PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2/2010

Clasele primare

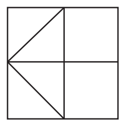
P.196. *Mioara aranjează patru mărgele, două albe şi două galbene, una lângă alta, pe o aţă. În câte feluri poate aranja Mioara mărgelele?*
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Mioara poate aranja mărgelele în şase moduri: $AAGG$, $GGAA$, $GAGA$, $AGAG$, $AGGA$, $GAAG$.

P.197. *Dan împarte o ciocolată astfel: o linie întreagă de 4 pătrăţele pentru fratele său, o coloană întreagă de 4 pătrăţele pentru sora sa, iar restul pentru sine. Câte pătrăţele de ciocolată i-au revenit lui Dan?*
(*Clasa I*) **Maria Ursu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Iniţial ciocolata avea 4 coloane şi 5 linii. Dan a rămas cu $3+3+3+3 = 12$ pătrăţele de ciocolată.

P.198. *Număraţi figurile geometrice din desenul alăturat şi scrieţi:*
a) numărul triunghiurilor;
b) numărul figurilor geometrice care sunt pătrate sau dreptunghiuri.



(*Clasa a II-a*) **Andreea Amarandei, studentă, Iaşi**

Soluţie. a) 5 triunghiuri; b) 5 pătrate şi 4 dreptunghiuri formează 9 figuri geometrice care sunt pătrate sau dreptunghiuri.

P.199. *Dacă $a - 15 = 15 - b$, poate fi diferenţa $a - b$ un număr impar?*
(*Clasa a II-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Soluţie. Din $a - 15 = 15 - b$ se obţine $a + b = 30$, deci $a - b$ este număr par, căci suma şi diferenţa a două numere naturale au aceeaşi paritate.

P.200. *Dintr-un număr de 12 bile, 11 au mase egale, iar una are o masă mai mare decât celelalte. Care este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate depista bila cu masa mai mare, dacă avem la îndemână o balanţă cu două talere?*
(*Clasa a III-a*) **Ana Cojocaru, Iaşi**

Soluţie. Formăm trei grupe: 5b, 5b, 2b. Aşezăm câte 5 bile pe fiecare taler. După prima cântărire determinăm grupa care conţine bila mai grea. În continuare mai avem nevoie de maximum două cântăriri pentru a determina bila cea mai grea. În concluzie, numărul cel mai mic de cântăriri este 3.

P.201. *Diferenţa dintre suma vârstelor a două persoane şi diferenţa lor este 20 de ani. Triplul sumei vârstelor este egal cu de 7 ori diferenţa vârstelor. Care este vârsta fiecărei persoane?*
(*Clasa a III-a*) **Valeria Avasîlcei, Iaşi**

Soluţie. Din $(a + b) - (a - b) = 20$ se obţine $b + b = 20$, deci $b = 10$. Utilizând a doua informaţie găsim $3(a + 10) = 7(a - 10)$, de unde $3a + 30 = 7a - 70$, aşadar $30 = 4a - 70$ şi $a = 25$. Vârstele sunt: 25 ani, 10 ani.

P.202. *Aflaţi numerele* $\overline{ab}$ *şi* c*, cu* $b \neq 9$ *şi* $c \neq 0$*, astfel încât, dacă mărim cifrele* a *şi* b *cu câte o unitate, atunci produsul* $\overline{ab} \cdot c$ *se dublează.*

(*Clasa a III-a*) **Amalia Munteanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Dacă cifrele a şi b se măresc cu câte o unitate, atunci numărul $\overline{ab}$ devine $\overline{ab} + 11$ şi condiţia problemei ne dă $(\overline{ab} + 11)c = 2 \cdot \overline{ab} \cdot c$, de unde $11 \cdot c = \overline{ab} \cdot c$ şi obţinem $\overline{ab} = 11$, $c = 1, 2, 3, \cdots, 9$.

P.203. *Cei doi tigri de la Zoo au suficientă hrană pentru* 3 *săptămâni. Au mai fost aduşi, însă, încă* 5 *tigri. Dacă fiecare mănâncă aceeaşi cantitate de hrană pe zi, câte zile le va mai ajunge acum hrana?*

(*Clasa a IV-a*) **Inst. Laura Chirilă, Iaşi**

Soluţie. Dacă 2 tigri au suficientă hrană 3 săptămâni, atunci un singur tigru are suficientă hrană 6 săpţămâni, adică 42 zile. 7 tigri vor avea suficientă hrană numai $42 : 7 = 6$ zile.

P.204. *Aflaţi toate numerele naturale* n *astfel încât triplul predecesorului lui* n *nu depăşeşte dublul succesorului lui* n*.*

(*Clasa a IV-a*) **Andreea Simion, elevă, Iaşi**

Soluţie. Trebuie să avem $3 \times (n-1) \leq 2 \times (n+1)$, adică $3 \times n - 3 \times 1 \leq 2 \times n + 2 \times 1$, ceea ce este echivalent cu $n \leq 5$ şi obţinem $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

P.205. *Fie* S *suma a zece numere naturale nenule.*

a) Dacă $S = 54$*, arătaţi că există cel puţin două numere egale.*

b) Aflaţi zece numere naturale nenule distincte pentru care $S = 57$*. Câte posibilităţi sunt? Justificaţi!*

(*Clasa a IV-a*) **Constanţa Tudorache şi Nelu Tudorache**

Soluţie. a) Suma celor mai mici zece numere naturale nenule distincte este $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 = 55$. Micşorând cu o unitate unul dintre termeni, vom obţine două numere egale.

b) În suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 = 55$ putem să înlocuim pe 9 cu 11 sau pe 10 cu 12 şi obţinem 10 numere naturale nenule şi distincte care au suma 57. Avem două posibilităţi.

Clasa a V-a

V.123. *Un spiriduş îi şopteşte Ioanei: "Pentru a salva lumea de rău, prepară o poţiune din praf de aur şi praf de stele. În camera albastră este un dulap uriaş, cu numeroase rafturi, fiecare conţinând câte* 20 *de sticluţe numerotate: de la* 1 *la* 20 *pe primul raft, de la* 21 *la* 40 *pe al doilea etc. Numărul raftului cu sticluţa cu praf de aur este egal cu numărul sticluţei cu praf de stele. Suma dintre numărul sticluţei cu praf de aur şi numărul sticluţei cu praf de stele este* 243*". Care sunt numerele sticluţelor pe care trebuie să le aleagă Ioana?*

Cristina Timofte, Iaşi

Soluţie. Fie x numărul sticluţei cu praf de stele; numărul sticluţei cu praf de aur va fi $20(x-1) + r$ unde r poate fi $1, 2, \cdots, 20$. Avem:

$$x + 20(x-1) + r = 243 \Rightarrow 21x + r = 263, \ \ r \leq 20.$$

Singura soluţie convenabilă este $x = 12$, $r = 11$. Sticluţele căutate sunt numerotate cu 12 (cea cu praf de stele), respectiv 231 (cea cu praf de aur).

