Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2012

Clasele primare

P.240. *Alina are* 14 *baloane roşii şi verzi. Baloane verzi are cel mult* 5. *Câte baloane roşii poate avea Alina?*

(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Dacă numărul baloanelor verzi este cel mult 5, atunci numărul baloanelor roşii este cel puţin 9. Numărul baloanelor roşii poate lua valori de la 9 la 13.

P.241. *Completaţi casetele cu semnele* + *sau* − *astfel încât scrierea* $1\square 2\square 3\square 4 = 12\square 2\square 1\square 3\square 4$ *să fie corectă. Daţi cel puţin două soluţii.*

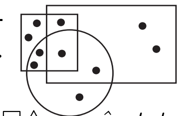
(*Clasa I*) **Paula Balan, elevă, Iaşi**

Soluţie. Putem avea, de exemplu: $1 + 2 + 3 - 4 = 12 - 2 - 1 - 3 - 4$ sau $1 + 2 + 3 + 4 = 12 - 2 + 1 + 3 - 4$.

P.242. *Câte puncte se află în interiorul pătratului şi cercului, dar nu şi în interiorul dreptunghiului?*

(*Clasa I*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**

Soluţie. În exteriorul dreptunghiului sunt 5 puncte. Dintre acestea, două sunt în exteriorul cercului şi unul în exteriorul pătratului. În concluzie, numai două puncte îndeplinesc condiţia problemei.



P.243. *Un elev realizează următoarea structură:* $\triangle\square\triangle\square\square\triangle\square\square\square\triangle\ldots$, *în total* 44 *forme geometrice. Există o porţiune a structurii în care să se găsească exact trei triunghiuri, iar numărul dreptunghiurilor să fie* 20?

(*Clasa a II-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. Răspunsul este afirmativ: considerăm cele 23 de figuri de pe poziţiile $16, 17, \ldots, 38$. Primele cinci sunt dreptunghiuri; urmează un triunghi. Apoi, următoarele şase sunt dreptunghiuri şi urmează un nou triunghi. Avem încă şapte dreptunghiuri, un triunghi şi, în sfârşit, două dreptunghiuri. În total, secvenţa conţine trei triunghiuri şi $5 + 6 + 7 + 2 = 20$ dreptunghiuri.

P.244. *Avem două vase, unul de* 5 *litri şi celălalt de* 8 *litri. Cum măsurăm* 4 *litri de apă?*

(*Clasa a II-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

Soluţie. Umplem vasul de $5l$, apoi îl turnăm în cel de $8l$. Umplem din nou vasul de $5l$ şi completăm vasul de $8l$, obţinând $2l$ în vasul de $5l$. Golim vasul de $8l$, apoi turnăm în el cei $2l$. Umplem din nou vasul de $5l$ şi îl turnăm peste cei $2l$, obţinând $7l$. Umplem din nou vasul de $5l$ şi completăm vasul de $8l$ cu $1l$. La această operaţiune, în vasul de $5l$ rămân $4l$.

P.245. *Dacă a este cel mai mare număr natural par mai mic decât* 902, *iar b este cel mai mare număr de trei cifre diferite cu suma* 10, *să se arate că*

$$(b - a) + (b - a) + \ldots + (b - a) = a \quad \text{(suma are 90 termeni)}.$$

(*Clasa a II-a*) **Lidia Balica, elevă, Iaşi**

Soluţie. Avem $a = 900$, $b = 910$, iar $b - a = 10$. Deoarece 10 zeci formează numărul 100, atunci 90 de zeci formează numărul 900.

P.246. *Cele două verişoare, Oana şi Camelia, au primit mere de la bunica lor. Oana spune:*

– Dă-mi 2 mere, pentru a avea cât tine!

Camelia răspunde:

– Dă-mi tu 2 mere, pentru ca merele rămase ţie să reprezinte jumătate din cât voi avea eu!

Câte mere a primit fiecare?

(*Clasa a III-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Camelia are cu 4 mere mai mult decât Oana. După ce Oana dă cele două mere Cameliei, ea rămâne cu jumătate din numărul merelor Cameliei, adică $2 + 4 + 2 = 8$. Rezultă că Oana are $8 + 2 = 10$ mere, iar Camelia $10 + 4 = 14$ mere.

P.247. *Într-o cutie sunt bile. Triplăm numărul bilelor şi scoatem din cutie* 17 *bile, apoi triplăm numărul bilelor rămase şi iar scoatem* 17 *bile ş.a.m.d. Putem goli cutia prin repetarea acestei operaţii?*

(*Clasa a III-a*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

Soluţie. În cutie rămân de fiecare dată $3 \times a - 17$ bile. Acest număr nu poate fi 0, deoarece 17 nu se împarte exact la 3.

P.248. *O elevă a cules mere. Văzând că poate forma un număr exact de grupe de* 10 *mere, eleva dă câte trei mere din fiecare grupă unui cămin de bătrâni şi constată că diferenţa dintre numărul merelor care i-au rămas şi cel al merelor date este* 36*. Câte mere a cules eleva?*

(*Clasa a III-a*) **Ioana Grăunte, elevă, Iaşi**

Soluţie. Notăm cu a numărul grupelor de câte 10 mere. Eleva donează $3a$ mere. Trebuie să avem $7a - 3a = 36$, de unde $a = 9$. Eleva a cules $10 \cdot 9 = 90$ mere.

P.249. *Arătaţi că numărul* $343\,343\,343\ldots3437$ *(*2012 *grupe de* 343*) se împarte exact la* 7.

(*Clasa a III-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. Numărul 343 se împarte exact la 7, câtul fiind 49. Înseamnă că şi numărul $343\ldots3437$ (2012 grupe de 343) se împarte exact la 7, câtul fiind $490490\ldots490491$ (2011 grupe de 490).

P.250. *Patru fraţi au împreună* 45 *de ani. Vârstele lor ar deveni egale dacă primul ar avea cu doi ani mai mult, al doilea cu doi ani mai puţin, al treilea de două ori mai mult decât are, iar al patrulea jumătate din vârsta pe care o are. Câţi ani are fiecare?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Valeria Avasâlcei, Iaşi**

Soluţie. Dacă vârstele fraţilor sunt a, b, c şi d, atunci $a + b + c + d = 45$ şi $a + 2 = b - 2 = 2c = d : 2$, de unde $a = 2c - 2$, $b = 2c + 2$, $d = 4c$. Vom avea relaţia $2c - 2 + 2c + 2 + c + 4c = 45$, de unde $c = 5$ ani, iar $a = 8$ ani, $b = 12$ ani, $d = 20$ ani.

P.251. *Se consideră următorul şir de perechi de numere:* $(1, 100), (2, 99), (3, 98), \ldots, (100, 1)$*. Câte perechi* (x, y) *din şir au proprietatea* $3x < 5y$*?*

(*Clasa a IV-a*) **Nicoleta Cumpătă, elevă, Iaşi**

Soluţie. $3x < 5y \Rightarrow 3x + 3y < 8y \Rightarrow 3(x + y) < 8y \Rightarrow 303 < 8y$. Deoarece $303 = 8 \cdot 37 + 7$, rezultă $y \geq 38$ şi y poate lua $100 - 38 + 1 = 63$ valori. Satisfac condiţia problemei primele 63 perechi.

