Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor propuse în nr. 2/2011

A. Nivel gimnazial

G206. *Câte submulţimi ale mulţimii* $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ *au* 50 *de elemente şi nu conţin nicio pereche de numere consecutive?*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{50}\}$ cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_{50}$ şi $x_2 - x_1 \geq 2$, $x_3 - x_2 \geq 2, \ldots, x_{50} - x_{49} \geq 2$. Evident, cel mult una dintre aceste inegalităţi poate fi strictă. Dacă toate inegalităţile se transformă în egalităţi, atunci $A = \{x_1, x_1 + 2, \ldots, x_1 + 98\}$, cu $x_1 = 1$ sau $x_1 = 2$. Dacă există o inegalitate strictă, atunci $A = \{1, 3, \ldots, 2n-1, 2n+2, 2n+4, \ldots, 100\}$, cu $n \in \{1, 2, \ldots, 49\}$. În total, obţinem $2 + 49 = 51$ de submulţimi A cu proprietăţile din enunţ.

G207. *Arătaţi că numărul* $N = 2^{2009} + 3^{2010} + 4^{2011}$ *nu este pătrat perfect.*

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţia 1. Un pătrat perfect dă, la împărţirea prin 13, unul dintre resturile $0, 1, 3, 4, 9, 10$ sau 12. Pe de altă parte, avem că $2^{2009} = 2^5(2^6)^{334} = 32(M_{13}+1)^{334} = 32(M_{13} + 1) = M_{13} + 6$; $3^{2010} = 27^{670} = (M_{13} + 1)^{670} = M_{13} + 1$; $4^{2011} = 4(4^3)^{670} = 4(M_{13} + 1)^{670} = 4(M_{13} + 1) = M_{13} + 4$, prin urmare $N = M_3 + 11$ şi atunci N nu poate fi pătrat perfect.

Soluţia 2. Cum $U(2^{2009}) = 2$, $U(3^{2010}) = 9$, $U(4^{2011}) = 4$, rezultă că $U(N) = 5$. Dacă N ar fi pătrat perfect, penultima sa cifră ar trebui să fie 2. Puterile lui 2 îşi repetă ultimele două cifre din 20 în 20 şi, cum $2009 = M_{20}+9$, atunci 2^{2009} are aceleaşi ultime două cifre ca şi 2^9, adică 12. Puterile lui 3 îşi repetă ultimele două cifre tot din 20 în 20; întrucât $3^{10} = 243^2 = \overline{\ldots 49}$, rezultă că $3^{2010} = \overline{\ldots 49}$. Puterile lui 4 îşi repetă ultimele două cifre din 10 în 10, aşadar $4^{2011} = \overline{\ldots 04}$, fiindcă $2011 = M_{10} + 1$. În final, $N = \overline{\ldots 12} + \overline{\ldots 49} + \overline{\ldots 04} = \overline{\ldots 65}$ şi de aici urmează că N nu poate fi pătrat perfect.

G208. *Demonstraţi că ecuaţia* $x^2 + y^2 = z(x + y + 1)$ *are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale.*

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Notăm $x + y + 1 = t \in \mathbb{N}$; atunci $z = \dfrac{x^2 + (t - x - 1)^2}{t} = t - 2x - 2 + \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{t}$ ar trebui să fie tot număr natural. Alegem $t = 2x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{N}$ şi obţinem că $y = 2x^2 + x$, $z = 2x^2$. În concluzie, tripletele de forma $(n, 2n^2 + n, 2n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, sunt soluţii ale ecuaţei date.

G209. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $4abc = (a + 2)(b + 1)(c + 1)$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Evident că a, b, c sunt nenule. Dacă $a = 1$, ecuaţia poate fi adusă la forma $(b-3)(c-3) = 12$, deci obţinem soluţiile $(1, 15, 4)$; $(1, 4, 15)$; $(1, 9, 5)$; $(1, 5, 9)$; $(1, 7, 6)$; $(1, 6, 7)$. Dacă $b = 1$, ajungem la $(a - 2)(c - 1) = 4$ şi găsim soluţiile $(3, 1, 5)$; $(4, 1, 3)$;

$(6,1,2)$. Analog, când $c=1$ vom avea soluţiile $(3,5,1);(4,3,1);(6,2,1)$. În continuare, fie $a,b,c\geq 2$. Din $a=\dfrac{2(b+1)(c+1)}{4bc-(b+1)(c+1)}\geq 2$ rezultă că $(b-1)(c-1)\leq 2$ şi, de aici, $(b,c)\in\{(2,2);(2,3);(3,2)\}$. Obţinem atunci soluţiile $(2,2,3)$ şi $(2,3,2)$.