V.124. *Arătaţi că numărul* $A = 100\left(\frac{7}{1\cdot 2} + \frac{7}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{7}{99\cdot 100}\right) + 589\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{587\cdot 589}\right)$ *este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte.*

Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

Soluţie. Calculând sumele (telescopice) din paranteze, obţinem că $A = 100 \cdot \frac{693}{100} + 589 \cdot \frac{294}{589} = 987$, care este cel mai mare număr natural de trei cifre distincte.

V.125. *Se consideră numărul* $a = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2010$ *şi mulţimea* $M = \{n \in \mathbb{N} | na = k^2, k \in \mathbb{N}\}$. *Determinaţi cele mai mici cinci elemente ale lui* M.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Soluţie. Calculând suma, obţinem că $a = 2010 \cdot 2011 : 2 = 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 2011$, unde factorii ultimului produs sunt numere prime. Cum na este pătrat perfect, rezultă că $n = 3 \cdot 5 \cdot 67 \cdot 2011 \cdot m^2 = am^2$, cu $m \in \mathbb{N}$. Cele mai mici cinci elemente ale lui M sunt $0, a, 4a, 9a$ şi $16a$.

V.126. *Se consideră mulţimea* $A = \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$. *Scrieţi mulţimea* A *ca reuniune a trei mulţimi disjuncte două câte două, având acelaşi cardinal şi aceeaşi sumă a elementelor.*

Mirela Marin, Iaşi

Soluţie. Avem că $A = B \cup C \cup D$, unde $B = \{6k + 1 | 0 \le k \le 334\} \cup \{6k + 6 | 0 \le k \le 334\}$, $C = \{6k + 2 | 0 \le k \le 334\} \cup \{6k + 5 | 0 \le k \le 334\}$ şi $D = \{6k + 3 | 0 \le k \le 334\} \cup \{6k + 4 | 0 \le k \le 334\}$. Fiecare dintre mulţimile B, C şi D are cardinalul 670 şi suma elementelor egală cu 673 685, deci sunt îndeplinite cerinţele problemei.

V.127. *Determinaţi numerele naturale* A *pentru care* $A + S(A) = 2010$. (*Am notat cu* $S(A)$ *suma cifrelor numărului* A.)

Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Numărul A este de cel mult patru cifre, cu cifra miilor cel mult egală cu 2, deci $S(A) \le 2 + 9 + 9 + 9 = 29$. Rezultă că $1981 \le A \le 2010$. Verificând cele treizeci de posibilităţi, obţinem că $A \in \{1986, 2004\}$.

Evident, numărul verificărilor poate fi micşorat. De exemplu, cum A şi $S(A)$ dau acelaşi rest la împărţirea prin 3, iar suma 2010 se divide cu 3, rezultă că $A \vdots 3$ şi astfel rămân de făcut doar zece verificări.

V.128. *Reconstituiţi o împărţire, ştiind că împărţitorul, câtul şi restul sunt cifre ale deîmpărţitului.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $D = I \cdot C + R$, cu $R < I$. Cum I, C, R sunt cifre, rezultă că $D \le 89$, iar din $R < I$, urmează că D nu poate fi număr de o cifră. Astfel, $D = \overline{ab}$ şi $I, C, R \in \{a, b\}$; deducem că $I = C > R$ sau $I > C = R$. În cazul în care $a > b$, obţinem că $I = C = a$, $R = b$, respectiv $I = a$, $C = R = b$; prima situaţie conduce la $10a + b = a^2 + b \Leftrightarrow a = 10$, imposibil, iar a doua conduce la $100 + b = ab + b \Leftrightarrow b = 10$, din nou impisibil. Rămâne că $a < b$, deci $I = C = b$, $R = a$ sau $I = b, C = R = a$. În primul caz, $10a + b = b^2 + a \Leftrightarrow 9a = b(b - 1)$, cu unica soluţie $a = 8$, $b = 9$, iar în cel de-al doilea, $10a + b = ab + a \Leftrightarrow 9a = a(b - 1) \Leftrightarrow b = 10$, imposibil. În concluzie, împărţirea căutată este $89 = 9 \cdot 9 + 8$.

V.129. *Fie a, b, c trei numere impare, iar $A = 2^{\frac{a+b}{2}} \cdot 3^{\frac{a+c}{2}} \cdot 5^{\frac{b+c}{2}}$. Ştiind că $30A$ nu este pătrat perfect, arătaţi că măcar unul dintre numerele a, b, c nu este pătrat perfect.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Întrucât a, b, c sunt impare, numerele $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \dfrac{a+c}{2}$ şi $z = \dfrac{b+c}{2}$ sunt naturale, având suma egală cu $a + b + c$, deci impară. Rezultă că x, y, z sunt fie toate impare, fie unul impar şi două pare. Prima situaţie nu convine, deoarece numărul $30A = 2^{x+1} \cdot 3^{y+1} \cdot 5^{z+1}$ ar avea toţi exponenţii pari, deci ar fi pătrat perfect. Rămâne că există un număr par printre numerele x, y, z (de fapt, chiar două) şi atunci două dintre numerele impare a, b, c dau resturi diferite (1 şi 3) la împărţirea prin 4. Acela dintre numerele a, b, c care este de forma $M_4 + 3$ nu poate fi pătrat perfect.

Clasa a VI-a

VI.123. *Stabiliţi în câte moduri îl putem scrie pe 2010 ca sumă de trei numere naturale nenule, direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive.*

Mirela Obreja şi Ioan Lungu, Vaslui

Soluţie. Fie $a, b, c, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a+b+c = 2010$ şi $(a, b, c) D.P. (n, n+1, n+2)$; folosind proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale, avem că

$$\frac{a}{n} = \frac{b}{n+1} = \frac{c}{n+2} = \frac{a+b+c}{n+(n+1)+(n+2)} = \frac{2010}{3(n+1)} = \frac{670}{n+1}.$$

Atunci $b = 670$, $a = 670 \cdot \dfrac{n}{n+1}$, iar $c = 670\dfrac{n+2}{n+1}$. Cum $(n, n+1) = 1$ şi $(n+1, n+2) = 1$, rezultă că $n + 1$ este un divizor al lui 670, cel puţin egal cu 2 (deoarece $n \neq 0$). Otinem că $n \in \{1, 4, 9, 66, 133, 334, 669\}$, prin urmare 2010 poate fi descompus în şapte moduri cu respectarea cerinţelor problemei.

VI.124. *Într-o duminică, bunica face clătite pentru nepoţi; 40% dintre clătite sunt cu gem, iar restul cu ciocolată. În duminica următoare, bunica face cu 10% mai multe clătite cu gem şi cu 5% mai puţine clătite cu ciocolată. În care dintre duminici a făcut bunica mai multe clătite?*

Doru Turbatu, Iaşi

Soluţie. Fie n numărul clătitelor făcute de bunică în prima duminică. Dintre acestea, $40\% \cdot n = \dfrac{2n}{5}$ sunt cu gem, iar $\dfrac{3n}{5}$ sunt cu ciocolată. În a doua duminică, avem $\dfrac{2n}{5} + \dfrac{10}{100} \cdot \dfrac{2n}{5} = \dfrac{11n}{25}$ clătite cu gem şi $\dfrac{3n}{5} - \dfrac{5}{100} \cdot \dfrac{3n}{5} = \dfrac{57n}{100}$ clătite cu ciocolată, în total $\dfrac{101n}{100}$ clătite. Rezultă că în a doua duminică bunica a făcut mai multe clătite (cu 1% mai mult decât în prima duminică).