P.252. *Se consideră şirul* $3; 4; 6; 9; 13; 18; 24; \ldots$.

a) Scrieţi al 100-lea termen al şirului.

b) Arătaţi că termenul de pe locul 1113334 *se împarte exact la* 3.

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. a) Observăm că $3 = 3 + 0$, $4 = 3 + 1$, $6 = 3 + 1 + 2$, $9 = 3 + 1 + 2 + 3$, $13 = 3 + 1 + 2 + 3 + 4$, deci $T_{100} = 3 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 = 4953$.

b) $T_{1113334} = 3 + 1113334 \cdot 1113333 : 2$ se împarte exact la 3, deoarece numărul 1113333 se împarte exact la 3.

P.253. *Vârstele a doi fraţi sunt două numere impare consecutive, iar vârsta tatălui lor este de patru ori mai mare decât vârsta fiului cel mare.*

a) Arătaţi că suma vârstelor tatălui şi fiilor se împarte exact la 4, *dar nu şi la* 3.

b) Care din numerele $32, 44, 52$ *poate să reprezinte suma vârstelor lor?*

(*Clasa a IV-a*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. a) Dacă vârsta fiului mic este a, atunci suma vârstelor tatălui şi fiilor este $6a + 10$, unde a este număr impar, deci de forma $2k + 1$. Avem $6a + 10 = 12k + 16 = 4(3k + 4)$, care se împarte exact la 4, dar nu şi la 3.

b) $12k + 16 = 32 \Rightarrow 12k = 16$, fals; $12k + 16 = 44 \Rightarrow 12k = 28$, fals; $12k + 16 = 52 \Rightarrow 12k = 36 \Rightarrow k = 3$ şi vârstele sunt 7 ani, 9 ani, 36 ani.

P.254. *Cinci elevi joacă următorul joc. Primul scrie pe tablă două numere distincte. Al doilea le înlocuieşte cu suma şi diferenţa lor; la fel şi ceilalţi trei elevi. În final, pe tablă sunt scrise două numere a căror sumă este* 128 *şi a căror diferenţă este* 8. *Ce numere a scris primul elev pe tablă?*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Primul elev a scris pe tablă numerele a şi b, $a > b$, al doilea a scris numerele $a + b$ şi $a - b$, al treilea a scris numerele $2a$ şi $2b$. Al cincilea a scris pe tablă numerele $4a$ şi $4b$, care satisfac simultan $4a + 4b = 128$, $4a - 4b = 8$. Găsim $a = 17$ şi $b = 15$.

Clasa a V-a

V.151. *Determinaţi cifra* x *(în baza* 10*) pentru care* $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \overline{x6x}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Dacă $x \geq 4$, atunci $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \geq 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 > 999 > \overline{x6x}$. Efectuând verificări pentru $x \in \{1, 2, 3\}$, convine doar cazul $x = 3$, când $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 363$.

V.152. *Determinaţi restul împărţirii numărului* $A = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2012}$ *prin* 60.

Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

Soluţie. Deoarece $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} = 2^n \cdot 15 \,\vdots\, 60$, $\forall n \geq 2$, iar $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) + \ldots + (2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012}) = 31 + M_{60}$, rezultă că restul căutat este 31.

V.153. *Demonstraţi că numărul* 3^{225} *are cel puţin* 101 *cifre.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Deoarece $3^4 = 81 > 2^3 \cdot 10$, avem că $3^{225} = 3(3^4)^{56} > 3(2^3 \cdot 10)^{56} = 3 \cdot 2^8 \cdot 2^{160} \cdot 10^{56} = 768 \cdot (2^{10})^{16} \cdot 10^{56} > 768(10^3)^{16} \cdot 10^{56} = 768 \cdot 10^{104} > 10^{106}$, prin urmare numărul 3^{225} are cel puţin 107 cifre (rezultat mai bun decât cel cerut de enunţ).

V.154. *Demonstraţi că există o infinitate de pătrate perfecte cu ultimele două cifre ale scrierii zecimale egale cu* 69*.*

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Dacă $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n 13}$, atunci $A^2 = \overline{\ldots 69}$.

V.155. *Se consideră numărul natural* $A = 1\underbrace{00\ldots0}_{2012\ de\ 0}44$*. Demonstraţi că* A *nu este nici pătrat perfect nici cub perfect.*

Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi

Soluţie. Observăm că $1\underbrace{00\ldots0}_{1007\,\text{de}\,0}{}^2 < A < 1\underbrace{00\ldots0}_{1006\,\text{de}\,0}1^2$, deci A nu este pătrat perfect. Cum A se divide cu 2, dar nu se divide cu 2^3, rezultă că A nu este nici cub perfect.

V.156. *Fie succesiunea de cifre* 1 *şi* 0 *următoare:* 101101110111101111110...

a) *A 2012-a cifră este* 0 *sau* 1*?*

b) *Câţi de* 0 *sunt înainte de a* 2012*-a cifră? Dar de* 1*?*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. a) Observăm că numărul de cifre scrise până la n-lea 0 (inclusiv acest 0) este
$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}.$$
Să presupunem că a 2012-a cifră din succesiune ar fi 0 şi că acest 0 ar fi al n-lea 0. Conform observaţiei precedente, am avea $2012 = \dfrac{n(n+3)}{2}$ sau $n(n+3) = 4024$. Cum $61 \cdot 64 = 3904 < 4024 < 4030 = 32 \cdot 65$, rezultă că a 2012-a cifră nu este 0, ci 1.

b) Am văzut la punctul a) că $\dfrac{61 \cdot 64}{2} < 2012 < \dfrac{62 \cdot 65}{2}$. Din nou, utilizând observaţia făcută, deducem că sunt 61 de 0 până la a 2012-a cifră din succesiune. Apoi, până la al 61-lea 0 din succesiune avem scrise $\dfrac{61 \cdot 64}{2} - 61 = 1891$ cifre de 1, iar după al 61-lea 0 urmează un grup de 62 cifre de 1, dintre care numai 60 cifre sunt scrise până la cifra a 2012-a (inclusiv). În total avem $1891 + 60 = 1951$ cifre de 1 până la a 2012-a cifră din succesiune.

V.157. *Pe un cerc se află* 160 *de bile, numerotate în ordine crescătoare de la* 1 *la* 160*. Începând cu bila* 1*, se elimină bilele, din două în două, până rămâne una singură. Ce număr este scris pe bila rămasă?*

Petre Bătrâneţu, Galaţi

Soluţie. La primul tur se iau de pe masă bilele impare; la al doilea, cele numerotate cu numere de forma $2k$, k impar; la al treilea, cele cu numere de forma $2^2 \cdot l$, l impar etc. După turul cinci, rămân pe masă bilele cu numerele $2^5 = 32$, $2^5 \cdot 2 = 64$, $2^5 \cdot 3 = 96$, $2^5 \cdot 4 = 128$ şi $2^5 \cdot 5 = 160$. La turul şase se elimină bilele $32, 96$ şi 160.