G210. *Demonstraţi că fracţia* $\dfrac{a^{3n+2}-a^{3n+1}+(-1)^n}{a^{3n+8}-a^{3n+7}+(-1)^n}$ *este reductibilă pentru orice* $a,n\in\mathbb{N}$, $a\geq 2$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Amplificând fracţia cu $(-1)^n$ şi notând $b=-a$, ar trebui să arătăm că fracţia $\dfrac{b^{3n+2}+b^{3n+1}+1}{b^{3n+8}+b^{3n+7}+1}$ este reductibilă pentru $n\in\mathbb{N}$. Observăm că $b^{3n}=(b^3-1+1)^n=M(b^3-1)+1=M(b^2+b+1)$. Rezultă că $b^{3n+2}+b^{3n+1}+1=[M(b^2+b+1)+b^2]+[M(b^2+b+1)+b]+1=M(b^2+b+1)$ şi, analog, $b^{3n+8}+b^{3n+7}+1=M(b^2+b+1)$, deci fracţia în b se simplifică prin $b^2+b+1\geq 3$ (deoarece $b\in\mathbb{Z}$, $b\leq 2$).

G211. *Demonstraţi că expresia*

$$E=y_1\left(\frac{x_2(a_1+a_2)+x_3a_1}{x_1+x_2+x_3}\right)^2+y_2\left(\frac{x_1(a_1+a_2)+x_3a_2}{x_1+x_2+x_3}\right)^2+$$
$$+y_3\left(\frac{x_1a_1-x_2a_2}{x_1+x_2+x_3}\right)^2-\frac{1}{y_1+y_2+y_3}\cdot$$
$$\cdot\left[-y_1\frac{x_2(a_1+a_2)+x_3a_1}{x_1+x_2+x_3}+y_2\frac{x_1(a_1+a_2)+x_3a_2}{x_1+x_2+x_3}+y_3\frac{x_1a_1-x_2a_2}{x_1+x_2+x_3}\right]^2,$$

unde $a_i,x_i,y_i\in\mathbb{R}_+^*(i=1,2,3)$, *nu depinde* x_1,x_2,x_3.

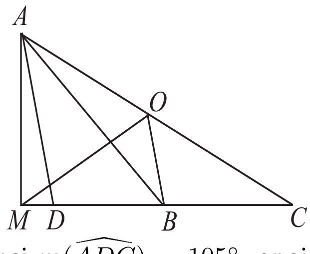
Mircea Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Se scoate forţat în factor $\dfrac{1}{(x_1+x_2+x_3)^2(y_1+y_2+y_3)}$ şi, după calcule ce pun în evidenţă y_1y_2, y_2y_3, y_3y_1, se obţine

$$E=\frac{1}{y_1+y_2+y_3}[y_1y_2(a_1+a_2)^2+y_2y_3a_2^2+y_3y_1a_1^2].$$

G212. *Se consideră triunghiul* ABC *cu* $m(\widehat{B})=135^\circ$ *şi* $m(\widehat{C})=30^\circ$. *Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului* ABD, *unde* D *este simetricul lui* C *faţă de* B.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

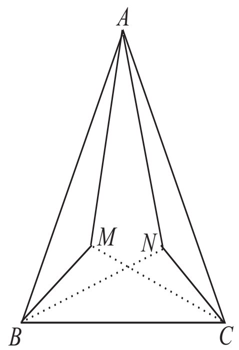


Soluţia 1 (a autorului). Fie $M=\mathrm{Pr}_{BC}A$ şi O mijlocul segmentului AC. Se arată imediat că $\triangle MAB$ este dreptunghic isoscel şi că $\triangle AOM$ este echilateral, prin urmare $MO=MB$, iar $m(\widehat{OMB})=30^\circ$. Rezultă că $m(\widehat{OBM})=75^\circ$, deci $m(\widehat{OBC})=105^\circ$. Pe de altă parte, OB este linie mijlocie în $\triangle CAD$, aşadar $OB\|AD$ şi atunci $m(\widehat{ADC})=105^\circ$, apoi $m(\widehat{DAB})=30^\circ$.