VI.125. *Determinaţi restul împărţirii prin 2010 a numărului $A = 1^{2011} + 2^{2011} + \cdots + 2011^{2011}$.*

Andrei Paşa, elev, Iaşi

Soluţie. Pentru exponeţi impari, $a^n + b^n = M(a+b)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$. În cazul nostru, $1^{2011} + 2009^{2011} = M_{2010}$, $2^{2011} + 2008^{2011} = M_{2010}, \cdots, 1004^{2011} + 1006^{2011} = M_{2010}$. Evident că $2010^{2011} = M_{2010}$, iar $2011^{2011} = (2010+1)^{2011} = M_{2010} + 1$.

Numărul 1005^{2011} este impar şi se divide cu 1005, prin urmare $1005^{2011} = M_{2010} + 1005$. În concluzie, $A = M_{2010} + 1006$.

VI.126. *Pe tablă sunt scrise numerele* $1, 2, 3, \cdots, 2010$. *Andrei şterge de pe tablă două numere, înlocuindu-le cu media lor aritmetică şi procedează astfel în mod repetat, până când pe tablă rămâne un singur număr. Este posibil ca acest ultim număr să fie* $2009,25$?

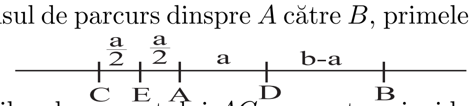
Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Media aritmetică a două numere distincte este strict mai mică decât numărul mai mare. Pentru ca în final să rămână pe tablă numărul $2009,25$, la ultimul pas trebuie să facă media numerelor 2010 şi $2008,5$. Pentru a obţine $2008,5$, la penultimul pas Andrei va face media numerelor 2009 şi 2008. Astfel, în primii 2007 paşi, ar trebui ca din numerele $1, 2, \cdots, 2008$, să rămână pe tablă 2008, fapt imposibil conform observaţiei iniţiale.

VI.127. *Considerăm punctele coliniare distincte* A, B, C, D *şi* E *astfel încât* $AB = b$, $AC = a$, $BD = b - a$ $(2a < b < 3a)$, *E este simetricul lui B faţă de D, iar mijlocul segmentului* $[AC]$ *este punctul* E. *Aflaţi numerele a şi b, ştiind că* $BD = 6$.

Matei Hăvârneanu, elev, Iaşi

Soluţie. Considerând pe dreapta AB sensul de parcurs dinspre A către B, primele patru puncte se pot afla într-una dintre ordinile $A - B - C - D$, $C - A - B - D$ sau $C - A - D - B$. În primele două situaţii, mijlocul segmentului AC nu poate coincide cu simetricul lui B faţă de D. Rămâne de studiat doar cazul $C - A - D - B$.

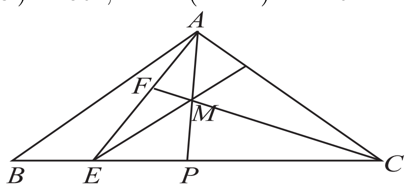


Cum E este mijlocul lui $[AC]$, obţinem că $AE = \dfrac{a}{2}$. Însă D este mijlocul lui $[BE]$, prin urmare $a + \dfrac{a}{2} = b - a$, deci $b = \dfrac{5a}{2}$. Condiţia $BD = 6$ conduce la $a = 4$, $b = 10$.

VI.128. *Se consideră triunghiul isoscel ABC cu* $m(\widehat{A}) = 120°$. *Perpendiculara în A pe AC intersectează bisectoarea unghiului* $\widehat{C}$ *în F şi latura BC în E. Paralela prin E la AB taie CF în M şi notăm* $\{P\} = AM \cap BC$. *Determinaţi măsura unghiului* $\widehat{APB}$.

Gabriela Popa, Iaşi

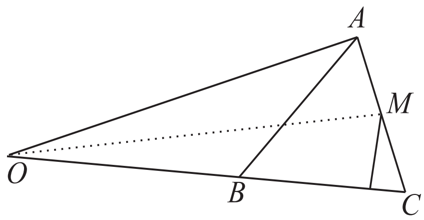
Soluţie. Observăm că $AB = AC$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 30°$, iar $m(\widehat{BAE}) = 120° - 90° = 30°$. Cum $AB \| EM$, deducem că $m(\widehat{AEM}) = 30°$. Însă $m(\widehat{AEC}) = 180° - 90° - 30° = 60°$, prin urmare EM este bisectoarea unghiului $\widehat{AEC}$. Rezultă că M este centrul cercului înscris în $\triangle AEC$, deci $m(\widehat{EAP}) = \dfrac{1}{2} \cdot 90° = 45°$. Din triunghiul AEP obţinem că $m(\widehat{APB}) = 180° - 60° - 45° = 75°$.



VI.129. *Se consideră triunghiul ABC. Determinaţi un punct M pe latura* $[AC]$, *aflat la egală distanţă de vârful A şi de dreapta BC.*

Mihaela Cianga, Iaşi

Soluţie. Fie O punctul de intersecţie dintre BC şi perpendiculara în A pe dreapta AC. Din ipoteza problemei, rezultă că M este egal depărtat de dreptele OA şi OC, prin urmare se află situat la intersecţia dintre AC şi bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$.



Clasa a VII-a

VII.123. *Determinaţi numerele* $\overline{abc}$, *scrise în baza* 10, *pentru care numărul* $A = \sqrt{\overline{abc} - \sqrt{\overline{abc} - 28}}$ *este natural.*

Vasile Chiriac, Bacău

Soluţia 1. Observăm că $\sqrt{\overline{abc} - 28} = \overline{abc} - A^2 \in \mathbb{N}$, deci numărul $\overline{abc} - 28$ este pătrat perfect. Rezultă că $\overline{abc} = k^2 + 28$, unde $k \in \{9, 10, \cdots, 31\}$. Verificând cele 22 de cazuri posibile, obţinem că A este număr natural doar când $\overline{abc} \in \{109, 812\}$.

Soluţia 2. Mai general, determinăm numerele naturale x pentru care $A = \sqrt{x - \sqrt{x - 28}}$ este număr natural. Vom avea $x = k^2 + 28$, $k \in \mathbb{N}$, iar $k^2 - k + 28 = A^2$, adică $(2k-1)^2 - 4A^2 = -111$. Deducem că $(2k - 2A - 1)(2k + 2A - 1) = -111$ şi, studiind cazurile posibile, regăsim exact soluţiile de mai sus. Remarcăm astfel faptul că nu este esenţial ca numărul natural x să fie de trei cifre.

VII.124. *Demonstraţi că nu există numere naturale* n *pentru care numărul* $A = \sqrt{n} + \sqrt{n + 2010}$ *să fie pătrat perfect.*

Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Dacă n, m sunt numere naturale astfel încât $\sqrt{n} + \sqrt{m} \in \mathbb{Q}^*$, atunci n şi m sunt pătrate perfecte. Într-adevăr, am obţine că $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \dfrac{n-m}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{n} = \dfrac{1}{2}[(\sqrt{n} + \sqrt{m}) + (\sqrt{n} - \sqrt{m})] \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{m} = (\sqrt{n} + \sqrt{m}) - \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Cum $n, m \in \mathbb{N}$, deducem că $\sqrt{n}, \sqrt{m} \in \mathbb{N}$, prin urmare n şi m sunt pătrate perfecte.