La turul şapte se sare bila 64 şi se ia bila 128, deci utlima bilă rămasă este cea cu numărul 64.

Clasa a VI-a

VI.151. *Fie numerele* $p_1, p_2, \ldots, p_6$ *prime şi cel puţin egale cu* 5. *Arătaţi că suma* $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_6^2$ *se divide cu* 6, *dar nu se divide cu* 12.

Camelia Dană, Craiova

Soluţie. Dacă $p \geq 5$ este număr prim, atunci $p = M_6 \pm 1$, deci $p^2 = M_{12} + 1$. Rezultă că $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_6^2 = M_{12} + 6$, de unde cerinţa problemei.

VI.152. *Demonstraţi că nu există* a *şi* b *cifre nenule pentru care* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \overline{a,b} + \overline{b,a}$.

Bianca Petrescu, elevă, Iaşi

Soluţie. Avem $a \neq 0$ şi $b \neq 0$. Evident, $\dfrac{a}{b} \leq a$ şi $a < \overline{a,b}$, deci $\dfrac{a}{b} < \overline{a,b}$. Analog, $\dfrac{b}{a} < \overline{b,a}$. Ca urmare, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} < \overline{a,b} + \overline{b,a}$.

VI.153. *Determinaţi numărul soluţiilor întregi ale ecuaţiei* $x^2 + y^2 + z^2 = |x| - |y| + z$.

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ este o soluţie, atunci $x^2 - |x| + y^2 + |y| + z^2 - z = 0$. Însă $x^2 - |x| \geq 0$ (cu egalitate pentru $x \in \{-1, 0, 1\}$), $y^2 + |y| \geq 0$ (cu egalitate când $y = 0$) şi $z^2 - z \geq 0$ (cu egalitate pentru $z \in \{0, 1\}$). Cele trei egalităţi trebuie să se atingă simultan, prin urmare există $3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$ soluţii ale ecuaţiei din enunţ.

VI.154. *Determinaţi* $n \in \mathbb{N}^*$ *pentru care există numerele naturale* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *cu proprietatea că* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Valoarea $n = 1$ nu convine; fie $n \geq 2$. Căutăm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu cât mai multe dintre numere egale cu 1. Considerăm deci $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 1$ şi a_1, a_2 satisfac egalitatea $a_1 + a_2 + 2n - 2 = a_1 a_2$, i.e. $(a_1 - 1)(a_2 - 1) = 2n - 1$. Luăm $a_1 = 2n$, $a_2 = 2$ şi rezultă că pentru orice $n \geq 2$, există $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietatea din enunţ.

VI.155. *La împărţirea a două numere naturale nenule, deîmpărţitul şi împărţitorul sunt direct proporţionale cu restul, respectiv câtul. Restul şi câtul sunt prime între ele. Arătaţi că deîmpărţitul este pătrat perfect şi aflaţi cele mai mici trei valori posibile ale acestuia.*

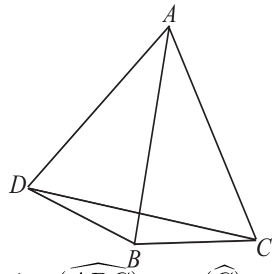
Gheorghe Bumbăcea, Buşteni

Soluţie. Notăm cu a, b, c şi r deîmpărţitul, împărţitorul, câtul, respectiv restul; avem că $a = bc + r$, cu $r < b$, apoi $\dfrac{a}{r} = \dfrac{b}{c} (= k)$ şi $(r, c) = 1$. Din $ac = br$ obţinem că $c|br$ şi, cum $(r, c) = 1$, deducem că $c|b$, prin urmare $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci: $a = bc + r \Rightarrow rk = c^2 k + r \Rightarrow r(k-1) = c^2 k \Rightarrow r|c^2 k$; deoarece $(r, c^2) = 1$, rezultă că $r|k$. Pe de altă parte, $r(k-1) = c^2 k \Rightarrow k|r(k-1)$ şi, cum $(k, k-1) = 1$, obţinem $k|r$, prin urmare $k = r$. În acest fel, $a = r^2$ este pătrat perfect. Avem că $r^2 = c^2 r + r$ şi, cum $r \neq 0$, deducem că $r = c^2 + 1$. Dacă $c = 1$, ar urma că $r = b = 2$, imposibil. Cele mai mici trei valori ale lui a, se găsesc pentru $c \in \{2, 3, 4\}$ şi sunt $25, 100, 289$.

VI.156. *Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) = 30°$. Punctul D se află în interiorul unghiului $\widehat{ACB}$, astfel încât $m(\widehat{DCB}) = 15°$ şi $m(\widehat{DBA}) = 75°$. Demonstraţi că $AC = AD$.*

Petrişor Rocşoreanu, Craiova

Soluţie. Cum $m(\widehat{BCD}) = 15°$ şi $m(\widehat{CBD}) = 75° + 75° = 150°$, rezultă că $m(\widehat{BDC}) = 15°$, prin urmare $\triangle BCD$ este isoscel cu $BC = BD$. Atunci $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (L.U.L.), deci $AC = AD$.



VI.157. *Se consideră triunghiul ABC cu $AC = 1$, $m(\widehat{B}) = 10°$ şi $m(\widehat{C}) = 20°$. Demonstraţi că perimetrul triunghiului este mai mic decât 6.*

Petre Bătrâneţu, Galaţi

Soluţie. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD = AC = 1$; atunci $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{C}) = 20°$. Pe de altă parte, $\widehat{ADC}$ este unghi exterior triunghiului ABD, prin urmare $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{B})$. Obţinem de aici că $m(\widehat{DAB}) = 10°$, aşadar $\triangle DAB$ este isoscel cu $DA = DB = 1$. Inegalitatea triunghiului aplicată în triunghiurile ACD şi DAB arată că $DC < AD + AC < 2$, iar $AB < AD + BD = 2$. Astfel, $P_{ABC} = AB + (BD + DC) + AC < 2 + (1 + 2) + 1 = 6$.

Clasa a VII-a

VII.151. *Comparaţi numerele $A = 4\sqrt{8 + \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$ şi $B = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{3} + 1)\sqrt{5 - \sqrt{5}}$.*

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

Soluţie. Efectuând calculele, se constată că $A^2 = B^2 = 128 + 16\sqrt{3} + 16\sqrt{15} + 16\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Cum $A > 0$ şi $B > 0$, rezultă că $A = B$.

VII.152. *Determinaţi numerele prime p, q şi r, ştiind că $2^p = 2012 + q^2r^2$.*

Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

Soluţie. Deoarece $2^p > 2012$, deducem că $p \geq 11$. Pentru $p = 11$ obţinem că $qr = 6$, deci $(q, r) \in \{(2, 3); (3, 2)\}$. Vom arăta că acestea sunt singurele soluţii ale problemei.

