Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2011

Clasele primare

P.206. *Fie numerele* $a = 1 + \bigcirc$ *şi* $b = 9 - \square$. *Înlocuiţi cercul şi pătratul cu cifre corespunzătoare astfel încât* $a + b = 15$.

(*Clasa I*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. $15 = 10 + \bigcirc - \square$, de unde $\bigcirc - \square = 5$, cu posibilităţile: $9 - 4 = 5$; $8 - 3 = 5$; $7 - 2 = 5$; $6 - 1 = 5$ şi $5 - 0 = 5$.

P.206. *O elevă a desenat un trenuleţ cu* 23 *vagoane pe care le-a colorat folosind, pe rând, culorile roşu, galben, albastru, roşu, galben ş.a.m.d. Ce culoare a folosit pentru vagonul din mijloc?*

(*Clasa I*) **Mihaela Gîlcă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece $23 = 11 + 1 + 11$, înseamnă că al 12-lea vagon este în mijloc. Cum $12 = 3 + 3 + 3 + 3$, deducem că pentru vagonul din mijloc a folosit culoarea albastră.

P.218. *Mihaela are* 14 *ani. Ea s-a născut când sora sa avea* 7 *ani, dar cu* 5 *ani înaintea fratelui său. Câţi ani au împreună cei trei fraţi?*

(*Clasa a II-a*) **Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Sora Mihaelei are $14+7 = 21$ (ani), iar fratele $14-5 = 9$ (ani). Împreună au $14 + 21 + 9 = 44$ (ani).

P.219. *Un cioban păzea câteva oi şi câteva capre, în total* 24 *picioare. Câte oi şi câte capre sunt, dacă oile sunt mai multe decât caprele?*

(*Clasa a II-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din descompunerea $24 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, rezultă că sunt în total 6 oi şi capre. Pot fi cinci oi şi o capră sau patru oi şi două capre.

P.220. *Suma a două numere este* 2010. *Dacă ştergem cifra miilor unuia dintre ele, obţinem celălalt număr. Aflaţi cele două numere.*

(*Clasa a III-a*) **Mihaela Cianga, Iaşi**

Soluţie. Putem avea $1000 + 2x = 2010$ sau $2000 + 2x = 2010$, unde x este al doilea număr. Avem două soluţii: $(1505; 505)$ şi $(2005, 5)$.

P.221. *Suma dintre un număr şi succesorul său este cu* 10 *mai mare decât predecesorul său. Calculaţi produsul dintre număr şi vecinii săi.*

(*Clasa a III-a*) **Petru Miron, Paşcani**

Soluţie. Se deduce că succesorul numărului căutat este 9, deci numărul este 8. Obţinem $7 \times 8 \times 9 = 504$.

P.222. *Pe o farfurie sunt cireşe şi vişine. Un copil mănâncă o treime din cireşe şi o jumătate din vişine şi constată că are* 17 *sâmburi. Pot rămâne pe farfurie* 20 *fructe? dar* 34*?*

(*Clasa a III-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din $c:3+v:2=17$, obţinem că $2c+3v=102$. Dacă pe farfurie rămân 20 de fructe, atunci $c+v=37$ şi deducem că $c=9$, $v=28$, deci răspunsul la prima întrebare este afirmativ. Dacă pe farfurie ar rămâne 34 de fructe, atunci $c+v=51$ şi am obţine $v=0$, imposibil; răspunsul la a doua întrebare este negativ.

P.223. *Se consideră numerele naturale* $x, 4x, 2x+3, x+2$ *şi* $3x+2$, *unde* $x>2$.

a) Ordonaţi crescător numerele.

b) Dacă notăm cu m *cel mai mic număr şi cu* M *pe cel mai mare, care trebuie să fie valoarea lui* x *pentru ca şirul* $m, m+1, \ldots, M$ *să conţină* 130 *numere?*

(*Clasa a IV-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. a) $x<x+2<2x+3<3x+2<4x$; b) $4x-x+1=130$, de unde $x=43$.

P.224. *Un elev îşi ţine banii în două buzunare. Dacă ar cheltui un sfert din suma din primul buzunar şi o doime din cea din al doilea, suma totală s-ar micşora cu* 48 *lei. Care ar fi suma totală dacă, fără a cheltui nimic, elevul ar dubla suma din al doilea buzunar?*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Dacă în primul buzunar avem a lei şi în al doilea b lei, atunci $a:4+b:2=48$. Mărind de 4 ori fiecare membru obţinem $a+2b=192$. Suma totală ar fi 192 lei.

P.225. *Aflaţi numerele de trei cifre distincte* $\overline{abc}$, *dacă* $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=666$.

(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

Soluţie. Egalitatea $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=666$ se reduce la $a+b+c=6$. Cum a, b şi c sunt cifre nenule distincte, convine doar situaţia $6=1+2+3$. Numerele sunt: $123, 132, 231, 213, 312$ şi 321.

Clasa a V-a

V.137. *Se consideră numerele naturale* $A=1^{2010}+2^{2010}+\ldots+9^{2010}$ *şi* $B=1^{2011}+2^{2011}+\ldots+9^{2011}$. *Demonstraţi că* $B-A$ *se divide cu* 10.

Mariana Mărculescu şi Dumitru Cotoi, Craiova

Soluţie. Folosind faptul că $2010=M_4+2$, iar $2011=M_4+3$, deducem că $U(A)=U(1+4+9+6+5+6+9+4+1)=5$ şi $U(B)=U(1+8+7+4+5+6+3+2+9)=5$.

Atunci $U(B-A)=0$, prin urmare $B-A \vdots 10$.

V.138. *Găsiţi un multiplu al lui* 13 *a cărui scriere în baza* 10 *conţine doar cifre de* 1.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţia 1. $111111=1001\cdot 111=(7\cdot 11\cdot 13)\cdot(3\cdot 37)=M_{13}$.