Să presupunem că ar exista $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A \in \mathbb{N}$; atunci $n = a^2$, $n + 2010 = b^2$, cu $a, b \in \mathbb{N}$. Rezultă că $b^2 - a^2 = 2010$, deci $(b-a)(b+a) = 2010$. Cum $A = a + b$ este pătrat perfect, ar trebui ca $a + b = 1$, $b - a = 2010$, situaţie care nu convine. În concluzie, nu există $n \in \mathbb{N}$ pentru care A să fie pătrat perfect.

VII.125. *Demonstraţi că numărul* $A = 2009 \cdot 2011^{2010} - 2010 \cdot 2011^{2009} + 1$ *este divizibil cu* 2010^2.

Tamara Culac, Iaşi

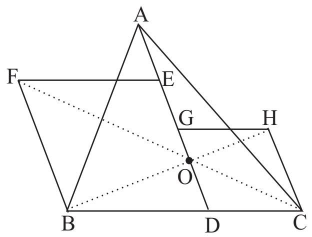
Soluţie. Întrucât $(a+b)^n = ma^2 + nM_a + b^n$, avem că $2011^{2010} = M_{2010^2} + 2010 \cdot M_{2010} + 1 = M_{2010^2} + 1$, iar $2011^{2009} = M_{2010^2} + 2009 \cdot M_{2010} + 1$. Atunci $A = 2009(M_{2010^2} + 1) - 2010 \cdot (M_{2010^2} + 2009 \cdot M_{2010} + 1) + 1 = M_{2010^2} + 2009 - M_{2010^2} - 2010 + 1 = M_{2010^2}$.

VII.126. *Dacă* a, b, c *sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar* p *este semiperimetrul acestuia, demonstraţi că* $\dfrac{a}{p-a} + \dfrac{b}{p-b} + \dfrac{c}{p-c} \geq 6$.

Ionel Nechifor, Iaşi

Soluţie. Avem: $\dfrac{a}{p-a}+\dfrac{b}{p-b}+\dfrac{c}{p-c}=\left(\dfrac{p}{p-a}-1\right)+\left(\dfrac{p}{p-b}-1\right)+\left(\dfrac{p}{p-c}-1\right)=$ $p\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right)-3=((p-a)+(p-b)+(p-c))\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right)-$ $3\geq 9-3=6$, cu egalitate în cazul triunghiului echilateral.

Notă. S-au primit alte trei soluţii ale acestei probleme din partea d-lui **Titu Zvonaru**, Comăneşti.



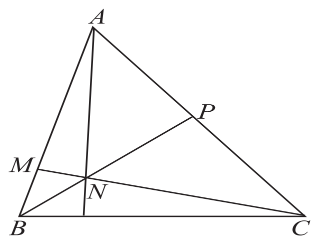
VII.127. *Se consideră triunghiul ABC, punctul D pe latura (BC) şi romburile $BDEF$ şi $CDGH$ cu $E, G\in (AD)$, astfel încât A, F şi H sunt de aceeaşi parte a dreptei BC, iar AD separă F şi H. Demonstraţi că dreptele AD, BH şi CF sunt concurente.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie $\{O\}=BH\cap CF$; cum $BF\| CH$, rezultă că $\dfrac{HO}{OB}=\dfrac{HC}{BF}=\dfrac{CD}{DB}$. Cu reciproca teoremei lui Thales în $\triangle BCH$, obţinem că $DO\| CH$ şi atunci $O\in AD$, deci dreptele AD, BH şi CF sunt concurente.

VII.128. *Pe latura (AB) a triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctul M, iar pe segmentul (CM) punctul N, astfel încât $\triangle BNM\sim\triangle CAM$. Demonstraţi că $AN\perp BC$.*

Constantin Apostol, Rm. Sărat

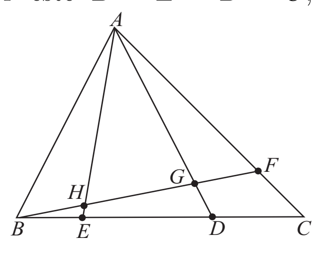


Soluţie. Avem că $\widehat{NMB}\equiv\widehat{CMA}$ şi, cum cele două unghiuri sunt suplementare, ele vor fi drepte, deci $CM\perp AB$. Fie $\{P\}=BN\cap AC$; deoarece $\widehat{NBM}\equiv\widehat{ACM}$ şi $m(\widehat{ACM})+m(\widehat{A})=90°$, rezultă că $m(\widehat{ABP})+m(\widehat{A})=90°$, prin urmare $BP\perp AC$. Astfel, N se află la intersecţia a două înălţimi ale triunghiului, adică este ortocentrul acestuia. Deducem că AN este tot înălţime, deci $AN\perp BC$.

VII.129. *Se consideră triunghiul ABC cu $BC>AC>AB$ şi punctele D, E pe latura (BC) şi F pe (AC), astfel încât $AB=BD=AF$, iar $AC=CE$. Dreapta BF intersectează AD şi AE în G, respectiv H. Arătaţi că punctele D, E, G şi H sunt conciclice.*

Daniela Brumă, Deleni (Iaşi)

Soluţie. Observăm că, pe BC, ordinea punctelor este $B-E-D-C$, deoarece altfel ar rezulta că $BC>AB+AC$, imposibil. Din triunghiurile isoscele ABF şi EAC, obţinem că $m(\widehat{ABF})=90°-\dfrac{1}{2}m(\widehat{A})$, iar $m(\widehat{EAC})=90°-\dfrac{1}{2}m(\widehat{C})$, deci $m(\widehat{BAH})=m(\widehat{A})+\dfrac{1}{2}m(\widehat{C})-90°$. Deducem că $m(\widehat{AHB})=180°-m(\widehat{ABF})-m(\widehat{BAH})=180°-m(\widehat{A})$, prin urmare $m(\widehat{EHG})=180°-m(\widehat{A})=180°-m(\widehat{D})$ (dat fiind faptul că triunghiul BAD este isoscel). Rezultă astfel că $m(\widehat{EHG})+m(\widehat{D})=$



180°, de unde concluzia problemei.

Clasa a VIII-a

VIII.123. *Rezolvaţi în* $\mathbb{R}$ *ecuaţia* $2x^2+2y^2-2xy+2x-10y+14=0$.

Ionica Marcovschi, Paşcani

Soluţie. Ecuaţia dată se poate scrie sub forma $(x-y+2)^2+(x-1)^2+(y-3)^2=0$. Cum pătratele numerelor reale sunt nenegative, obţinem că $x-y+2=x-1=y-3=0$, de unde $x=1$, $y=3$.

VIII.124. *Demonstraţi ca numărul*

$$A=\frac{(2^4+2^2+1)(3^4+3^2+1)\cdots(2010^4+2010^2+1)}{3(2010^2+2010+1)}$$

este pătrat perfect.