Pentru $p \geq 13$, cum 2^p şi 2012 sunt numere pare, deducem că r sau q este număr par, aşadar $r = 2$ sau $q = 2$. Fie, de exemplu, $q = 2$ şi notăm $p - 2 = s$, cu s impar $s \geq 11$. Împărţind prin 4 egalitatea dată, ajungem la $2^s = 503 + r^2$. Însă $2^s = 2^{2k+1} = (2^2)^k \cdot 2 = (3 + 1)^k \cdot 2 = (M_3 + 1) \cdot 2 = M_3 + 2$, $503 = M_3 + 2$, deci $r^2 = M_3$. Singurul număr prim care se divide cu 3 este $r = 3$, caz în care $s = 9$, contradicţie!

VII.153. *Dacă n este număr natural par, arătaţi că putem alege $p \in \{3, 5, 6\}$ astfel încât numărul $2^n + 5^n + p$ să fie multiplu al lui 7.*

Radu Gologan, Bucureşti

Soluţie. Avem $2^n + 5^n = 2^n + (7 - 2)^n = 2^n + M_7 + (-2)^n = M_7 + 2 \cdot 2^n = M_7 + 2^{n+1}$ (am ţinut seama de paritatea lui n). Dacă $n + 1 = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $2^{n+1} = (2^3)^k = (7 + 1)^k = M_7 + 1$ şi alegem $p = 6$. Dacă $n + 1 = 3k + 1$, atunci

$2^{n+1} = (2^3)^k \cdot 2 = M_7 + 2$ şi luăm $p = 5$. În sfârşit, dacă $n + 1 = 3k + 2$, avem că $2^{n+1} = (2^3)^k \cdot 2^2 = M_7 + 4$, deci putem considera $p = 3$.

VII.154. *Demonstraţi că nu există numere întregi x cu proprietatea că*

$$x^5 + (x+1)^5 + \ldots + (x+10)^5 = 13311332.$$

Ştefan Dominte, elev, Iaşi

Soluţie. Resturile la împărţirea prin 11 a termenilor sumei din stânga sunt $0, 1, 10, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 1, 10$ (sau o permutare circulară a acestora), prin urmare suma din stânga se divide cu 11. Cum numărul 13311332 dă restul 1 la împărţirea prin 11, egalitatea din enunţ nu poate avea loc.

VII.155. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale nenule a, b, c, d astfel încât $a^3 = b^2 + c^4 + d^8$.*

Lucian Tuţescu, Craiova

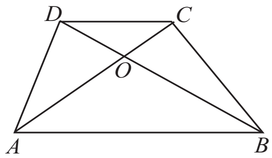
Soluţie. Observăm că $(3^3)^3 = (3^4)^2 + (3^2)^4 + 3^8$. Cum c.m.m.m.c. al exponenţilor $3, 2, 4$ şi 8 este 24, numerele de forma $a = k^8 \cdot 3^3$, $b = k^{12} \cdot 3^4$, $c = k^6 \cdot 3^2$, $d = k^3 \cdot 3$, $k \in \mathbb{N}^*$, formează o familie infinită de soluţii pentru ecuaţia dată.

VII.156. *Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD, astfel încât raportul $k = \dfrac{AB}{CD}$ este număr raţional. Notăm $\{O\} = AC \cap BD$.*

a) *Arătaţi că* $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOB}}} \in \mathbb{Q}$ *şi* $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{COD}}} \in \mathbb{Q}$.

b) *Dacă, în plus,* $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, *atunci* $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOD}}} \in \mathbb{Q}$ *şi* $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{BOC}}} \in \mathbb{Q}$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

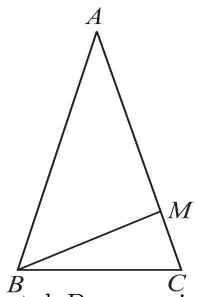


Soluţie. a) Din $\triangle AOB \sim \triangle COD$ şi $\dfrac{AB}{CD} = k$, rezultă că $\dfrac{A_{AOB}}{A_{COD}} = k^2$. Apoi, $\dfrac{A_{AOB}}{A_{AOD}} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{A_{AOD}}{A_{COD}}$, deci $A_{AOD} = \sqrt{A_{AOB} \cdot A_{COD}}$. Atunci $A_{ABCD} = A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COD} + A_{AOD} = k^2 \cdot A_{COD} + A_{COD} + 2A_{AOD} = (k^2+1)A_{COD} + 2\sqrt{k^2 \cdot A_{COD}^2} = (k+1)^2 \cdot A_{COD}$, prin urmare $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{COD}}} = k+1 \in \mathbb{Q}$. Analog se arată că $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOB}}} = \dfrac{k+1}{k} \in \mathbb{Q}$.

b) Cum $A_{AOD} = A_{BOC}$, este suficient să dovedim prima afirmaţie. Avem $\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOD}} = 2 + \dfrac{A_{AOB}}{A_{AOD}} + \dfrac{A_{COD}}{A_{AOD}} = 2 + \dfrac{BO}{DO} + \dfrac{CO}{AO} = 2 + k + \dfrac{1}{k} = \left(\dfrac{k+1}{\sqrt{k}}\right)^2$ şi, cum $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, rezultă că $\sqrt{\dfrac{A_{ABCD}}{A_{AOD}}} \in \mathbb{Q}$.

VII.157. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) < m(\widehat{B})$ şi fie M un punct pe latura AC. Demonstraţi că $\widehat{MBC} \equiv \widehat{A}$ dacă şi numai dacă $MB^2 = AC \cdot MC$.*

Mirela Marin, Iaşi



Soluţie. Dacă $\widehat{MBC} \equiv \widehat{A}$, triunghiurile BMC şi ABC sunt asemenea, deci $BM = BC$ şi $\dfrac{MC}{BC} = \dfrac{BM}{AB}$. De aici, rezultă că $MB^2 = AC \cdot MC$. Reciproc, fie $AB = AC = a$ şi $CM = x$, astfel încât $MB = \sqrt{ax}$. Din relaţia lui Stewart $BC^2 \cdot AM - BM^2 \cdot AC + AB^2 \cdot MC = MC \cdot AM \cdot AC$, obţinem că $BC^2(a-x) - ax \cdot a + a^2x = x(a-x)a$, adică $BC = \sqrt{a \cdot x}$. Rezultă că $BC = MB$, de unde $m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{A}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$.

Pentru o altă demonstraţie a reciprocei, se poate considera punctul D pe semidreapta $(BC$ astfel încât $BM = MD$. Folosind cazul I de asemănare se arată că $\triangle ABM \sim \triangle DMC$, de unde obţinem că $\widehat{D} \equiv \widehat{A}$. Însă $\widehat{D} \equiv \widehat{MBC}$ şi de aici rezultă concluzia problemei.

Clasa a VIII-a

VIII.144. *Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, demonstraţi identitatea*

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)^2 = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Notăm $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$, cu $x + y + z = 0$. Trebuie să dovedim că $x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2$. Cum $z = -x - y$, această ultimă identitate revine la $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$, care se verifică prin calcul direct.