Soluţia 2 (**Cătălin Gulin**, elev, Craiova)**.** Cum $\frac{1}{13}=0,(076923)=\frac{76923}{999999}=\frac{8547}{111111}$, rezultă că $111111=13\cdot 8547=M_{13}$.

V.139. *Scrieţi numărul* 17689 *ca diferenţă de două pătrate perfecte nenule.*

Liviu Smarandache, Craiova

Soluţia 1. $17689=7^2\cdot 19^2=(25^2-24^2)\cdot 19^2=475^2-456^2$.

Soluţia 2 (**Cătălin Gulin**, elev, Craiova)**.** Orice număr impar $n = 2k + 1$ se poate scrie sub forma $(k + 1)^2 - k^2$. În cazul nostru, $17689 = 8845^2 - 8844^2$.

V.140. *Determinaţi numerele de forma $\overline{5abc}$ care, împăţite la $\overline{abc5}$, dau câtul de 595 ori mai mic decât restul.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Dacă q este câtul împărţirii, atunci $\overline{5abc} = \overline{abc5} \cdot q + 595q$ şi $595q < \overline{abc5}$. Obţinem că $5000 + \overline{abc} = 10q \cdot \overline{abc} + 600q$, de unde $c = 0$. Astfel, $500 + \overline{ab} = 10q \cdot \overline{ab} + 60q$ şi de aici rezultă că $b = 0$. Deducem că $50 + a = 10q \cdot a + 6q$, egalitate care se realizează doar când $a = q = 2$. În concluzie, singura soluţie a problemei este 5200.

V.141. *Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 = 1$ şi fiecare număr, începând cu al doilea, este triplul sumei tuturor numerelor dinaintea lui. Dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2^{20}$, determinaţi n.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Observăm că $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot (1 + 3) = 3 \cdot 4$, $a_4 = 3(1 + 3 + 3 \cdot 4) = 3 \cdot 4^2$, $a_5 = 3(1 + 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) = 3 \cdot 4^3$. În general, $a_n = 3 \cdot 4^{n-2}$, $n \geq 2$, şi atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \ldots 3 \cdot 4^{n-2} = 4^{n-1}$. Din $4^{n-1} = 2^{20}$ obţinem că $n = 11$.

V.142. *Arătaţi că numărul $A = \overline{\underbrace{11\ldots11}_{2011}\underbrace{22\ldots22}_{2011}} + \overline{\underbrace{33\ldots33}_{2011}\underbrace{44\ldots44}_{2011}} - \overline{\underbrace{11\ldots11}_{2011}0}$ este pătrat perfect.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Dacă notăm $x = \overline{\underbrace{11\ldots11}_{2011}}$, atunci $A = x \cdot 10^{2011} + 2x + 3x \cdot 10^{2011} + 4x - 10x = x(10^{2011} + 2 + 3 \cdot 10^{2011} + 4 - 10) = x(4 \cdot 10^{2011} - 4) = 4x(10^{2011} - 1) = 4x \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2011} = 4x \cdot 9x = (6x)^2$, deci A este pătrat perfect.

V.143. *Reconstituiţi înmulţirea alăturată, ştiind că literele distincte reprezintă cifre distincte.*

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & a & b & c & d & e & f & \times \\
 & & & & & * & * & * & * & * & * & \\
\hline
 & & & & & f & a & b & c & d & e & \\
 & & & & e & f & a & b & c & d & & \\
 & & & d & e & f & a & b & c & & & \\
 & & c & d & e & f & a & b & & & & \\
 & b & c & d & e & f & a & & & & & \\
a & b & c & d & e & f & & & & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * &
\end{array}
$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie $\overline{xyzuvw}$ al doilea factor al produsului. Avem că $\overline{abcdef} \cdot w = \overline{fabcde}$; cu notaţia $N = \overline{abcde}$, obţinem că $(10N + f) \cdot w = 100000f + N$. Evident că $f \neq 0$ şi $e \neq 0$ (apar ca primă cifră) şi atunci $w \neq 0$. Luând, pe rând, $w \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, găsim unica variantă convenabilă $w = 5$, $f = 7$, $N = 14285$, aşadar $\overline{abcdef} = 142857$. Înlocuim şi deducem că produsul este egal cu 18949266765, iar factorul al doilea se obţine prin împărţire, fiind 132645.

Clasa a VI-a

VI.137. *Dacă fracţia* $\frac{3n+7}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, *este reductibilă, determinaţi ultima cifră a lui* n.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Dacă $d = (3n+7, 2n+3)$, $d \geq 2$, atunci $d | 2(3n+7) - 3(2n+3)$, adică $d|5$. Obţinem că $d = 5$ şi de aici se deduce uşor că $n = 5k+1$, $k \in \mathbb{N}$, prin urmare ultima cifră a numărului n poate fi 1 sau 6.

VI.138. *Determinaţi numerele prime* $\overline{abc}$ *cu proprietatea că dintre cele cinci numere (nu obligatoriu distincte) care se obţin prin permutarea cifrelor, există măcar două pătrate perfecte.*

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Scriem toate pătratele perfecte de trei cifre şi urmărim care dintre ele, prin permutarea cifrelor, dau naştere unui alt pătrat perfect şi unui număr prim. Problema are două soluţii: 691 este prim şi $169, 196, 961$ sunt pătrate, apoi 211 este prim şi $121, 121$ sunt pătrate.

VI.139. *Demonstraţi că* $287 | (8^{15} + 8^5 + 5)(42^{117} + 42^{39} + 39)$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. Observăm că $287 = 7 \cdot 41$. Cum $8^{15} + 8^5 + 5 = (7+1)^{15} + (7+1)^5 + 5 = (M_7 + 1) + (M_7 + 1) + 5 = M_7$ şi $42^{117} + 42^{39} + 39 = (41+1)^{117} + (41+1)^{39} + 39 = (M_{41} + 1) + (M_{41} + 1) + 39 = M_{41}$, urmează concluzia problemei.