Bianca Maria Filip, elevă, Iaşi

Soluţie. Folosind descompunerea $n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2=[n(n-1)+1]\cdot[n(n+1)+1]$, obţinem că $A=(2^2+2+1)^2(3^2+3+1)^2\cdots(2009^2+2009+1)^2$, deci A este pătrat perfect.

VIII.125. *Determinaţi numerele întregi* n *pentru care*

$$\left[\sqrt{n^2+3n+9}\right]=\sqrt{n^2+3n+9}.$$

Ionuţ Stroe, student, Iaşi

Soluţie. Partea întreagă fiind număr întreg, rezultă că $n^2+3n+9=k^2$, unde $k\in\mathbb{N}$. Obţinem că $(2n+3)^2+27=4k^2$, deci $(2k+2n+3)(2k-2n-3)=27$, cu ambele paranteze numere întregi. Analizând situaţiile posibile, găsim soluţiile $n\in\{-8,-3,0,5\}$.

VIII.126. *Fie* $a,b,c,p\in\mathbb{N}^*$ *cu* a,b,c *distincte şi* $\sqrt{p}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *iar* $A=\{a\sqrt{p},b\sqrt{p},c\sqrt{p}\}$. *Funcţia* $f:A\to\mathbb{N}$ *este definită prin* $f(x)=x^2+(2c-a-b)x-b-1$. *Dacă* $x,y\in A$, $x<y$, *demonstraţi că* $f(x)<f(y)$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Soluţie. Cum $f(a\sqrt{p})\in\mathbb{N}$, obţinem că $(a^2p-b-1)+a(2c-a-b)\sqrt{p}\in\mathbb{N}$, de unde $a(2c-a-b)=0$. Ştim că $a\neq0$, deci $2c-a-b=0$ şi atunci $f(x)=x^2-(b+1)$. Dacă $x,y\in A$, $x<y$, numerele x şi y vor fi pozitive, prin urmare $x^2<y^2$ şi de aici rezultă că $f(x)<f(y)$.

VIII.127. *Determinaţi numerele reale* x,y *şi* z, *ştiind că*

$$4(x-1)y^2z^2+4(y-1)z^2x^2+4(z-1)x^2y^2=3x^2y^2z^2.$$

Lucian Tuţescu şi Mariana Mărculescu, Craiova

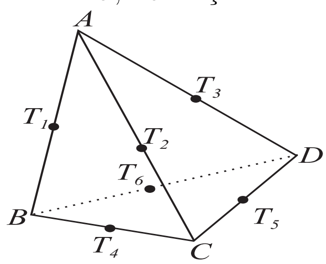
Soluţie. Dacă unul dintre numerele x,y sau z este zero, vom avea şi un al doilea număr nul, prin urmare ecuaţia dată are soluţiile $(\alpha,0,0);(0,\beta,0)$ şi $(0,0,\gamma)$, cu $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Dacă $xyz\neq0$, împărţim prin $4x^2y^2z^2$ şi obţinem că $\frac{x-1}{x^2}+\frac{y-1}{y^2}+\frac{z-1}{z^2}=\frac{3}{4}$. Fiecare dintre fracţiile din stânga este însă cel mult egală cu

$\frac{1}{4}(\frac{x-1}{x^2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$, evident adevărat, cu egalitate doar dacă $x = 2$). Deducem că ecuaţia din enunţ, mai admite, în plus, soluţia $(2,2,2)$.

VIII.128. *Dacă cercurile înscrise în trei feţe ale unui tetraedru sunt tangente două câte două, atunci cercul înscris în a patra faţă este tangent primelor trei.*

Mihály Bencze, Braşov

Soluţie. Considerăm cercurile înscrise triunghiurilor ABC, ACD şi ABD tangente muchiilor în $T_1, T_2, \cdots, T_6$. Avem că $AT_1 = AT_2 = AT_3 = a$ (deoarece sunt tangente duse din A la cercurile înscrise în triunghiurile ABC, ACD). La fel, $BT_1 = BT_4 = BT_6 = b$; $CT_4 = CT_2 = CT_5 = c$ şi $DT_5 = DT_3 = DT_6 = d$. Dacă M, N, P sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris triunghiului BCD cu laturile BC, CD respectiv BD, cum $BM = \frac{1}{2}P_{BCD} - CD = \frac{1}{2}(2b+2c+2d) - (c+d) = b = BT_4$, rezultă că $M = T_4$. La fel, $N = T_5$ şi $P = T_6$.



VIII.129. *Să se arate că din feţele unui cub de muchie l, confecţionat din carton, putem construi, fără resturi, feţele a şase cuburi de muchii $l_1, l_2, \cdots, l_6$ astfel încât $l^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_6^2$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Împărţim fiecare faţă a cubului dat în şase pătrate de laturi $l_1 = \frac{2}{3}l$ şi $l_2 = l_3 = \cdots = l_6 = \frac{1}{3}l$. Evident, $l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_6^2 = \frac{4}{9}l^2 + 5\frac{1}{9}l^2 = l^2$.

Clasa a IX-a

IX.111. *Let a, b, c be positive real numbers. Prove that* $\frac{a^2+1}{b+c} + \frac{b^2+1}{c+a} + \frac{c^2+1}{a+b} \geq 3$.

Pedro H.O. Pantoja, Brazil

Soluţia 1. Conform inegalităţii lui Nesbitt, avem că $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. Luând $x = a^2+1$, $y = b^2+1$, $z = c^2+1$, obţinem că $\sum \frac{a^2+1}{b^2+c^2+2} \geq \frac{3}{2}$. Pe de altă parte, cum $b^2+1 \geq 2b$, $c^2+1 \geq 2c$, rezultă că $b^2+c^2+2 \geq 2(b+c)$, deci $\sum \frac{a^2+1}{b+c} \geq 2\sum \frac{a^2+1}{b^2+c^2+2}$ şi de aici urmează inegalitatea cerută. Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 1$.

Soluţia 2. Avem $\sum \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$ şi $\sum \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$, deci $\sum \frac{a^2+1}{b+c} \geq \frac{a+b+c}{2} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{9}{2(a+b+c)}} = 3$.

IX.112. *Arătaţi că pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, există numerele naturale $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ astfel încât* $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2010}$.

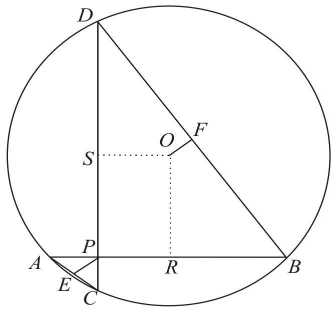
Radu Sava, Iaşi

Soluţie. Vom demonstra afirmaţia prin inducţie matematică. Pentru $n = 2$, putem considera x_1=2011 şi $x_2 = 2010 \cdot 2011$. Presupunem că există $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ca în enunţ şi să arătăm că există $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1}$ astfel încât $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{2010}$. Cum $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n+1} + \frac{1}{x_n(x_n+1)}$, putem lua $y_1 = x_1, \cdots, y_{n-1} = x_{n-1}$, $y_n = x_n + 1$, $y_{n+1} = x_n(x_n + 1)$ şi toate cerinţele sunt îndeplinite.