VIII.152. *Determinaţi numerele reale x, y şi z pentru care $x^2 - y^2 = x - y + 2z$, $y^2 - z^2 = y + z + 2x$ şi $z^2 - x^2 = x - z + 2y$.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Adunând ultimele două ecuaţii, găsim că $(x+y)(y-x-3) = 0$, de unde $y = -x$ sau $y = x + 3$. În primul caz, relaţiile din problemă se reduc la $x + z = 0$, deci $x = a$, $y = z = -a$, cu $a \in \mathbb{R}$. În al doilea caz obţinem, după înlocuire, că $-6x - 9 = -3 + 2z$; $x^2 + 3x + 6 = z^2 + z \Leftrightarrow z = -3x - 3$; $2x^2 + 3x = 0$, prin urmare $(x, y, z) \in \{(0, 3, -3); (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})\}$. În concluzie, $S = \{(a, -a, -a) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 3, -3)\}$.

VIII.153. *Fie numerele a, x, y, z reale, pozitive şi astfel încât $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \geq a$. Arătaţi că $x + y + z \geq \sqrt{3a}$.*

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

Soluţie. Avem că $x\dfrac{y+z}{2} + y\dfrac{z+x}{2} + z\dfrac{x+y}{2} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \geq a$, deci $x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) \geq 2a$. Obţinem de aici că $xy + yz + zx \geq a$. Însă $(x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, prin urmare $x + y + z \geq \sqrt{3a}$.

VIII.154. *Dacă $n \in \mathbb{Z}$, considerăm $A_n = n^6 + (n+3)^6 + (3n+4)^6 + (3n+5)^6$. Demonstraţi că A_n se divide cu $2n^2 + 6n + 5$.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Întrucât $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $a^2 + b^2 | a^6 + b^6$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Deducem de aici că $n^2 + (3n+5)^2 | n^6 + (3n+5)^6 \Leftrightarrow$

$10n^2+30n+25|n^6+(3n+5)^6$ şi că $(n+3)^2+(3n+4)^2|(n+3)^6+(3n+4)^6 \Leftrightarrow 10n^2+30n+25|(n+3)^6+(3n+4)^6$. Cum $2n^2+6n+5|10n^2+30n+25$, rezultă că $2n^2+6n+5|A_n$.

VIII.155. *Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$, calculaţi xyz.*

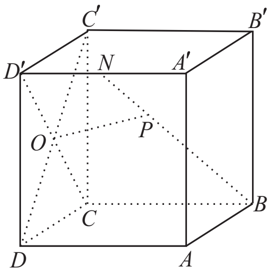
Lenuţa Andrei, Craiova

Soluţie. Din $x^2+y^2+z^2=1$ rezultă că $|x|\le 1$, $|y|\le 1$ şi $|z|\le 1$. Dacă $x, y, z \in [-1,1]\setminus\{0\}$, din $x^2(x-1)+y^2(y-1)+z^2(z-1)=0$ urmează că $x=y=z=1$, fals. Rămâne că unul dintre numerele x, y sau z este zero, aşadar $xyz=0$.

VIII.156. *În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a, notăm cu N mijlocul muchiei $A'D'$. Arătaţi că dreptele BN şi DC' sunt perpendiculare şi calculaţi distanţa dintre ele.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Observăm că $DC' \perp (A'BC)$ (deoarece $DC' \perp CD'$ şi $DC' \perp BC$) şi, cum $BN \subset (A'BC)$, rezultă că $DC' \perp BN$.



Fie $\{O\}=DC'\cap CD'$ şi $P=Pr_{BN}O$; evident că $OP \subset (A'BC)$ şi, deoarece $DC' \perp (A'BC)$, obţinem că $DC' \perp OP$. Deducem că OP este perpendiculara comună a dreptelor BN şi DC', prin urmare $\operatorname{dist}(BN, DC')=OP$. Pentru a afla lungimea segmentului OP, calculăm în două moduri aria triunghiului BON: $\mathcal{A}_{BON}=\mathcal{A}_{BCD'A'}-\mathcal{A}_{BCO}-\mathcal{A}_{BA'N}-\mathcal{A}_{OD'N}=\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{8}$ şi $\mathcal{A}_{BON}=\dfrac{BN\cdot OP}{2}=\dfrac{3a}{4}\cdot OP$, aşadar $OP=\dfrac{3a^2\sqrt{2}}{8}:\dfrac{3a}{4}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

VIII.157. *Arătaţi că suma distanţelor de la centrul de greutate al unui tetraedru la feţele sale este cel puţin egală cu suma distanţelor de la centrul sferei înscrise în tetraedru la feţele acestuia.*

Aurel Bârsan, Braşov

Soluţie. Notăm cu d_i distanţa de la G la faţa de arie S_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ şi cu r reza sferei înscrisă în tetraedru. Cum G împarte tetraedrul în patru tetraedre cu acelaşi volum, rezultă că $d_1S_1=d_2S_2=d_3S_3=d_4S_4=\dfrac{3V}{4}$, unde V este volumul tetraedrului. Deducem că $d_1+d_2+d_3+d_4=\dfrac{3V}{4}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\dfrac{1}{S_4}\right)\ge \dfrac{3V}{4}\dfrac{16}{S_1+S_2+S_3+S_4}$, conform inegalităţii dintre media armonică şi cea aritmetică. Însă $\dfrac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}=r$ şi de aici urmează concluzia problemei. Egalitatea se atinge în cazul tetraedrului echifacial.

Clasa a IX-a

IX.131. *Rezolvaţi ecuaţiile*: a) $x[x]+x\{x\}+\{x\}[x]=x^2+[x]^2+\{x\}^2$; b) $x[x]+x\{x\}+\{x\}[x]=-\dfrac{5}{4}$.

Mariana Mărculescu, Craiova

Soluţie. a) Se ştie că $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow a=b=c$, prin urmare relaţia dată are loc doar dacă $x=[x]=\{x\}$. Atunci $x\in\mathbb{Z}\cap[0,1)=\{0\}$, deci singura soluţie a ecuaţiei este $x=0$.

b) Ecuaţia dată se scrie sub forma $x([x]+\{x\})+\{x\}(x-\{x\})+\dfrac{5}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+\{x\}x+\dfrac{5}{4}-\{x\}^2=0$, cu discriminantul $\Delta=\{x\}^2+4\{x\}^2-5<0$ (deoarece $\{x\}^2<1$). Rezultă că ecuaţia nu are soluţii.

IX.132. *Demonstraţi că* $\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n+1)^2}}{2}\right]=\left[\dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Notăm $x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2}$, $y_n=\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n+1)^2}}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Cum $x_n,y_n\in(n,n+1)$, $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $[x_n]=[y_n]=n$.