VI.140. *Determinaţi numerele întregi nenule* $n_1 < n_2 < \ldots < n_7$, *dacă* $2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_7} = \frac{985}{1024}$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Trecând numărul 985 în baza 2, avem că $985_{(10)} = 1111011001_{(2)}$. Din $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1 = 2^{n_7+10} + 2^{n_6+10} + \ldots + 2^{n_1+10}$ deducem că $n_1 = -10$, $n_2 = -7$, $n_3 = -6$, $n_4 = -4$, $n_5 = -3$, $n_6 = -2$, $n_7 = -1$. Cum scrierea unui număr în baza 2 este unică, problema are o singură soluţie.

VI.141. *Demonstraţi că ecuaţia* $12x + 15y + 20z = 73$ *nu are soluţii* (x, y, z) *cu toate componentele numere naturale, dar are o infinitate de soluţii cu toate componentele numere întregi.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

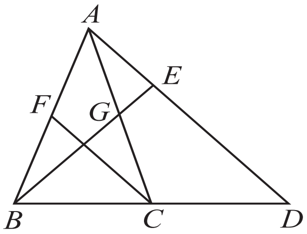
Soluţie. Presupunem că $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sunt astfel încât $12x + 15y + 20z = 73$; atunci $z + 1 = 3(4x + 5y + 7z - 24) = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $z = 3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Înlocuind, obţinem că $12x + 15y + 60k = 93$, de unde $x + 1 = 5(x + y + 4k - 6) = 5n$, $n \in \mathbb{Z}$, adică $x = 5n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$. De aici, $4n + y + 4k = 7$, prin urmare $y = 7 - 4n - 4k$. Rezultă că $(x, y, z) = (5n - 1, 7 - 4n - 4k, 3k - 1)$, unde $n, k \in \mathbb{Z}$, constituie soluţiile ecuaţiei diofantice din enunţ, având toate componentele întregi.

Pentru a demonstra prima afirmaţie a problemei, să presupunem prin absurd că ar exista $n, k \in \mathbb{Z}$ pentru care $5n - 1$, $7 - 4n - 4k$ şi $3k - 1$ ar fi simultan nenegative. Din $5n - 1 \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, rezultă că $n \geq 1$; cum $3k - 1 \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, obţinem $k \geq 1$. Atunci $7 - 4n - 4k \leq -1$, contradicţie. Astfel, soluţia problemei este completă.

VI.142. *Fie ABC un triunghi isoscel cu* $AB = AC$. *Dacă D este simetricul lui B* *faţă de C şi mediana din B taie AD în E, arătaţi că CE este mediatoarea segmentului BD.*

Silviu Boga, Iaşi

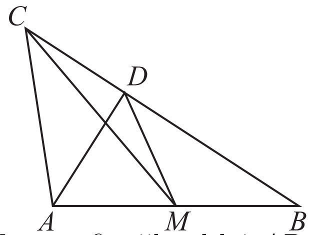
Soluţie. Notăm cu F şi G mijloacele segmentelor AB, respectiv AC. Din $\triangle BCF \equiv \triangle CBG$ (L.U.L.) obţinem că $\widehat{FCB} \equiv \widehat{GBC}$. Însă CF este linie mijlocie în $\triangle BAD$ şi atunci $CF \| AD$, prin urmare $\widehat{FCB} \equiv \widehat{ADB}$. Rezultă că $\widehat{EBD} \equiv \widehat{EDB}$, deci $\triangle EBD$ este isoscel cu baza BD; mediana CE va fi mediatoarea segmentului BD.



VI.143. *Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{ACB}) = 45°$ şi $(\widehat{CBA}) = 30°$, iar M este un punct pe segmentul AB. Arătaţi că M este mijlocul lui AB dacă şi numai dacă $m(\widehat{MCB}) = 15°$.*

Andrei Paşa, elev, şi Narcisa Paşa, Iaşi

Soluţie. Fie D piciorul înălţimii din A; triunghiul ACD va fi dreptunghic isoscel, cu $AD = CD$, iar triunghiul ABD este dreptunghic în D, cu $m(\widehat{B}) = 30°$, prin urmare $AD = \frac{1}{2}AB$.



Presupunem că M este mijlocul lui AB. Atunci, $DM = \frac{1}{2}AB = AM = AD$, deci triunghiul ADM este echilateral. Deducem că $DM = DC$ şi $m(\widehat{CDM}) = 150°$. Obţinem că $m(\widehat{DCM}) = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$.

Reciproc, fie $m(\widehat{BCM}) = 15°$ şi să presupunem că M nu ar fi mijlocul lui AB. Notăm cu M' mijlocul lui AB şi, folosind directa, deducem că $m(\widehat{BCM'}) = 15°$. Astfel, $M' = M$ şi ajungem la o contradicţie.

Notă. D-l **Titu Zvonaru** găseşte trei soluţii ale acestei probleme, iar autorii oferă o a patra soluţie, distinctă.

Clasa a VII-a

VII.137. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, arătaţi că $(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) \geq x + y + 1$.*

Gheorghiţă Stănică şi Iulian Stănică, Apele Vii (Dolj)

Soluţie. Efectuând calculele, inegalitatea din enunţ revine la $x^2y^2 + x^2 + y^2 + x^2y + xy^2 + xy \geq 0$, care este binecunoscuta $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0$ pentru $a = xy$, $b = x$, $c = y$. Egalitatea se atinge când $x = y = 0$.