IX.113. *Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O sunt perpendiculare şi se intersectează în P. Dacă E şi F sunt mijloacele segmentelor AC, respectiv BD, arătaţi că $PE = OF$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţia 1. Dacă R, S sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv CD, atunci $2\overrightarrow{PO} = 2\overrightarrow{PR} + 2\overrightarrow{PS} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BR}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DS}) = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) + (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BR}) + (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS}) = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) = 2\overrightarrow{PE} + 2\overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{PE} + 2\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OF}$. Deducem că $2\overrightarrow{PE} + 2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$, prin urmare $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{FO}$; în particular, $PE = OF$.



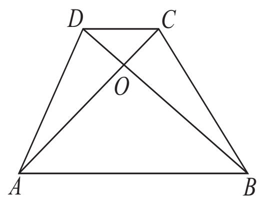
Soluţia 2. Fie $\{M\} = PF \cap AC$. Cum $\widehat{APM} \equiv \widehat{FPB} \equiv \widehat{FBP} \equiv \widehat{ACP}$, rezultă că $m(\widehat{APM}) + m(\widehat{PAM}) = 90°$, deci $m(\widehat{AMP}) = 90°$. Astfel, $FP \perp AC$ şi, cum $OE \perp AC$, deducem că $PF \| OE$. Analog se arată că $OF \| PE$ şi atunci $PEOF$ este paralelogram, de unde concluzia problemei.

IX.114. *a) Dacă O este punctul de intersecţie a diagonalelor neperpendiculare ale patrulaterului convex $ABCD$, atunci $AB \| CD$ dacă şi numai dacă $AO^2 + DO^2 + BC^2 = BO^2 + CO^2 + AD^2$.*

b) Presupunem că $AB \| CD$, $m(\widehat{AC, BD}) \neq 90°$ şi notăm cu r_1, r_2 razele cercurilor înscrise în triunghiurile AOD, respectiv BOC şi cu R_1, R_2 razele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri. Arătaţi că $AD = BC \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow R_1 = R_2$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. a) Cum $\widehat{AOD} \equiv \widehat{BOC}$ (opuse la vârf), atunci $\cos\widehat{AOD} = \cos\widehat{BOC}$, deci $\frac{AO^2 + DO^2 - AD^2}{2AO \cdot DO} = \frac{BO^2 + CO^2 - BC^2}{2BO \cdot CO}$ $(*)$. Deducem că $AB \| CD \Leftrightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \Leftrightarrow AO \cdot DO = BO \cdot CO \overset{}{\underset{(*)}{\Longleftrightarrow}} AO^2 + DO^2 - AD^2 = BO^2 + CO^2 - BC^2 \Leftrightarrow AO^2 + DO^2 + BC^2 = BO^2 + CO^2 + AD^2$.

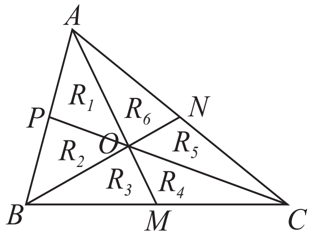


b) Cum $AB \| CD$, are loc egalitatea de la punctul a). În plus, $AO \cdot DO = BO \cdot CO$ şi $S_{AOD} = S_{BOC}(= S)$. Atunci $R_1 = R_2 \Leftrightarrow \frac{AD \cdot DO \cdot AO}{4S} = \frac{BO \cdot CO \cdot BC}{4S} \Leftrightarrow AD = BC$, iar $r_1 = r_2 \Leftrightarrow \frac{S}{p_1} = \frac{S}{p_2} \Leftrightarrow p_1 = p_2 (= p) \Leftrightarrow p_1^2 = p_2^2 \Leftrightarrow AO^2 + DO^2 + BC^2 + 2(AO \cdot DO + AO \cdot BC + DO \cdot BC) = BO^2 + CO^2 + AD^2 + 2(BO \cdot CO + BO \cdot AD + CO \cdot AD) \Leftrightarrow BC(AO + DO) = AD(BO + CO) \Leftrightarrow BC(p - AD) = AD(p - BC) \Leftrightarrow BC = AD$.

IX.115. *Trei ceviene concurente împart un triunghi ABC în şase triunghiuri mai mici, având razele cercurilor circumscrise $R_1, R_2, \cdots, R_6$. Dacă $R = R_1+R_2+\cdots+R_6$, demonstraţi că măcar două dintre numerele $R_1, R_2, \cdots, R_6$ sunt cel mult egale cu $\frac{1}{6}R$.*

Marius Drăgan, Bucureşti

Soluţie. Cu notaţiile din figură, avem că $\frac{AO}{\sin APO} = 2R_1$, $\frac{BO}{\sin BPO} = 2R_2$, deci $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AO}{BO}$. Analog, $\frac{R_3}{R_4} = \frac{BO}{CO}$, $\frac{R_5}{R_6} = \frac{CO}{AO}$, prin urmare $\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_5}{R_6} = \frac{AO}{BO} \cdot \frac{BO}{CO} \cdot \frac{CO}{AO} = 1$ şi atunci $R_1R_3R_5 = R_2R_4R_6$. Vom arăta că cel puţin unul dintre numerele R_1, R_3 şi R_5 este cel mult egal cu $\frac{1}{6}R$. Într-adevăr, în caz contrar am avea că $R_1 > \frac{1}{6}R$, $R_3 > \frac{1}{6}R$, $R_5 > \frac{1}{6}R$, deci $R_1 + R_3 + R_5 > \frac{1}{2}R$, iar $R_2 + R_4 + R_6 = R - (R_1 + R_3 + R_5) < \frac{1}{2}R$. Cum $R_1R_3R_5 > \left(\frac{R}{6}\right)^3$, iar $R_2R_4R_6 \le \left(\frac{R_2 + R_4 + R_6}{3}\right) < \left(\frac{R}{6}\right)^3$, ajungem la o contradicţie. În aceeaşi manieră se arată că cel puţin unul dintre numerele R_2, R_4 şi R_6 este cel mult egal cu $\frac{1}{6}R$ şi cu aceasta, rezolvarea problemei este completă.



Clasa a X-a

X.111. *Rezolvaţi ecuaţia* $[\log_{1+|x|}(\sqrt{1+x^2}+|x|)] \cdot [\log_{\sqrt{1+x^2}+|x|}(1+|x|)] = a$, *unde a este un parametru real, iar $[t]$ este partea întreagă a lui t.*

Ştefan Gavril, Piatra Neamţ

Soluţie. Pentru ca baza logaritmilor să nu fie 1, se impune condiţia $x \in \mathbb{R}^*$. Observăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, numerele $1 + |x|$ şi $\sqrt{1+x^2} + |x|$ sunt strict mai mari decât 1, prin urmare $\log_{1+|x|}(\sqrt{1+x^2}+|x|) = \frac{1}{\log_{\sqrt{1+x^2}+|x|}(1+|x|)} = t > 0$. Nu putem avea $t = 1$, întrucât $x \neq 0$ şi atunci unul dintre numerele t sau $\frac{1}{t}$ se află în intervalul $(0,1)$, deci partea sa întreagă va fi 0. În concluzie, ecuaţia dată nu are soluţii dacă $a \in \mathbb{R}^*$, iar pentru $a = 0$ mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R}^*$.