Soluţia 2 (**Titu Zvonaru**). Considerăm punctul D' pe semidreapta opusă lui $(BC$ astfel încât $m(\widehat{BAD'}) = 30°$. Triunghiul ACD' constituie configuraţia din problema VI.143. Cum $m(\widehat{CAB}) = 15°$, rezultă că B este mijlocul lui CD', adică D' coincide cu D. Deducem acum că $m(\widehat{BAD}) = 30°$, $m(\widehat{DBA}) = 45°$, $m(\widehat{ADB}) = 105°$.

G213. *Se consideră triunghiul ABC cu proprietatea că există M şi N puncte în interiorul său astfel încât $BN{=}CM$ şi $\triangle ABM{\sim}\triangle ACN$. Demonstraţi că $AB{=}AC$.*

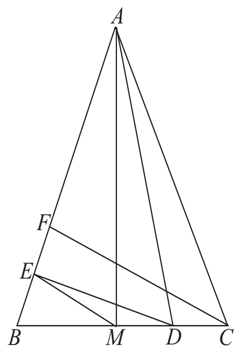
Crisitan Lazăr, Iaşi



Soluţie. Avem că $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BM}{CN} = k$ şi $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{CAM}) = \alpha$. Folosind teorema cosinusului în triunghiurile ABN şi ACM şi ţinând seama de condiţia $BN = CM$, obţinem că $AB^2 + AN^2 - 2AB \cdot AN \cos\alpha = AC^2 + AM^2 - 2AM \cdot AC\cos\alpha \Leftrightarrow k^2AC^2 + AN^2 - 2k \cdot AC \cdot AN \cdot \cos\alpha = AC^2 + k^2AN^2 - 2k \cdot AN \cdot AC \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow k^2AC^2 + AN^2 = AC^2 + k^2AN^2 \Leftrightarrow (k^2 - 1)(AC^2 - AN^2) = 0$. Întrucât $N \in \operatorname{Int} ABC$, nu putem avea $AN = AC$; ar rezulta că $AM = AB$, deci $m(\widehat{ACN}) = \dfrac{1}{2}(180° - \alpha) < m(\widehat{C})$ şi $m(\widehat{ABM}) = \dfrac{1}{2}(180° - \alpha) < m(\widehat{B})$; sumând, am obţine că $180° - \alpha < m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ şi de aici contradicţia $\alpha > m(\widehat{A})$. Rezultă că $AN \neq AC$ şi atunci $k^2 - 1 = 0$, deci $k = 1$ şi de aici urmează cerinţa problemei.

G214. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) < 90°$. Construim înălţimea CF şi fie E mijlocul segmentului BF, iar D un punct pe segmentul BC. Dacă $\widehat{ADE} \equiv \widehat{B}$, arătaţi că D este mijlocul segmentului BC.*

Claudiu Ştefan Popa şi Gabriel Popa, Iaşi



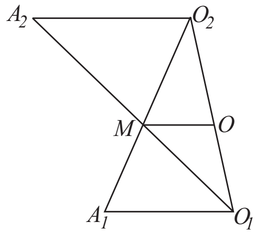
Soluţia 1. Fie M mijlocul lui (BC) şi să presupunem prin absurd că $M \neq D$; considerăm că $D \in (MC)$, cazul $D \in (BM)$ tratându-se similar. Cum ME este linie mijlocie în $\triangle BCF$, rezultă că $ME \| CF$, deci $ME \perp AB$. Deducem că $m(\widehat{AME}) = 90° - m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{B})$, prin urmare $\widehat{AME} \equiv \widehat{ADE}$. Atunci patrulaterul $ADME$ va fi inscriptibil şi rezultă că $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{AMD}) = 90°$. Astfel, în E am putea ridica două perpendiculare distincte pe AB (anume ED şi EM), fapt imposibil! Rămâne că $M \equiv D$, adică D este mijlocul segmentului BC.