VII.138. *Dacă a, b, c sunt numere întregi distincte, arătaţi că $a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc \geq 1$. Când se realizează egalitatea?*

Elena Iurea, Iaşi

Soluţie. Cum $a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2] > 0$ (întrucât $a \neq b$), rezultă că numărul întreg $a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc$ este cel puţin egal cu 1. Avem egalitate dacă $(a-b)^2 = 1$, $(a+c)^2 = 1$ şi $(b+c)^2 = 0$ sau dacă $(a-b)^2 = 1$, $(a+c)^2 = 0$ şi $(b+c)^2 = 1$, deci pentru tripletele (a, b, c) de forma $(-n, 1-n, n)$; $(-n, -1-n, n)$; $(1-n, -n, n)$ sau $(-1-n, -n, n)$ cu $n \in \mathbb{Z}^*$.

VII.139. *Determinaţi cifrele a, b şi c, dacă* $\sqrt{\dfrac{\overline{aa}}{\overline{b,b(bc)}}} \in \mathbb{N}$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Observăm că a nu poate fi 0, iar b şi c nu pot fi simultan 0 sau simultan 9. Cum $x = \sqrt{\dfrac{\overline{aa}}{\overline{b,b(bc)}}} = \sqrt{\dfrac{990 \cdot 11a}{1099b + c}} = 33 \cdot \sqrt{\dfrac{10a}{1099b + c}} \in \mathbb{N}$, se impune ca $\dfrac{10a}{1099b + c} = \dfrac{p^2}{q^2}$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ şi $q|33$. Atunci $q^2 \in \{1, 9, 121, 1089\}$. Cum b şi c sunt cifre şi $10a$ nu se divide cu 11, cazurile $q^2 = 121$ şi $q^2 = 1089$ se elimină. În celelalte două situaţii, b nu poate fi decât 0. Dând lui c toate valorile $1, 2, \ldots, 9$, găsim soluţiile $a = 2$, $b = 0$, $c = 5$; $a = 5$, $b = 0$, $c = 2$; $a = 8$, $b = 0$, $c = 5$.

VII.140. *Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi cu proprietatea că* $2^{x+y}(2^{x^2+y^2} + 1) = 1$.

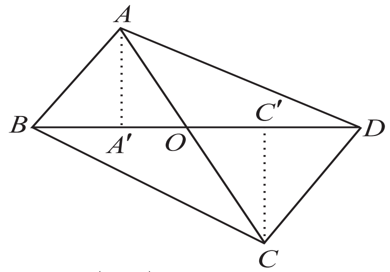
Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Folosind inegalitatea mediilor, obţinem că $1 = 2^{x^2+y^2+x+y} + 2^{x+y} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{x^2+y^2+2x+2y}} = \sqrt{2^{(x+1)^2+(y+1)^2}}$, prin urmare $2^{(x+1)^2+(y+1)^2} \leq 1$. Deducem că $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$, adică $(x, y) = (-1, -1)$.

VII.141. *Dacă $ABCD$ este un patrulater convex, arătaţi că există un unic punct $M \in (BD)$ astfel încât triunghiurile ABM şi CDM să fie echivalente.*

Cecilia Deaconescu, Piteşti

Soluţie. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi A', C' proiecţiile pe BD ale vârfurilor A, respectiv C. Condiţia $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{CDM}$ revine la $BM \cdot AA' = MD \cdot CC'$, adică $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{CC'}{AA'}$. Însă $\dfrac{CC'}{AA'} = \dfrac{CO}{AO}$ (din asemănarea $\triangle AOA' \sim \triangle COC'$), prin urmare punctul căutat M este unicul punct interior segmentului (BD) care îl împarte în raportul $k = \dfrac{CO}{AO}$.



VII.142. *Determinaţi valoarea minimă a ariei unui paralelogram circumscris unui cerc de rază r.*

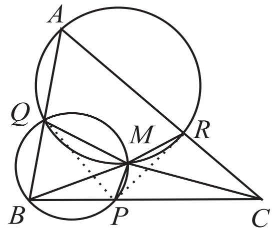
Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie $ABCD$ paralelogram circumscris cercului $\mathcal{C}(O, r)$; atunci $AB + CD = AD + BC$, prin urmare $ABCD$ este, de fapt, romb. Fie $\alpha = m(\widehat{ABD})$ şi $M = Pr_{AB}O$; atunci $AB = AM + MB = \dfrac{OM}{\operatorname{ctg} \alpha} + \dfrac{OM}{\operatorname{tg} \alpha} = r\left(\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \geq 2r$, cu egalitate când $\cos \alpha = \sin \alpha$, adică $\alpha = 45°$. Deducem că $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{OAB} = 4\dfrac{AB \cdot OM}{2} \geq 4r^2$, cu egalitate pentru $\alpha = 45°$. În concluzie, valoarea minimă căutată a ariei paralelogramului este $4r^2$, atinsă în cazul în care $ABCD$ este pătrat.

VII.143. *În interiorul triunghiului ascuţitunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 60°$ se consideră un punct M astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. Un cerc ce trece prin A şi M taie (AB) în Q şi (AC) în R, iar cercul circumscris triunghiului MQB taie (BC) în P. Demonstraţi că triunghiul PQR este dreptunghic.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Folosind faptul că patrulaterele $MPBQ$ şi $MQAR$ sunt inscriptibile, obţinem imediat că şi patrulaterul $MPCR$ este inscriptibil. Atunci $m(\widehat{QPR}) = m(\widehat{MPQ}) + m(\widehat{MPR}) = m(\widehat{MBQ}) + m(\widehat{MCR}) = m(\widehat{B}) - m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{C}) - m(\widehat{MCP}) = [180° - m(\widehat{A})] - [180° - m(\widehat{BMC})] = 90°$.