IX.133. *Determinaţi şirul de numere reale* $(a_n)_{n\geq1}$ *din intervalul* $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, *ştiind că şirurile* $(\sin a_n)_{n\geq1}$ *şi* $(\cos a_n)_{n\geq1}$ *sunt progresii geometrice.*

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. Cum $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, şirurile $(\sin a_n)_{n\geq1}$ şi $(\cos a_n)_{n\geq1}$ au termenii strict pozitivi. Avem $\sin^2 a_n=\sin a_{n-1}\sin a_{n+1}$, iar $\cos^2 a_n=\cos a_{n-1}\cos a_{n+1}$. Adunând, apoi scăzând membru cu membru aceste egalităţi, obţinem că $1=\cos(a_{n+1}-a_{n-1})$, respectiv $\cos 2a_n=\cos(a_{n+1}+a_{n-1})$. Cum $a_{n+1}-a_{n-1}\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, rezultă că $a_{n+1}-a_{n-1}=0$, deci $a_{n+1}=a_{n-1}$, $\forall n\geq2$. Deducem $\cos 2a_n=\cos 2a_{n+1}$ şi, întrucât $a_n\in(0,1)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, urmează că $a_n=a_{n+1}$, $\forall n\geq1$. Evident că toate şirurile constante verifică ipotezele problemei.

IX.134. *Fie* $(\Delta_n=A_nA_{n+1}A_{n+2})_{n\geq1}$ *un şir de triunghiuri dreptunghice coplanare, fiecare având câte un unghi ascuţit de* $30°$, *astfel încât ipotenuza* A_nA_{n+1} *a lui* Δ_{n+1} *este cateta opusă unghiului de* $30°$ *în triunghiul* Δ_n, *iar celelalte două laturi ale lui* Δ_{n+1} *sunt în interiorul lui* Δ_n, *oricare ar fi* $n\in\mathbb{N}^*$. *Demonstraţi că există un unic punct* M *situat în interiorul tuturor triunghiurilor* Δ_n, *iar distanţele* $a_n=MA_n$ *formează o progresie geometrică de raţie* $q=\dfrac{1}{2}$.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Notăm $\Delta_n=A_nA_{n+1}A_{n+2}$; şirul de puncte $(A_n)_{n\geq1}$ se obţine recurent astfel: A_{n+3} este proiecţia lui A_{n+1} pe mediana corespunzătoare ipotenuzei A_nA_{n+1} a triunghiului Δ_n, care este dreptunghic cu $m(\widehat{A}_{n+1})=60°$. Se observă că triunghiurile Δ_n şi Δ_{n+3}, $n\in\mathbb{N}^*$, sunt omotetice, toate cu acelaşi centru de omotetie M şi în acelaşi raport de omotetie. Poziţia punctului M este determinată prin $\{M\}=A_1A_4\cap A_2A_5\cap A_3A_6$. Considerând reprezentarea analitică $A_1(0,\sqrt{3})$; $A_2(1,0)$; $A_3(0,0)$, obţinem: $A_4\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $A_5\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$; $A_6\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$ şi $M\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$. Atunci $a_1=2^2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{7}$,

$a_2 = 2^1 \dfrac{\sqrt{7}}{7}$, $a_3 = 2^0 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{7}$, $a_4 = 2^{-1} \dfrac{\sqrt{7}}{7}$, rezultând o progresie geometrică de raţie $q = \dfrac{1}{2}$.

IX.135. *Arătaţi că două triunghiuri care au egale perimetrele, razele cercurilor înscrise şi câte o înălţime sunt congruente.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Fie $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ astfel încât $p = p'$, $r = r'$ şi $h_a = h'_a$. Avem că $S = pr = p'r' = S'$, deci $a = \dfrac{2S}{h_a} = \dfrac{2S'}{h'_a} = a'$. Apoi, $A = A'$; într-adevăr, $r = (p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ şi $r' = (p'-a')\operatorname{tg}\dfrac{A'}{2}$ conduc la $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{A'}{2}$, de unde rezultă relaţia indicată. Atunci $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{a'}{2\sin A'} = R'$, apoi $abc = 4RS = 4R'S' = a'b'c'$, prin urmare $bc = b'c'$. Avem însă şi că $b + c = p - a = p' - a' = b' + c'$, aşadar perechile (b, c) şi (b', c') au aceeaşi sumă şi acelaşi produs. Obţinem că $b = b'$, $c = c'$ sau $b = c'$, $c = b'$ şi, în ambele situaţii, între triunghiurile $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ există câte o congruenţă.

Clasa a X-a

X.131. *Într-o urnă se află* 2 *bile albe şi* 3 *bile negre, iar în altă urnă se află* 4 *bile albe şi* 1 *bilă neagră. Se alege aleator o urnă, din care se extrage o bilă. Considerăm evenimentul B: bila extrasă este albă, iar A este un eveniment compatibil cu B astfel încât $P(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ şi $P_A(B) = P(B)$. Calculaţi $P(A)$.*

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Considerăm evenimentele A_i: se alege urna U_i, $i = 1, 2$; atunci $P(B) = P_{A_1}(B) \cdot P(A_1) + P_{A_2}(B) \cdot P(A_2) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$. Apoi, cum $P_A(B) = P(B)$, rezultă că $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Evenimentele A şi B fiind compatibile, avem că $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$, de unde $\dfrac{4}{5} = P(A) + \dfrac{3}{5} - P(A)\dfrac{3}{5}$, prin urmare $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

X.132. *Demonstraţi că* $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 70°} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 50°} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 10°} \geq 3.$

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. Remarcăm întâi că numitorul fiecărei fracţii este strict pozitiv. Folosind inegalitatea lui Bergström, obţinem că suma din membrul stâng este cel puţin egală cu

$$\frac{(1+1+1)^2}{\log_{\frac{1}{2}} \sin 70° + \log_{\frac{1}{2}} \sin 50° + \log_{\frac{1}{2}} \sin 10°} = \frac{9}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}} = 3.$$

Am folosit identitatea $\sin 70° \cdot \sin 50° \sin 10° = \dfrac{1}{8}$, care se demonstrează uşor transformând produsele în sume.

X.133. *Determinaţi tripletele de numere complexe nenule* (x,y,z) *pentru care* $\dfrac{1}{x^6+\overline{x}^6}+\dfrac{1}{y^6+\overline{y}^6}+\dfrac{1}{z^6+\overline{z}^6}=\dfrac{3}{2|xyz|^2}$.

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Se arată imediat că $z^2+\overline{z}^2\le 2|z|^2$, $\forall z\in\mathbb{C}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $z\in\mathbb{R}$. Atunci, ţinând cont şi de inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{3}{2|xyz|^2}=\frac{1}{(x^3)^2+(\overline{x}^3)^2}+\frac{1}{(y^3)^2+(\overline{y}^3)^2}+\frac{1}{(z^3)^2+(\overline{z}^3)^2}\ge$$
$$\ge\frac{1}{2|x^3|^2}+\frac{1}{2|y^3|^2}+\frac{1}{2|z^3|^2}\ge\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{|xyz|^6}}=\frac{3}{2|xyz|^2}.$$

Astfel, inegalităţile devin egalităţi; deducem că $x^3,y^3,z^3\in\mathbb{R}$ (de unde $x^6,y^6,z^6\in\mathbb{R}_+$) şi $|x|^6=|y|^6=|z|^6$, prin urmare $x^6=y^6=z^6$, deci $\pm x^3=\pm y^3=\pm z^3$. Notând, de exemplu, $z=\alpha\in\mathbb{C}^*$, unde $\alpha^6\in\mathbb{R}_+$, iar $x,y\in\{\pm\alpha,\pm\varepsilon\alpha,\pm\varepsilon^2\alpha\}$, unde $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ este rădăcina primitivă de ordin trei a unităţii, iar tripletele (x,y,z) având aceste forme verifică ipoteza problemei.