Soluţia 2. Deoarece $\triangle ADE \sim \triangle ADB$, rezultă că $AD^2 = AE \cdot AB$. Dacă M este mijlocul lui BC, cum $ME \perp AB$, deducem că $AM^2 = AE \cdot AB$. Obţinem că $AM = AD$, cu $M, D \in (BC)$ şi, de aici, $M \equiv D$.

G215. *În planele paralele P_1 şi P_2 se consideră cercurile $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1, R_1)$, respectiv $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(O_2, R_2)$. Fie $\mathcal{K}_1$ conul de vârf O_2 şi bază $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{K}_2$ conul de vârf O_1 şi bază $\mathcal{C}_2$. Arătaţi că intersecţia celor două conuri este un cerc şi determinaţi poziţia centrului şi mărimea razei acestuia.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Fie P un semiplan limitat de linia centrelor O_1O_2, $\{A_1\} = P \cap \mathcal{C}_1$ şi $\{A_2\} = P \cap \mathcal{C}_2$. În semiplanul P, generatoarele O_2A_1 şi O_1A_2 se intersectează în M, iar paralela prin M la A_1O_1 taie O_1O_2 în O. Din $\triangle MO_1A_1 \sim \triangle MA_2O_2$ rezultă că $\dfrac{MA_1}{MO_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$. Cu teorema lui Thales obţinem că $\dfrac{OO_1}{OO_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$, prin urmare $OO_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot O_1O_2$ (1), relaţie ce determină poziţia lui O pe segmentul O_1O_2. În $\triangle O_2A_1O_1$ cu $MO \| A_1O_1$ avem că $\dfrac{MO}{A_1O_1} = \dfrac{O_2O}{O_2O_1}$, adică $MO = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ (2).



În concluzie, conurile $\mathcal{K}_1$ şi $\mathcal{K}_2$ se intersectează după un cerc situat în planul paralel cu P_1 (şi cu P_2) şi care trece prin punctul O precizat de (1), are centrul în O şi raza OM dată de (2).

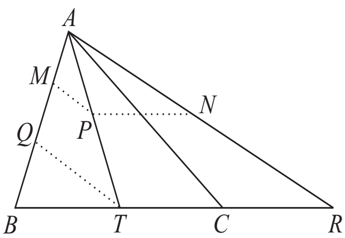
Notă. Problema poate fi generalizată la cazul în care vârfurile V_1 şi V_2 ale conurilor $\mathcal{K}_1$ şi $\mathcal{K}_2$ sunt situate arbitrar pe dreapta O_1O_2 (şi nu neapărat $V_1 \equiv O_2$ şi $V_2 \equiv O_1$). Situaţia se reduce la cea tratată anterior prin înlocuirea planelor P_1 şi P_2 cu planele P_1' (paralel cu P_1 prin punctul V_2) şi, respectiv, P_2' (paralel cu P_2 prin punctul V_1).

B. Nivel liceal

L206. *Fie P un punct pe mediana din A a triunghiului ABC. Paralela prin P la AC taie AB în M, iar simetricul lui P faţă de mijlocul lui AC este N. Arătaţi că $MN \| BC$ dacă şi numai dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC.*

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Fie T mijlocul lui (BC), $k = \dfrac{AP}{AT} \in (0,1)$, $TQ \| MP$ (cu $Q \in AB$) şi $\{R\} = AN \cap BC$. Din $MP \| QT$ rezultă că $\dfrac{AM}{AQ} = \dfrac{AP}{AT} = k$; însă TQ este linie mijlocie în $\triangle ABC$, prin urmare $AQ = \dfrac{1}{2}AB$ şi deducem că $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{k}{2}$. Observăm că $APCN$ este paralelogram, aşadar $AT \| CN$, de unde $\dfrac{RN}{RA} = \dfrac{NC}{AT} = \dfrac{AP}{AT} = k$, deci $\dfrac{AN}{AR} = 1 - k$. Astfel, $MN \| BC \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AR} \Leftrightarrow \dfrac{k}{2} = 1 - k \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow P$ este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

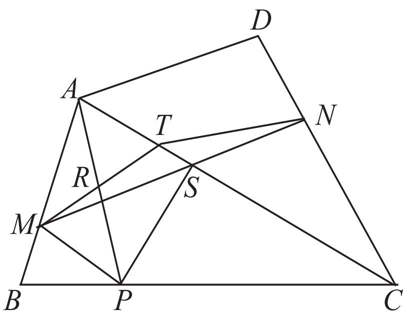


Notă. Soluţie corectă a dat dl. **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung (Maramureş).