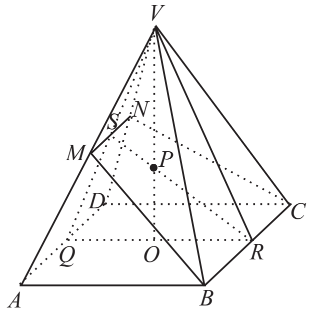


Notă. Rezultatul este o generalizare a problemei VII.40 din *RecMat 1/2003*.

Clasa a VIII-a

VIII.137. *Fie $VABCD$ o piramidă patruletară regulată, M şi N mijloacele muchiilor VA, respectiv VD, iar P punctul în care înălţimea VO a piramidei înţeapă planul (MBC). Arătaţi că $VO = 3 \cdot OP$.*

Adrian Corduneanu, Iaşi



Soluţie. Notăm cu Q şi R mijloacele muchiilor AD, respectiv BC şi $\{S\} = VQ \cap MN$. Cum MN este linie mijlocie în $\triangle VAD$, urmează că $VS = SQ$. Deducem că P este punctul de intersecţie a medianelor triunghiului VQR, deci $VO = 3 \cdot OP$.

VIII.138. *Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia* $25 \cdot \{x\}^2 - 10x + 1 = 0$.

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

Soluţie. Înlocuind $x = [x] + \{x\}$, ecuaţia devine $(5 \cdot \{x\} - 1)^2 = 10 \cdot [x]$ şi, cum $5 \cdot \{x\} - 1 \in (-1, 4)$, rezultă că $10 \cdot [x] \in [0, 16)$, deci $[x] \in \{0, 1\}$. Dacă $[x] = 0$, atunci $\{x\} = \dfrac{1}{5}$ şi obţinem soluţia $x_1 = \dfrac{1}{5}$. Dacă $[x] = 1$, atunci $5\{x\} - 1 = \pm\sqrt{10}$, adică $\{x\} = \dfrac{1 \pm \sqrt{10}}{5}$. Însă $\{x\} \in [0, 1)$, aşadar reţinem doar soluţia $x_2 = 1 + \dfrac{1+\sqrt{10}}{5} = \dfrac{6+\sqrt{10}}{5}$.

VIII.139. *Numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ au proprietatea că $N = 6^{a_1} + 6^{a_2} + \ldots + 6^{a_{100}}$ este pătrat perfect. Arătaţi că numărul $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ se divide cu 5.*

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie. Deoarece $6^n = M_5 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că $N \vdots 5$. Cum N este pătrat perfect, deducem că $N \vdots 25$. Însă, întrucât $6^n = M_{25} + 5n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avem că $N = M_{25} + 5(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}) + 100$ şi de aici rezultă concluzia.

VIII.140. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\setminus\{n\}$ astfel încât $n^3 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq n[1 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)]$. Demonstraţi că $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Din ipoteză obţinem că $[(x_1 - n)^2 - 1] + [(x_2 - n)^2 - 1] + \ldots + [(x_n - n)^2 - 1] \leq 0$. Cum $x_k \neq n$, rezultă că $(x_k - n)^2 \geq 1$, $\forall k = \overline{1, n}$, prin urmare fiecare dintre parantezele pătrate este nenegativă. Deducem că fiecare dintre ele este nulă şi atunci $x_k \in \{n-1, n+1\}$, $\forall k = \overline{1, n}$, adică $x_k \in \mathbb{N}$, $\forall k = \overline{1, n}$.

VIII.141. *Dacă $a, b, c, x, y, z > 0$ şi $ax + by + cz = 1$, demonstraţi că* $\dfrac{a}{yz} + \dfrac{b}{xz} + \dfrac{c}{xy} \geq 27abc$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Eliminând numitorii, inegalitatea de demonstrat revine la $ax+by+cz \geq 27abcxyz$, adică la $1 \geq 27abcxyz$. Însă $(ax + by + cz)^3 \geq 27 \cdot ax \cdot by \cdot cz$ (inegalitatea mediilor) şi de aici rezultă ceea ce dorim. Egalitatea se atinge pentru $x = \dfrac{1}{3a}$, $y = \dfrac{1}{3b}$, $z = \dfrac{1}{3c}$.

VIII.142. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $E(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$, $F(x, y) = \sqrt{c^2x^2 + d^2y^2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $|ad| = |bc|$, demonstraţi că*

$$(*) \qquad \sqrt{E(x, z) \cdot F(x, z)} \leq \sqrt{E(x, y) \cdot F(x, y)} + \sqrt{E(y, z) \cdot F(y, z)}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi

Soluţie. Dacă $b = 0$, atunci $E(x, y) = |ax|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Din $|ad| = |bc|$, obţinem că $a = 0$ sau $d = 0$. În primul caz, (*) devine $0 \leq 0$, iar în al doilea, $(*) \Leftrightarrow \sqrt{|ax| \cdot |cx|} \leq \sqrt{|ax| \cdot |cx|} + \sqrt{|ay| \cdot |cy|}$, adevărat. Analog se tratează cazul în care $c = 0$.

Dacă $bc \neq 0$, atunci $ad \neq 0$ şi putem scrie că $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{c}{d}\right| = k > 0$. Observăm că $E(x, y) = |b| \cdot \sqrt{k^2x^2 + y^2}$, $F(x, y) = |d| \cdot \sqrt{k^2x^2 + y^2}$, deci (*) revine la $\sqrt{k^2x^2 + z^2} \leq \sqrt{k^2x^2 + y^2} + \sqrt{k^2y^2 + z^2}$; o simplă ridicare la pătrat arată că această ultimă inegalitate este adevărată.