X.134. *Fie* A *şi* B *două puncte fixate pe un cerc de centru* O *şi rază* R, *astfel încât* $m(\widehat{AOB})=2\alpha<90^\circ$. *Determinaţi două puncte* C *şi* D *ale cercului astfel încât aria patrulaterului* $ABCD$ *să fie maximă.*

Adrian Corduneanu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Fie C,D puncte pe cerc astfel încât arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ să aibă măsurile α_1,α_2 respectiv α_3; evident, vom considera punctele C şi D pe arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ şi atunci $2\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\pi$, $0<\alpha_i<\pi$. Avem că $\mathcal{A}_{ABCD}=\dfrac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)$, deci avem de maximizat suma $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3$. Funcţia sinus fiind concavă pe $(0,\pi)$, din inegalitatea lui Jensen obţinem că $\dfrac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3}{3}\le\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}=\sin\dfrac{2\pi-2\alpha}{3}$, prin urmare $\mathcal{A}_{ABCD}\le\dfrac{1}{2}R^2\left(\sin 2\alpha+3\sin\dfrac{2(\pi-\alpha)}{3}\right)$. Se constată că această valoare maximă a ariei se atinge în cazul în care $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dfrac{2(\pi-\alpha)}{3}$, deci două puncte C,D cu proprietăţile din enunţ se pot găsi considerând trapezul isoscel $ABCD$ cu $BC=CD=DA$.

X.135. *Demonstraţi că în orice triunghi* ABC *are loc inegalitatea*

$$\frac{\cos^2 A}{\sin B\cdot\sin C}+\frac{\cos^2 B}{\sin A\cdot\sin C}+\frac{\cos^2 C}{\sin A\cdot\sin B}\ge 1.$$

I.V. Maftei, Bucureşti şi Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Inegalitatea se rescrie succesiv astfel:

$$\sum\frac{1-\sin^2 A}{\sin B\cdot\sin C}\ge 1\Leftrightarrow\sum\frac{4R^2-a^2}{bc}\ge 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)\ge abc\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4R^2\cdot 2p-2p(p^2-3r^2-6Rr)\ge 4Rrp\Leftrightarrow p^2\le 4R^2+3r^2+4Rr.$$

Această inegalitate este o consecinţă a cunoscutei $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$.

Clasa a XI-a

XI.131. *Se consideră un triunghi ABC, cu notaţii uzuale. Arătaţi că $S = \frac{1}{4}\sqrt{|V(a,b,c)|}$, unde $V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$.*

Constantin Dragomir, Piteşti

Soluţia 1 (dată de elevele **Nicoleta Sîrghi**, Iaşi, **Monica Golea** şi **Andreea Enuca**, Craiova)**.** Dezvoltând determinantul după prima linie, obţinem că $V(a,b,c) = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = -16S^2$, după o formulă binecunoscută pentru arie, şi, de aici, concluzia problemei.

Soluţia 2 (a autorului)**.** Considerăm polinomul de grad IV: $P(X) = \begin{vmatrix} 0 & X & b & c \\ X & 0 & c & b \\ b & c & 0 & X \\ c & b & X & 0 \end{vmatrix}$.
Se observă că $P(b+c) = P(-b-c) = P(b-c) = P(c-b) = 0$, şi, cum P are coeficientul dominant 1, rezultă că $P(X) = (X+b+c)(X-b-c)(X-b+c)(X+b-c)$. Deducem că $V(a,b,c) = P(A) = -16p(p-a)(p-b)(p-c)$ şi, de aici, concluzia urmează ţinând cont de formula lui Heron.

XI.132. *Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ care au proprietatea că $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)\cdot 2012^{2xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, iar $f(1) = 2012^2$.*

Carmen Liana Georgescu, Craiova

Soluţie. Definim funcţia auxiliară $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ prin $f(x) = g(x)\cdot 2012^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funcţia g este continuă, iar $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; rezultă că $g(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $a \in (0,\infty)$. Cum $g(1) = \dfrac{f(1)}{2012} = 2012$, obţinem că $a = 2012$ şi atunci $f(x) = 2012^x \cdot 2012^{x^2} = 2012^{x+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

XI.133. *Dacă $u_n = \dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{u_1u_2\ldots u_{n+1}} - \sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}\right)$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Notând a_n şirul a cărui limită trebuie calculată şi $v_n = \dfrac{\sqrt[n+1]{u_1u_2\ldots u_{n+1}}}{\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}}$, $\forall n \geq 2$, avem că

$$a_n = \sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}(v_n - 1) = \frac{\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}}{n}\cdot\frac{v_n - 1}{\ln v_n}\ln v_n^n,\ \forall n \geq 2.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{u_1u_2\ldots u_n}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_1u_2\ldots u_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{u_1u_2\ldots u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}(n+1)} = \dfrac{1}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2}\dfrac{n+2}{n+1} =$

$\dfrac{1}{e}\cdot e\cdot 1$; obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n-1}{\ln v_n} = 1$; în sfârşit, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n^n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{\sqrt[n+1]{u_1u_2\dots u_{n+1}}} = e\cdot 1 = e$. În aceste condiţii, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\cdot 1\cdot \ln e = 1$.

XI.134. *Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Dacă $A^2 = \{x^2 : x\in A\}$, determinaţi intervalele mărginite de numere reale $I\subset\mathbb{R}$ care satisfac relaţia $I^2 = I$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie $I=[a,b]$ un interval pentru care $I^2=I$; evident că $b>a\geq 0$. Din Din continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, rezultă că $I^2=[a^2,b^2]$, prin urmare $a^2=a$, $b^2=b$. Deducem că $a=0$, $b=1$. Analog se tratează situaţiile $I=(a,b)$, $I=(a,b]$ şi $I=[a,b)$; intervalele nedegenerate care satisfac enunţul sunt cele cu extremităţile 0 şi 1.

XI.135. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 cu proprietatea că $(b-a)f'(a) = f(b)-f(a)$. Demonstraţi că există $c\in(a,b)$ pentru care $f'(c)-f''(c)=f'(a)$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Considerăm funcţia auxiliară $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x}[f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)]$. Din enunţ, avem că g este derivabilă pe $[a,b]$ şi $g(a)=g(b)=0$; folosind teorema lui Rolle, rezultă că există $\alpha\in(a,b)$ astfel încât $g'(\alpha)=0$, altfel spus $f(\alpha)-f(a)-(\alpha-a)\cdot f'(a) = f'(\alpha)-f'(a)$.

Aplicăm acum teorema lui Rolle funcţiei $h:[a,\alpha]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f'(x)-f'(a)-[f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)]$ şi găsim $c\in(a,\alpha)$ pentru care $h'(c)=0$. Însă $h'(x) = f''(x)-f'(x)+f'(a)$ şi de aici urmează cerinţa problemei.