L207. *Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P puncte pe segmentele AB, CD respectiv BC astfel încât $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{ND}{DC} = \dfrac{BP}{BC} = k$. Dacă R şi S sunt mijloacele segmentelor AP respectiv MN, calculaţi (în funcţie de k) raportul $\dfrac{RS}{AD}$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţia 1 (a autorului)**.** Fie T intersecţia dreptei AC cu paralela prin N la AD. Deoarece $\dfrac{CT}{AT}=\dfrac{CN}{ND}=\dfrac{CP}{PB}$, rezultă că $TP\|AM$. Însă $MP\|AC$, prin urmare $AMPT$ este paralelogram, unde mijlocul R al diagonalei AP va fi mijloc şi pentru MT. Astfel, RS este linie mijlocie în $\triangle MTN$ şi atunci $RS=\dfrac{1}{2}NT$. Cum $\dfrac{TN}{AD}=\dfrac{CN}{CD}=1-k$, rezultă că $\dfrac{RS}{AD}=\dfrac{1-k}{2}$.



Să notăm că $RS\|TN\|AD$, aşadar $\overrightarrow{RS}=\dfrac{1-k}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$.

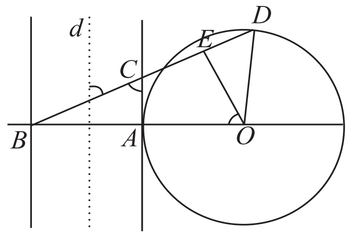
Soluţia 2 (**Gheorghe Iurea**)**.** În planul complex, vom nota cu x afixul punctului X. Obţinem imediat că $m=b(1-k)+ak$, $p=b(1-k)+ck$, $n=d(1-k)+ck$, $r=\dfrac{1}{2}(a+p)$, $s=\dfrac{1}{2}(m+n)$. Atunci $\dfrac{s-r}{d-a}=\dfrac{1-k}{2}\in\mathbb{R}_+$ şi de aici urmează că $RS\|AD$, iar $\dfrac{RS}{AD}=\dfrac{1-k}{2}$.

Notă. O soluţie folosind calculul vectorial a dat dl. **Ioan Viorel Codreanu**, Satulung (Maramureş).

L208. *Un cilindru circular drept de axă d şi rază R_1 şi o sferă de centru O şi rază R_2 sunt tangente exterior în punctul A. Fie B simetricul lui A în raport cu d şi fie π planul ce trece prin B, este perpendicular pe planul determinat de O şi d şi face cu axa d un unghi de $30°$. Calculaţi raportul razelor celor două suprafeţe ştiind că secţiunile lor cu planul π au arii egale.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Figura indică secţiunea cilindrului şi sferei cu planul determinat de O şi d. Dreapta BD este intersecţia acestuia cu planul π. Cilindrul este secţionat de π după o elipsă cu lungimile semiaxelor $\dfrac{R_1}{\sin 30°}=2R_1$ şi R_1, iar sfera după un cerc cu raza dată de $ED^2=OD^2-OE^2=OD^2-OB^2\cos^2 30°=R_2^2-\dfrac{3}{4}(2R_1+R_2)^2=\dfrac{1}{4}R_2^2-3R_1^2-3R_1R_2$. Egalitatea ariilor secţiunilor revine la $\pi\cdot 2R_1\cdot R_1=\pi(\dfrac{1}{4}R_2^2-3R_1^2-3R_1R_2)$ sau, cu notaţia $k=\dfrac{R_2}{R_1}$, $k^2-12k-20=0$, de unde $k=6+\sqrt{56}$. Aşadar, $\dfrac{R_2}{R_1}=2(3+\sqrt{14})$.