VIII.143. *Dacă* $\dfrac{a^{2011}}{a^2 + b^2} = \dfrac{b^{2011}}{b^2 + c^2} = \dfrac{c^{2011}}{c^2 + a^2}$, *demonstraţi că numerele reale pozitive a, b şi c sunt egale.*

Cristina Ene, elevă, Craiova

Soluţie. Dacă presupunem că $a < b$, atunci $2a^{2011} < a^{2011} + a^{2009} \cdot b^2$, de unde $\dfrac{a^{2011}}{a^2 + b^2} < \dfrac{a^{2009}}{2}$. Deducem că $\dfrac{b^{2011}}{b^2 + c^2} < \dfrac{a^{2009}}{2} < \dfrac{b^{2009}}{2}$, deci $b < c$. Obţinem că $\dfrac{c^{2011}}{c^2 + a^2} < \dfrac{c^{2009}}{2}$, prin urmare $c < a$ şi ajungem la contradicţia $a < b < c < a$. Analog se arată că nu putem avea $a > b$ şi rămâne că $a = b$, apoi $a = b = c$.

Clasa a IX-a

IX.121. *Arătaţi că* $\left(\dfrac{1 + \sin^4 x + \cos^4 x}{1 + \sin^4 y + \cos^4 y}\right)^2 = \dfrac{1 + \sin^8 x + \cos^8 x}{1 + \sin^8 y + \cos^8 y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. Folosind identitatea $(a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)^2)^2 = 2(a^8 + b^8 + (a^2 + b^2)^4)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ şi scriindu-l pe 1 ca $(\sin^2 + \cos^2 x)^2$ în stânga respectiv $(\sin^2 x + \cos^2 x)^4$ în dreapta, obţinem ceea ce dorim.

IX.122. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $b \geq c > 0$ şi $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dacă numerele a, b, c pot fi laturile unui triunghi, demonstraţi că şi $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ pot fi laturi ale unui triunghi.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Evident că $a > b \geq c$ (deoarece $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$) şi $c > a - b$ (întrucât a, b, c pot fi laturi ale unui triunghi). Întrucât $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{c}$, va fi suficient să demonstrăm că $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, echivalent cu $c > \dfrac{ab}{a+b}$. Vom arăta chiar mai mult, anume că $a - b > \dfrac{ab}{a+b}$; după calcule, această inegalitate revine la $a^2 - ab - b^2 \geq 0$ sau $t^2 - t - 1 \geq 0$, unde $t = \dfrac{a}{b} \in \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$, fapt evident adevărat.

IX.123. *Considerăm patrulaterul $ABCD$ şi fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv DA, iar T un punct interior patrulaterului. Notăm cu G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale patrulaterelor $TNCP$, $TPDQ$, $TQAM$, $TMBN$. Arătaţi că $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{DG_4} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\{T\} = MP \cap NQ$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Fie G centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$, adică $\{G\} = MP \cap NQ$; atunci $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{DG_4} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BQ}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{DT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow G = T \Leftrightarrow \{T\} = MP \cap NQ$.

IX.124. *Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, arătaţi că $BC^2 \cdot S_{ACD} + CD^2 \cdot S_{ABC} = AC^2 \cdot S_{BCD}$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Din teorema lui Ptolemeu, $BC \cdot AD + CD \cdot AB = AC \cdot BD$. Atunci:

$$\begin{aligned} BC^2 \cdot S_{ACD} + CD^2 \cdot S_{ABC} &= BC^2 \cdot AD \cdot CD \cdot \sin(\pi - B) + \\ &+ CD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = BC \cdot CD \cdot (BC \cdot AD + CD \cdot AB) \cdot \sin B = \\ &= BC \cdot CD \cdot AC \cdot BD \cdot \sin B = 2 \cdot AC \cdot S_{BCD} \cdot \frac{BD \cdot \sin B}{\sin C} = \\ &= 2 \cdot AC \cdot S_{BCD} \cdot 2R \cdot \sin B = 2 \cdot AC^2 \cdot S_{BCD}. \end{aligned}$$

IX.125. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y > 1$, arătaţi că $xy + 4 > x + 3y$.*

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Considerăm funcţia $f : [y, \infty) \to \mathbb{R}$, $y > 1$ fixat, $f(x) = x(y-1) + 4 - 3y$. Funcţia f este stirct crescătoare (deoarece $y - 1 > 0$) şi, cum $f(y) = (y-2)^2 \geq 0$, rezultă că pentru $x > y$, $f(x) > f(y) \geq 0$ şi de aici inegalitatea cerută.

Clasa a X-a

X.121. *Dacă $a \in \mathbb{R}_+^*$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(2a)^{x^2} \cdot a^x = 2$.*

Luminiţa Mihalache, Craiova

Soluţie. Observăm că ecuaţia poate fi scrisă sub forma $(2^{x-1} \cdot a^x)^{x+1} = 1$. Atunci $x + 1 = 0$, de unde obţinem soluţia $x_1 = -1$, sau $2^{x-1} \cdot a^x = 1$, adică $(2a)^x = 2$, ecuaţie care are soluţia $x_2 = \log_{2a} 2$ dacă $a \neq \frac{1}{2}$ şi care nu are soluţii când $a = \frac{1}{2}$.

X.122. *Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\frac{h_a}{ac} + \frac{h_b}{ab} + \frac{h_c}{bc} = \frac{h_a}{bc} + \frac{h_b}{ac} + \frac{h_c}{ab}$ (notaţiile sunt cele uzuale).*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Înlocuind $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$, relaţia din enunţ devine $\frac{1}{a^2c} + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{c^2b} = \frac{3}{abc}$. Însă $\frac{1}{a^2c} + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{c^2b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^3b^3c^3}} = \frac{3}{abc}$, prin urmare egalitatea din problemă are loc dacă şi numai dacă $\frac{1}{a^2c} = \frac{1}{b^2a} = \frac{1}{c^2b}$, i.e. $a = b = c$.