X.112. *Se consideră mulţimile finite X, Y şi Z astfel încât $Z \subset Y$, $|X| = 4$, $|Y| \ge 5$ şi $|Z| = 3$. Determinaţi $|Y|$, ştiind că numărul funcţiilor $f : X \to Y$ a căror imagine include Z este 108.*

Mihai Haivas şi Constantin Chirilă, Iaşi

Soluţie. Dacă $Z = \{y_1, y_2, y_3\} \subset Y$, notăm cu $A_i = \{f : X \to Y | y_i \notin f(X)\}$, $i = 1, 2, 3$. Numărul funcţiilor care verifică cerinţa problemei este $m^4 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, unde $m = |Y|$. Conform principiului includerii şi excluderii, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3(m-1)^4 - 3(m-2)^4 + (m-3)^4 = m^4 - 24m + 36$. Deducem că $24m - 36 = 108$, de unde $m = 6$.

X.113. *Fie $a, b, x_1, x_2, \cdots, x_n$ numere reale strict pozitive ($n \in \mathbb{N}, n \ge 2$) şi σ o* *permutare a mulţimii* $\{1, 2, \cdots, n\}$. *Demonstraţi că*

$$\left(ax_1 + \frac{b}{x_{\sigma(1)}}\right) \cdots \left(ax_n + \frac{b}{x_{\sigma(n)}}\right) \leq \left(ax_1 + \frac{b}{x_1}\right) \cdots \left(ax_n + \frac{b}{x_n}\right).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. Eliminând numitorii, avem de demonstrat că

$$(ax_1x_{\sigma(1)} + b)(ax_2x_{\sigma(2)} + b) \cdots (ax_nx_{\sigma(n)} + b) \leq (ax_1^2 + b)(ax_2^2 + b) \cdots (ax_n^2 + b).$$

Observăm că $(ax_1x_{\sigma(1)} + b)^2 \leq (ax_1^2 + b)(ax_{\sigma(1)}^2 + b)$, întrucât această inegalitate este echivalentă cu $ab(x_1 - x_{\sigma(1)})^2 \geq 0$. Scriind şi celelalte inegalităţi similare şi înmulţindu-le membru cu membru, obţinem ceea ce dorim.

X.114. *Fie* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ *astfel încât* $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 1$ *şi* $z_1 - z_2z_3$, $z_2 - z_3z_1$ *şi* $z_3 - z_1z_2$ *sunt numere reale. Demonstraţi că* $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0$.

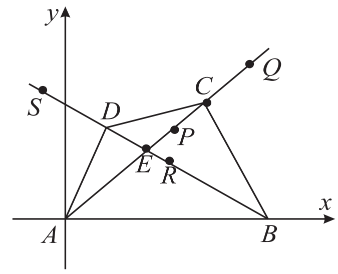
Ionuţ Ivănescu, Craiova

Soluţie. Fie $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Cum $z_1 - z_2z_3 = \overline{z}_1 - \overline{z}_2\overline{z}_3$ şi $\overline{z}_2 - \overline{z}_1\overline{z}_3 = z_2 - z_1z_3$, prin înmulţire membru cu membru, obţinem (după reduceri) că $(1-r)(z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1) = 0$. Întrucât $r \neq 1$, deducem că $z_1\overline{z}_2 = a \in \mathbb{R}^*$. Analog se arată că $z_2\overline{z}_3 = b \in \mathbb{R}^*$ şi $z_3\overline{z}_1 = c \in \mathbb{R}^*$. Din $z_1\overline{z}_2 = a$, $z_1\overline{z}_3 = \overline{c} = c$ obţinem, prin împărţire membru cu membru, că $\dfrac{z_2}{z_3} = \alpha$, unde $\alpha = \dfrac{a}{c} \in \mathbb{R}$, cu $|\alpha| = \dfrac{|a|}{|c|} = 1$, aşadar $z_2 = \pm z_3$. Similar, $z_2 = \pm z_1$ şi atunci măcar două dintre cele trei numere vor fi egale, de unde cerinţa problemei.

X.115. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex şi punctele* $P, Q \in AC$, $R, S \in BD$ *astfel încât* $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{RB}{RD} = \dfrac{SB}{SD}$. *Dacă* M *şi* N *sunt mijloacele segmentelor* PQ, *respectiv* RS, *demonstraţi că* $2MN < PQ + RS$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm $AC = \alpha$, $BD = \beta$, $\dfrac{AB}{CD} = k$ şi putem presupune $k > 1$ (în cazul în care $k = 1$, unul dintre punctele S, P sau Q nu există). Alegem un reper cartezian în raport cu care $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$, $D(d, e)$, cu $b > d$. Ţinând cont de formula care dă coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat, obţinem că $P\left(\dfrac{bk}{1+k}, \dfrac{ck}{1+k}\right)$, $Q\left(\dfrac{-bk}{1-k}, \dfrac{-ck}{1-k}\right)$, $R\left(\dfrac{a+dk}{1+k}, \dfrac{ek}{1+k}\right)$ şi $S\left(\dfrac{a-dk}{1-k}, \dfrac{-ek}{1-k}\right)$, prin urmare $PQ = \dfrac{2k\alpha}{k^2-1}$, iar $RS = \dfrac{2k\beta}{k^2-1}$. Coordonatele punctelor M şi N sunt $M\left(\dfrac{bk^2}{k^2-1}, \dfrac{ck^2}{k^2-1}\right)$, respectiv $N\left(\dfrac{dk^2-a}{k^2-1}, \dfrac{2k^2}{k^2-1}\right)$, deci $MN^2 = \left(\dfrac{bk^2}{k^2-1} - \dfrac{dk^2-a}{k^2-1}\right)^2 + \left(\dfrac{ck^2}{k^2-1} - \dfrac{ek^2}{k^2-1}\right)^2 = \dfrac{k^4}{(k^2-1)^2}\left[(b-d)^2 + (c-e)^2\right] +$



$\dfrac{a^2}{(k^2-1)^2}+\dfrac{2ak^2(b-d)}{(k^2-1)^2}$. Cum $CD^2=(b-d)^2+(c-e)^2$ şi $b-d\le CD$, rezultă că $MN^2\le\dfrac{k^2}{(k^2-1)^2}\left[k^2\cdot CD^2+AB^2\dfrac{1}{k^2}+2AB\cdot CD\right]=\dfrac{k^2}{(k^2-1)^2}(AB^2+CD^2+2AB\cdot CD)$, de unde $MN\le\dfrac{k(AB+CD)}{k^2-1}$.

Pentru a încheia rezolvarea, ar fi destul să demonstrăm că $\dfrac{2k(AB+CD)}{k^2-1}<\dfrac{2k(AC+BD)}{k^2-1}$, adică $AB+CD<AC+BD$. Această inegalitate rezultă imediat din inegalitatea triunghiului: dacă $\{E\}=AC\cap BD$, atunci $AB+CD<AE+EB+CE+ED=(AE+EC)+(BE+ED)=AC+BD$.