L209. *Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N,P,Q,R,S definite prin $\overrightarrow{BM}=k\cdot\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CN}=k\cdot\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AP}=k\cdot\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AM}=p\cdot\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{BN}=p\cdot\overrightarrow{NR}$, $\overrightarrow{CP}=p\cdot\overrightarrow{PS}$, unde $k,p\in\mathbb{R}^*\backslash\{-1\}$. Demonstraţi că $S_{MNP}\geq\dfrac{1}{4}\cdot S_{ABC}$, iar $S_{QRS}\geq\left(\dfrac{p+3}{2p}\right)^2\cdot S_{ABC}$.*

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

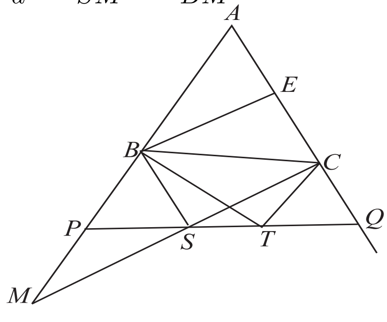
Soluţia 1. Raportăm planul la un reper cartezian faţă de care coordonatele vârfurilor triunghiului să fie $A(0,0)$, $B(x_2,0)$, $C(x_3,y_3)$. Obţinem imediat că $M\left(\frac{x_2+kx_3}{1+k}, \frac{ky_3}{1+k}\right)$, $N\left(\frac{x_3}{1+k}, \frac{y_3}{1+k}\right)$, $P\left(\frac{kx_2}{1+k}, 0\right)$, $Q\left(\frac{p+1}{p}\cdot\frac{x_2+kx_3}{1+k}, \frac{p+1}{p}\cdot\frac{ky_3}{1+k}\right)$, $R\left(\frac{p+1}{p}\cdot\frac{x_3}{1+k}-\frac{x_2}{p}, \frac{p+1}{p}\cdot\frac{y_3}{1+k}\right)$, $S\left(\frac{p+1}{p}\cdot\frac{kx_2}{1+k}-\frac{x_3}{p}, -\frac{y_3}{p}\right)$. Atunci $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|x_2y_3|$, iar $S_{MNP}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta_2|$, unde $\Delta_2=\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1\\ x_N & y_N & 1\\ x_P & y_P & 1\end{vmatrix}=\frac{x_2y_3}{(1+k)^2}(k^2-k+1)$, prin urmare $S_{MNP}=\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\cdot S_{ABC}$. Întrucât $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\geq\frac{1}{4}$, găsim prima inegalitate din enunţ. Apoi, $S_{QRS}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta_3|$, unde $\Delta_3=\begin{vmatrix} x_Q & y_Q & 1\\ x_R & y_R & 1\\ x_S & y_S & 1\end{vmatrix}=\frac{x_2y_3}{p^2}\left(\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\cdot(p+1)^2+p+2\right)$. Însă $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\geq\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\cdot(p+1)^2+p+2\geq\frac{(p+1)^2}{4}+p+2=\frac{(p+3)^2}{4}\geq 0$, de unde rezultă cea de-a doua cerinţă a problemei.

Soluţia 2 (Ioan Viorel Codreanu). În planul complex, considerăm punctele $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $M(m)$, $N(n)$, $P(z)$, $Q(q)$, $R(r)$ şi $S(s)$. Avem: $m=\frac{b+kc}{1+k}$, $n=\frac{c+ka}{1+k}$, $z=\frac{a+kb}{1+k}$, $q=\frac{m(1+p)-a}{p}$, $r=\frac{n(1+p)-b}{p}$, $s=\frac{z(1+p)-c}{p}$. Aplicând teorema lui Kiril Docev, obţinem că $S_{MNP}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}(n\overline{m}+z\overline{n}+m\overline{z})=\ldots=\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}S_{ABC}$ şi $S_{QRS}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Im}(r\overline{q}+s\overline{r}+q\overline{s})=\ldots=\frac{1}{p^2}[(p+1)^2S_{MNP}+(p+2)S_{ABC}]$. Concluzia rezultă ca în Soluţia 1.