Clasa a XII-a

XII.131. *Fie $n\geq 2$ un număr natural pentru care există un element $\widehat{a}$ al inelului $\mathbb{Z}_n$ cu proprietatea că $-\widehat{a}=\widehat{a}^{-1}$.*

a) *Dacă $a<\sqrt{n}$, demonstraţi că $n=a^2+1$.*

b) *Arătaţi că există $n\geq 2$ şi a astfel încât $n\neq a^2+1$.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. a) Din $-\widehat{a}=\widehat{a}^{-1}$ rezultă că $\widehat{a}^2+1=\widehat{0}$, deci $n|a^2+1$. Însă $a<\sqrt{n}$, prin urmare $a^2+1\leq n$ şi atunci $a^2+1=n$.

b) De exemplu, putem considera $n=13$, $a=5$.

XII.132. *Fie $p\geq 5$ un număr prim. Demonstraţi că numărul $3^{p-1}-2^{p-1}$ se divide cu p, însă 3^p-2^p nu se divide cu p.*

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

Soluţie. Numărul p fiind relativ prim cu 2 şi cu 3, din teorema lui Fermat rezultă că $3^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$, $2^{p-1}\equiv 1\pmod{p}$, prin urmare $3^{p-1}-2^{p-1}\equiv 0\pmod{p}$. Pe de altă parte, $3^p\equiv 3\pmod{p}$, $2^p\equiv 2\pmod{p}$, aşadar $3^p-2^p\equiv 1\pmod{p}$, adică 3^p-2^p nu se divide cu p.

XII.133. *Funcţia derivabilă $g:\mathbb{R}\to Im\,g$ are proprietatea că $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, iar $f: Img\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă astfel încât $f'(g(x))=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că g este inversabilă, iar f este o primitivă a lui g^{-1}.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Funcţia g este strict monotonă, deci $g : \mathbb{R} \to Img$ este inversabilă, cu inversa continuă pe intervalul Img. Dacă H este o primitivă a lui g^{-1}, atunci $f'(g(x)) \cdot g'(x) = x \cdot g'(x) = g^{-1}(g(x))g'(x) = H'(g(x)) \cdot g'(x)$, prin urmare există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x)) = H(g(x)) + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deducem că $f(x) = H(x) + k$ $\forall x \in Img$.

XII.134. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ o funcţie integrabilă. Arătaţi că*

$$\prod_{k=0}^{n} \int_a^b f^{2^k}(x)dx \le (b-a)^n \int_a^b f^{2^{n+1}-1}(x)dx.$$

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Folosind inegalitatea C-B-S, forma integrală, avem:

$$\int_a^b f^{2^{n+1}-1}(x)dx \cdot \int_a^b f(x)dx \ge (\int_a^b \sqrt{f^{2^{n+1}-1}(x)} \cdot \sqrt{f(x)}dx)^2 =$$

$$= \left(\int_a^b f^{2^n}(x)dx \right)^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{2^n}(x)dx \cdot \left(\int_a^b f^{2^n} f(x)dx \cdot \int_a^b 1^2 dx \right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{2^n}(x)dx \left(\int_a^b f^{2^{n-1}}(x)dx \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f^{2^n}(x)dx \cdot \int_a^b f^{2^{n-1}}(x)dx \left(\int_a^b f^{2^{n-1}}(x)dx \cdot \int_a^b 1^2 dx \right) \ge$$

$$\ge \ldots \ge \frac{1}{(b-a)^n} \left(\prod_{k=1}^{n} \int_a^b f^{2^k}(x)dx \right) \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 .$$

Dacă $\int_a^b f(x)dx \ne 0$, atunci $\int_a^b f(x)dx > 0$; simplificiăm prin această cantitate şi se obţine inegalitatea dorită. Dacă $\int_a^b f(x)dx = 0$, inegalitatea din enunţ este evidentă.

XII.135. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie impară şi continuă; arătaţi că*

$$\int_0^{2\pi} xf(\cos x + \sin x)dx = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x + \sin x)dx.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Notăm $I_k = \displaystyle\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} xf(\cos x + \sin x)dx$, $k = \overline{1,4}$; integrala din membrul stâng va fi egală cu $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I$. În I_2, I_3 şi I_4 facem schimbările de variabilă $y = x - \dfrac{\pi}{2}$, $y = x - \pi$, respectiv $y = x - \dfrac{3\pi}{2}$; obţinem că $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \frac{\pi}{2}) f(\cos x - \sin x)dx$, $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \pi) f(-\cos x - \sin x)dx$, respectiv $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x + \frac{3\pi}{2}) f(-\cos x + \sin x)dx$.

Folosind imparitatea lui f, rezultă că

$$I = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x + \sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\pi)f(\cos x + \sin x)dx\right) +$$
$$+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\frac{\pi}{2})f(\cos x - \sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\frac{3\pi}{2})f(\cos x - \sin x)dx\right) =$$
$$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x + \sin x)dx - \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x - \sin x)dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $\frac{\pi}{2}-x=y$, obţinem că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x - \sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x - \cos x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x - \sin x)dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x - \sin x)dx = 0$ şi concluzia problemei se impune.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2012

A. Nivel gimnazial

G226. *Câte dintre numerele de trei cifre în baza* 10 *se pot scrie sub forma* $\overline{abc}+\overline{ab}+a$*?*

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie. Arătăm mai întâi că $\overline{abc}+\overline{ab}+a=\overline{def}+\overline{dc}+d \Leftrightarrow \overline{abc}=\overline{def}$. Implicaţia reciprocă este evidentă, iar $111a+11b+c=111d+11c+f \Rightarrow 111|11e+f-11b-c$, $-108 \le 11e+f-11b-c \le 108 \Rightarrow 11e+f=11b+c \Rightarrow 11|f-c$, $-9 \le f-c \le 9 \Rightarrow f=c \Rightarrow e=b \Rightarrow a=d \Rightarrow \overline{abc}=\overline{def}$. Avem aşadar $9\cdot 10\cdot 10=900$ de numere distincte de forma $\overline{abc}+\overline{ab}+a$, toate cel puţin egale cu 100. Numere mai mari de 999 obţinem numai dacă $a=9$ şi b,c nu sunt ambele nule. În concluzie, există $8\cdot 10\cdot 10+1=801$ numere de această formă.

G227. *Se consideră mulţimea* $M=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{100}\right\}$. *Demonstraţi că pentru fiecare* $n\in\{3,4,\ldots,15\}$, *există o submulţime* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ *a lui* M *şi o alegere convenabilă a semnelor astfel încât* $a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n=0$.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Observăm că

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0 \quad (1),\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=0 \quad (2),\quad \frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{56}=0 \quad (3),$$
$$\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{90}=0 \quad (4),\ \text{iar}\ \frac{1}{12}-\frac{1}{18}-\frac{1}{24}+\frac{1}{36}-\frac{1}{72}=0 \quad (5).$$

Luând (2), (1), (5), (2)+(3), (1)+(2), (2) + (5), (1)+(5), (1)+(2) +(3), (2)+(3)+(5), (1)+(2)+(5), (1)+(2)+(3)+(4), (2)+(3)+(4)+(5), (1)+(3)+(4)+(5), obţinem cerinţa problemei.