuprins, de fapt, între $\frac{x+3y}{4}$ şi $\frac{3x+y}{4}$); prin urmare, inegalitatea obţinută devine

$$f(x)+f(y)+6f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq 4\left(f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right)-$$
$$-\frac{3(x-y)^2}{4}f''(z)+\frac{3m}{4}(x-y)^2.$$

În sfârşit, deoarece avem $-\frac{3(x-y)^2}{4}f''(z)\geq -\frac{3M}{4}(x-y)^2$, ajungem la inegalitatea

$$f(x)+f(y)+6f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{3(M-m)}{4}(x-y)^2\geq 4\left(f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right),$$

valabilă pentru orice $x,y\in I$, adică numărul cerut de enunţ poate fi $k=\frac{3}{4}(\sup_{t\in I}f''(t)-\inf_{t\in I}f''(t))$.

Observaţie. Pornind de la inegalitatea similară $f(a)\leq f(b)+(a-b)f'(b)+\frac{M}{2}(a-b)^2$, $\forall a,b\in I$, putem demonstra, la fel că

$$f(x)+f(y)+6f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{3(M-m)}{4}(x-y)^2\leq 4\left(f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right),$$

deci avem, până la urmă, inegalitatea

$$\left|f(x)+f(y)+6f\left(\frac{x+y}{2}\right)-4\left(f\left(\frac{x+3y}{4}\right)+f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right)\right|\leq$$
$$\leq\frac{3}{4}(\sup_{t\in I}f''(t)-\inf_{t\in I}f''(t))(x-y)^2,$$

pentru orice $x,y\in I$.

Notă. Soluţie corectă a trimis d-l **Daniel Văcaru**, Piteşti.

Vizitaţi pagina web a revistei **Recreaţii Matematice**:

http://www.recreatiimatematice.ro