L210. *Cercul A-exînscris triunghiului ABC este tangent prelungirilor laturilor AB şi AC în P, respectiv Q. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor B şi C intersectează dreapta PQ în S respectiv T. Demonstraţi că $PQ\leq ST+BC$.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie BE, $E\in(AC)$, bisectoarea interioară a unghiului B şi $\{M\}=CS\cap AB$. Conform teoremei bisectoarei, $\frac{EA}{EC}=\frac{c}{a}$ şi $\frac{SC}{SM}=\frac{BC}{BM}$. Se ştie că $BP=p-c$, $CQ=p-b$, $AP=AQ=p$, $PQ=2p\sin\frac{A}{2}$ şi fie $x=PM$. Folosind teorema lui Menelaus în $\triangle AMC$ cu transversala $Q-S-P$, obţinem că $\frac{QA}{QC}\cdot\frac{SC}{SM}\cdot\frac{PM}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{p}{p-b}\cdot\frac{a}{x+(p-c)}\cdot\frac{x}{p}=1\Leftrightarrow ax=x(p-b)+(p-b)(p-c)\Leftrightarrow x(p-c)=(p-b)(p-c)\Leftrightarrow x=p-b$. Atunci



$BM = p - c + p - b = a$, deci $\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{AE}{EC}$, adică $BE \| SC$. Cum $BE \perp BS$, deducem că $BS \perp SC$. Analog se arată că $BT \perp TC$.

Observăm că $m(\widehat{SBT}) = m(\widehat{SBC}) - m(\widehat{TBC}) = 90° - \dfrac{1}{2}m(\widehat{B}) - (90° - m(\widehat{TCB})) = 90° - \dfrac{1}{2}m(\widehat{B}) - \dfrac{1}{2}m(\widehat{C}) = \dfrac{1}{2}m(\widehat{A})$. Punctele S şi T sunt situate pe cercul de diametru BC; cu teorema sinusurilor, deducem că $ST = a \sin \dfrac{A}{2}$. Atunci $PQ \leq ST + BC \Leftrightarrow (a+b+c)\sin\dfrac{A}{2} \leq a\sin\dfrac{A}{2} + a \Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{a}{b+c}$, adevărat (*inegalitatea lui Ballieu*).

Notă. Soluţie corectă a dat dl **Ioan Viorel Codreanu**.

L211. *Arătaţi că* $\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin^2 x)^2} + \dfrac{\cos^3 x}{(1+\cos^2 x)^2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Mihàly Bencze, Braşov

Soluţie. Pentru $t \in \mathbb{R}$, $(1+t^2)^2 - \dfrac{16\sqrt{3}}{9}t = \dfrac{1}{9}(\sqrt{3}t - 1)^2(3t^2 + 2\sqrt{3}t + 9) \geq 0$. Rezultă că $\dfrac{t}{(1+t^2)^2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, prin urmare $\dfrac{t^3}{(1+t^2)^2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \cdot t^2$. Astfel, $\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin^2 x)^2} + \dfrac{\cos^3 x}{(1+\cos^2 x)^2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}\sin^2 x}{16} + \dfrac{3\sqrt{3}\cos^2 x}{16} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

L212. *Demonstraţi că* $\dfrac{3}{2} + \sum \dfrac{ab}{a^2+b^2} \leq \sum \dfrac{(ab+c^2)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$ (*sumele fiind ciclice*) *pentru orice numere reale* a, b, c *printre care nu se găsesc două egale cu* 0.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Are loc identitatea $\sum(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a-b)^2 = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$. Atunci inegalitatea $0 \leq (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$ se transcrie succesiv

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a-b)^2 - 2\sum c^2(a^2+b^2)(a-b)^2 \Leftrightarrow 2\sum c^2(a^2+b^2)(a-b)^2 \leq \\
&\leq \sum(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a-b)^2 \Leftrightarrow 2\sum(a^2+b^2)((a^2+c^2)(b^2+c^2) - (ab+c^2)^2) \leq \\
&\leq \sum(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2-2ab) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2) + \\
&\qquad + 2\sum ab(a^2+c^2)(b^2+c^2) \leq \sum(a^2+b^2)(ab+c^2)^2,
\end{aligned}$$

de unde inegalitatea din enunţ se obţine prin împărţire cu $2(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2) > 0$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = 0$, adică $a = b$ sau $a = c$ sau $b = c$.