X.123. *Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ şi $x \in (-1, 1)$, demonstraţi inegalitatea $n(\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x}) \leq 2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + n - 2)$.*

Lucian Tuţescu şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

Soluţie. Folosind inegalitatea mediilor, obţinem că $\sqrt[n]{1+x} = \sqrt[n]{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{2\sqrt{1+x} + n - 2}{n}$, (factorul 1 de $n-2$ ori) şi, analog, $\sqrt[n]{1-x} \leq \frac{2\sqrt{1-x} + n - 2}{n}$. Adunând aceste inegalităţi, obţinem concluzia problemei. Egalitatea se atinge când $x = 0$.

X.124. *Aflaţi numerele complexe nenule x, y, z cu proprietatea că*

$$x(x+y)(x+z) = y(y+x)(y+z) = z(z+x)(z+y) = -1.$$

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Se impun condiţiile $x + y \neq 0$, $y + z \neq 0$, $z + x \neq 0$, deoarece altfel se ajunge la contradicţia $0 = 1$. Scăzând două câte două ecuaţiile sistemului, obţinem că $(x-y)(x+y+z) = (y-z)(x+y+z) = (z-x)(x+y+z) = 0$. Distingem situaţiile:

(i) $x = y = z$; atunci $4x^3 = -1$ şi sunt soluţii ale sistemului tripletele (x, x, x), cu $x \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{3} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{3} \right) \middle| k = 0, 1, 2 \right\}$;

(ii) $x = y \neq z$; atunci $z = -2x$ şi obţinem soluţiile $(x, x-2x)$, cu $x \in A = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \middle| k = 0, 1, 2 \right\}$. În cazul în care $y = z \neq x$ găsim soluţiile $(-2y, y, y)$, $y \in A$, iar în cazul în care $x = z \neq y$ obţinem tripletele $(x, -2x, x)$, $x \in A$.

(iii) $x \neq y \neq z \neq x$; atunci $x + y + z = 0$ şi fiecare dintre ecuaţile sistemului revine la $xyz = -1$. Prin urmare, $x + y = -z$ şi $xy = -\frac{1}{z}$, deci x şi y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2 + tz - \frac{1}{z} = 0$. Deducem că $x = \frac{-z+u}{2}$, $y = \frac{-z-u}{2}$, unde $z \in \mathbb{C}$ este astfel încât $u^2 = z^2 + \dfrac{4}{z}$. Cum x, y, z sunt distincte, impunem ca $u \neq 0$, $u \neq \pm 3z$, adică $z^3 \neq -4$, $z^3 \neq -\dfrac{1}{2}$ şi obţinem soluţiile $\left(\dfrac{-v+u}{2}, \dfrac{-v-u}{2}, v\right)$, cu $v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$, $v^3 \neq -4$, $v^3 \neq -\dfrac{1}{2}$ şi $u^2 = v^2 + \dfrac{4}{v}$.

În concluzie, sistemul dat admite o infinitate de soluţii.

X.125. *Dacă $x, y \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât numărul $\sqrt{x^2+2y+1}+\sqrt[3]{y^3+3x^2+3x+1}$ este raţional, arătaţi că $x = y$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru început, vom arăta că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ sunt astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$. Într-adevăr, fie $x = \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$; din $\sqrt[3]{b} = x - \sqrt{a}$, deducem că $b = x^3 - 3x^2 \cdot \sqrt{a} + 3a - a\sqrt{a}$, deci $\sqrt{a} = \dfrac{x^3+3ax-b}{3x^2+a} \in \mathbb{Q}$ (dacă $3x^2 + a = 0$, concluzia este evidentă). Din $x, \sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, urmează că $\sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}$.

În aceste condiţii, din ipoteza problemei rezultă că $x^2 + 2y + 1$ este pătrat perfect, strict mai mare ca x^2, aşadar $x^2 + 2y + 1 \geq (x + 1)^2$, de unde $y \geq x$. Analog, y^3+3x^2+3x+1 este cub perfect, strict mai mare ca y^3, deci $y^3+3x^2+3x+1 \geq (y+1)^3$ şi de aici $(x - y)(x + y + 1) \geq 0$, prin urmare $x \geq y$. În final, deducem că $x = y$.

Clasa a XI-a

XI.121. *Dat triunghiul ABC, arătaţi că* $\begin{vmatrix} 1 & \sin\frac{A}{2} & \sin\frac{C}{2} \\ \sin\frac{A}{2} & 1 & \sin\frac{B}{2} \\ \sin\frac{C}{2} & \sin\frac{B}{2} & 1 \end{vmatrix} \leq \dfrac{1}{2}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţie. Într-un triunghi ABC este adevărată egalitatea $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = 1 - 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ şi atunci valoarea determinantului din enunţ este $4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = 4\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \dfrac{4S^2}{pabc} = \dfrac{S}{Rp} = \dfrac{r}{R}$. Conform inegalităţii lui Euler $R \geq 2r$, acest din urmă raport este $\leq \dfrac{1}{2}$.

XI.122. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ cu $A^2 + B^2 = -2I_n$; arătaţi că $det(AB + BA) \geq 0$.*

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. Observăm că $(A+B+i\sqrt{2}I_n)(A+B-i\sqrt{2}I_n) = A^2+B^2+2I_n+AB+BA = AB+BA$ şi atunci $\det(AB+BA) = \det(A+B+i\sqrt{2}I_n)\det(A+B-i\sqrt{2}I_n) = \det(A+B+i\sqrt{2}I_n)\cdot\overline{\det(A+B+i\sqrt{2}I_n)} = (\det(A+B+i\sqrt{2}I_n))^2 \geq 0$.

Notă. Există matrice A, B care verifică ipoteza $A^2 + B^2 = -2I_n$. De exemplu,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} b & 1+b^2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{Q},$$

au proprietatea că $A^2 = B^2 = -I_n$, deci $A^2 + B^2 = -2I_n$.