L213. *Fie* $m_1, \ldots, m_k$ *numere naturale nenule şi* α *un număr iraţional.*

a) *Arătaţi că există* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\dfrac{[x_1\alpha]}{m_1} = \ldots = \dfrac{[x_k\alpha]}{m_k}$.

b) *Arătaţi că există* $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $m_1[y_1\alpha] = \ldots = m_k[y_k\alpha]$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Demonstrăm că, pentru $x \in \mathbb{N}^*$ şi $y \in \mathbb{R}$ cu $x\{y\} < 1$, avem că $[xy] = x[y]$. Într-adevăr, $xy = x[y] + x\{y\}$, cu $x[y] \in \mathbb{Z}$ şi $x\{y\} \in (0,1)$, conform ipotezei, deci $x\{y\}$ este chiar partea fracţionară a numărului xy, iar $x[y]$ este partea sa întreagă.

a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică $\{n\alpha\} < \dfrac{1}{m_j} \Leftrightarrow \{n\alpha\}m_j < 1$, $\forall 1 \le j \le k$ (există un astfel de număr, conform teoremei de densitate a lui Kronecker). Vom avea atunci că $[m_j n\alpha] = m_j[n\alpha]$, $\forall 1 \le j \le k$, deci pentru $x_j = m_j \cdot n$, $1 \le j \le k$, cerinţa se verifică.

b) Fie $M_j = \dfrac{m_1 \dots m_k}{m_j}$, $1 \le j \le k$ şi alegem $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{N\alpha\} < \dfrac{1}{M_j} \Leftrightarrow M_j \cdot \{N\alpha\} < 1$, $\forall 1 \le j \le k$. Rezultă că $[M_j N_\alpha] = M_j[N\alpha]$, deci $m_j[y_j\alpha] = m_j M_j[N\alpha] = (m_1 \dots m_k)[N\alpha]$, $\forall 1 \le j \le k$, unde $y_j = M_j \cdot N$ şi astfel este rezolvată şi partea a doua a problemei.

L214. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică al cărei polinom caracteristic este X^n. Arătaţi că A este matricea nulă.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Fie a_{ij} elementele matricei, cu $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Coeficienţii lui X^{n-1} şi X^{n-2} din polinomul caracteristic sunt nuli, prin urmare $-\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ şi $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2) = 0$. Prima egalitate, ridicată la pătrat, dă $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_{ii}a_{jj} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2$, ceea ce, după înlocuire în a doua egalitate, conduce la $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2 - \sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_{ij}^2 = 0$. Cum A este matrice reală, rezultă că $a_{ij} = 0$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, ceea ce trebuia demonstrat.

L215. *Avem la dispoziţie $2n + 1$ pietricele ($n \ge 1$) astfel încât orice submulţime de $2n$ pietricele poate fi împărţită în două grămezi de câte n pietricele având aceeaşi masă totală. Demonstraţi că toate pietricelele au aceeaşi masă.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Notăm cu $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ masele pietricelelor. Pentru $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ fixat, putem partiţiona mulţimea $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, 2n+1\}$ în două submulţimi disjuncte A_i şi B_i, ambele de cardinal n, astfel încât $\sum\limits_{j \in A_i} x_j = \sum\limits_{j \in B_i} x_j$, deci $\sum\limits_{j=1}^{2n+1} a_{ij}x_j = 0$, unde $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = 1$ dacă $j \in A_i$ şi $a_{ij} = -1$ dacă $j \in B_i$. Fie M matricea (a_{ij}) şi ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$; atunci $MX = 0$ şi vectorul X este nenul, prin urmare $\det M = 0$. Pe de altă parte, dacă eliminăm ultima linie şi ultima coloană ale lui M şi notăm cu $\triangle$ determinantul matricei $2n \times 2n$ rămase, atunci redusul modulo 2 al lui Δ este

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} \widehat{0} & \widehat{1} & \dots & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \dots & \widehat{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \dots & \widehat{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widehat{2n-1} & \widehat{2n-1} & \dots & \widehat{2n-1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \dots & \widehat{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \dots & \widehat{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \dots & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \dots & \widehat{1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \dots & \widehat{0} \end{vmatrix}.$$

Scăzând prima coloană din celelalte coloane, obţinem un determinant triunghiular cu $\widehat{1}$ pe diagonala principală, aşadar $\overline{\Delta} = \widehat{1}$. Rezultă că Δ este număr întreg impar, deci nenul, prin urmare rangul lui M este $2n$. Soluţia sistemului $MX = 0$ va fi de forma $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ şi astfel problema este complet rezolvată.