XI.123. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $detA = 10$, $detB = 12$, $tr\,A = tr\,B = 7$. Determinaţi numerele naturale n pentru care $tr\,A^n = tr\,B^n$.*

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

Soluţie. Cum $\det A = 10$ şi $\mathrm{tr}A = 7$, valorile proprii ale matricei A sunt 2 şi 5, deci $\mathrm{tr}A^n = 2^n + 5^n$. Analog se arată că $\mathrm{tr}B^n = 3^n + 4^n$ şi atunci condiţia din enunţ revine la $3^n - 2^n = 5^n - 4^n$. Evident că $n = 0$ şi $n = 1$ sunt soluţii. Dacă $n \geq 2$, aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f(x) = x^n$ pe intervalele $[2, 3]$ şi $[4, 5]$, găsim $c \in (2, 3)$ şi $d \in (4, 5)$ pentru care $3^n - 2^n = nc^{n-1}$ şi $5^n - 4^n = nd^{n-1}$, iar egalitatea $nc^{n-1} = nd^{n-1}$ cu $n \geq 2$, $c \neq d$, nu este posibilă.

XI.124. *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2^{2^0} + \sqrt{2^{2^1} + \sqrt{2^{2^2} + \ldots + \sqrt{2^{2^n} + 1}}}}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă a_n este şirul din enunţ, atunci $a_n = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2^{2^n}}}}}$, numărul radicalilor fiind $n + 1$. Considerăm şirul $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}$ ($n + 1$ radicali), care verifică relaţia de recurenţă $x_0 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se arată că (x_n) este convergent, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Cum $2x_{n-1} < a_n < 2x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 + \sqrt{5}$.

XI.125. *Demonstraţi că ecuaţia $25^x + 4^x = 10^x + 9^x$ are cel puţin o soluţie reală negativă.*

Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 25^x + 4^x - 10^x - 9^x$ şi să presupunem prin absurd că $f(x) > 0$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Deducem că $\dfrac{25^x - 1}{x} + \dfrac{4^x - 1}{x} < \dfrac{10^x - 1}{x} + \dfrac{9^x - 1}{x}$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ şi, trecând la limită după $x \nearrow 0$, obţinem că $\ln 25 + \ln 4 \leq \ln 10 + \ln 9$, de unde $100 \leq 90$, fals. Rezultă că există $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ pentru care $f(x_0) < 0$. Pe de altă parte, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{11 - 3\sqrt{10}}{30} > 0$ şi, cum f este continuă, va exista $c \in \left(-\frac{1}{2}, x_0\right)$ pentru care $f(c) = 0$.

Clasa a XII-a

XII.121. *Fie $a \in \mathbb{N}^*$ şi $G = (a, +\infty)$ pe care definim operaţia $x * y = (x - a)(y - a) + a$, $\forall x, y \in G$. Dacă H este subgrup al lui G astfel încât $\mathbb{N} \cap G \subset H$, arătaţi că $\mathbb{Q} \cap G \subset H$.*

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Grupul $(G, *)$ are elementul neutru $e = 1 + a$, iar simetricul lui x este $x' = a + \dfrac{1}{x - a} \in G$. Fie $q \in \mathbb{Q} \cap G$; atunci există $m, n \in \mathbb{N}^*$ încât $q = a + \dfrac{m}{n}$. Dacă

$p \in \mathbb{N} \cap G$, atunci $p \in H$, prin urmare $p + a \in H$ şi $(p+a)' = a + \dfrac{1}{p} \in H$. Deducem că $a + m$ şi $a + \dfrac{1}{n}$ sunt în H, deci $(a+m) * \left(a + \dfrac{1}{n}\right) = a + \dfrac{m}{n} \in H$, adică $q \in H$ şi astfel $\mathbb{Q} \cap G \subset H$.

XII.122. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $f = X^n - 2nX^{n-1} + (2n^2-4)X^{n-2} + a_3X^{n-3} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[X]$. Demonstraţi că f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă $n = 2$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Dacă $n = 2$, atunci $f = X^2 - 4X + 4$ are rădăcinile $x_1 = x_2 = 2$. Reciproc, fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui f, presupuse reale. Cum $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$, rezultă că $4n^2 \leq 8n$, deci $n \leq 2$ şi atunci $n = 2$.

XII.123. *Calculaţi* $I = \displaystyle\int_0^{\arccos \frac{\sqrt{65}}{9}} \operatorname{tg} x \sqrt{\sin x} dx$.

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţie. Cu schimbarea de variabilă $\sin x = s$, obţinem că $I = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{9}} \frac{s\sqrt{s}}{1-s^2} ds$. Apoi, substituţia $\sqrt{s} = t$ conduce la

$$I = \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{2t^4}{1-t^4} dt = \left(-2t + \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t}\right) \Bigg|_0^{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \ln \sqrt{5}.$$

XII.124. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $(f \circ f)(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că* $\displaystyle\int_0^1 f(x) dx \leq 1$.

Dumitru Crăciun, Fălticeni

Soluţie. Din $(f \circ f) \circ f = f \circ (f \circ f)$, deducem că $\sin f(x) = f(\sin x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; atunci $f(\sin x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare $f(\sin x) \cdot \cos x \leq \cos x$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Integrând pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cdot (\sin x)' dx \leq \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$, adică $\displaystyle\int_0^1 f(x) dx \leq 1$.

Rămâne întrebarea: există vreo funcţie f care să verifice ipoteza?

XII.125. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu f' integrabilă. Dacă $f(0) = 0$, arătaţi că* $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq \int_0^1 f^2(t) dt$.

Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. Pentru $x \in [0,1]$, avem că

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^x (f'(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2 dt},$$

deci $f^2(x) \leq \displaystyle\int_0^1 (f'(x))^2 dx$. Integrând pe $[0,1]$, obţinem cerinţa problemei.