Clasa a XI-a

XI.111. *Demonstraţi că* $4(x^3+y^3)\ge 9xy|x-y|$, $\forall x,y\in[0,\infty)$.

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Dacă $y=0$, avem de arătat că $4x^3\ge 0$, adevărat. Fie $y>0$; dacă $x=y$, inegalitatea este evidentă, iar când $x\ne y$ putem presupune că $x>y$ (datorită simetriei). Împărţind prin y^3, cu notaţia $t=\dfrac{x}{y}>1$, avem de arătat că $f(t)\ge 0$, unde $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=4t^3-9t^2+9t+4$. Avem că $f'(t)=3(4t^2-6t+3)>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ şi, cum $f(1)=8>0$, rezultă că $f(t)>0$, $\forall t\in[1,\infty)$. Egalitatea în inegalitatea din enunţ se atinge când $x=y=0$.

XI.112. *Fie şirurile* $(w_n)_{n\ge1}$ *şi* $(p_n)_{n\ge1}$*, unde* $w_n=\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *(şirul lui Wallis), iar* p_n *este al n-lea număr prim. Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2w_n}{\pi}\right)^{\frac{p_n}{\ln\frac{2w_n}{\pi}\cdot\ln n^n}}$.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

Soluţie. Se ştie că $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\dfrac{\pi}{2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{n\ln n}=1$. În aceste condiţii, avem de-a face cu o nedeterminare de tip 1^∞. Folosind procedeul uzual, valoarea limitei cerute este e^l, unde $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2w_n-\pi}{\pi\cdot\ln\frac{2w_n}{\pi}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2w_n}{\pi}-1}{\ln\left[1+\left(\frac{2w_n}{\pi}-1\right)\right]}=1$.

XI.113. *Calculaţi limita şirului* (x_n) *definit prin:* $x_1\in(0,\infty)$, $\alpha\in(0,1)\cup(1,\infty)$, $x_{n+1}=-1+(1+\alpha x_n)^{1/\alpha}$, $\forall n\ge 1$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Pentru început, fie $\alpha\in(1,\infty)$; vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Prin inducţie, obţinem că $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Apoi, $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$, $\forall x\in(0,\infty)$ (întrucât funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^\alpha-\alpha x-1$ are derivata pozitivă şi $f(0)=0$). Rezultă că $1+\alpha x_n=(1+x_{n+1})^\alpha>1+\alpha x_{n+1}$, de unde $x_{n+1}<x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Astfel, există $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l\in[0,\infty)$ şi $(1+l)^\alpha=1+\alpha l$. Însă $(1+l)^\alpha>1+\alpha l$, dacă $l\in(0,\infty)$, după cum am demonstrat anterior şi rămâne că $l=0$.

Dacă $\alpha\in(0,1)$, se arată similar că $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$, $\forall x\in(0,\infty)$. Deducem că şirul este strict crescător şi, dacă ar fi mărginit superior, ar avea o limită $L\in(0,\infty)$

astfel încât $(1+L)^\alpha = 1+\alpha L$, ceea ce ar intra în contradicţie cu inegalitatea anunţată. Rămâne că şirul este nemărginit superior, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

XI.114. *Fiind date $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:*

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\alpha \\ f(x)-\beta & f(y)-\beta \end{vmatrix} = af(x)+bf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Marius Tiba, elev, Bucureşti

Soluţie. Observăm că schimbând x şi y între ele, semnul determinantului se schimbă, ceea ce conduce la $af(x) + bf(y) = -af(y) - bf(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, adică $(a+b)(f(x)+f(y)) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dacă $a + b \neq 0$, atunci $f(x) + f(y) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Luând $y = 0$, obţinem că $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (unde $c = -f(0)$). O astfel de funcţie verifică egalitatea din enunţ dacă şi numai dacă $c = \beta = 0$. Atunci, dacă $\beta \neq 0$, ecuaţia dată nu are soluţii, iar dacă $\beta = 0$, singura soluţie este funcţia nulă.

Dacă $a + b = 0$, definim $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g(x) = f(x) - \beta$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuaţia funcţională din enunţ devine $\begin{vmatrix} x-a & y-\alpha \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} = a[g(x) - g(y)]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, de unde $xg(y) - yg(x) = (a-\alpha)[g(x) - g(y)]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $a = \alpha$, pentru $y = 1$ obţinem $g(x) = xg(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x) = mx + \beta$, cu $m \in \mathbb{R}$. Dacă $a \neq \alpha$, luăm $y = 0$ şi obţinem că $g(x) = m(x + a - \alpha)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $f(x) = m(x + a - \alpha) + \beta$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se constată uşor că funcţiile afine obţinute în acest caz verifică ecuaţia din enunţ.

Problema 26043 din G.M. 9/2008 se obţine din aceasta, în cazul particular $\alpha = \beta = 0$, $a = -b$.

XI.115. *Determinaţi matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, având determinantul 1, ştiind că $X^4 + Y^4 + Z^4 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 6I_2$.*

Florin Stănescu, Găeşti

Soluţie. Dacă notăm cu x urma matricei X, cum $\det X = 1$, rezultă că $X^2 = xX - I_2$. De aici, $X^3 = xX - X = (x^2-1)X - xI_2$, iar $X^4 = (x^2-1)X^2 - xX = (x^3 - 2x)X - (x^2-1)I_2$. Trecând la urmă, obţinem că $TrX^2 = x^2 - 2$ şi $Tr(X^4) = x^4 - 4x^2 + 2$ şi relaţii analoage au loc pentru matricele Y şi Z. Trecem acum la urmă în egalitatea din enunţ; rezultă că $x^4 - 4x^2 + 2 + y^4 - 4y^2 + 2 + z^4 - 4z^2 + 2 = x^2 - 2 + y^2 - 2 + z^2 - 2 + 12$, de unde $(x^2-1)(x^2-4) + (y^2-1)(y^2-4) + (z^2-1)(z^2-4) = 12 \quad (*)$. Cum x, y, z sunt numere întregi, produsele $(x^2-1)(x^2-4)$, $(y^2-1)(y^2-4)$ şi $(z^2-1)(z^2-4)$ sunt sigur nenegative. Dacă, de exemplu, $|x| \geq 3$, atunci $(x^2-1)(x^2-4) \geq 40$ şi se ajunge la o contradicţie. Rezultă că $|x|, |y|, |z| \in \{0, 1, 2\}$; pentru a putea avea loc (*), va trebui ca $|x| = |y| = |z| = 0$, prin urmare $X^2 = Y^2 = Z^2 = -I_2$. În concluzie, X, Y şi Z vor fi matrice arbitrare de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $a^2 + 1$ divizibil cu b.

Clasa a XII-a

XII.111. *Fie x, y, z numere reale nenule. Dacă $x + y + z = 0$ şi $x^5 + y^5 + z^5 = x^7 + y^7 + z^7$, calculaţi valoarea expresiei $A = x^2 + y^2 + z^2$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Fie $xy+yz+zx=a$, $xyz=b$; atunci x,y,z sunt soluţiile ecuaţiei $t^3+at-b=0$. Notând $S_n=x^n+y^n+z^n$, $n\in\mathbb{N}$, obţinem că $S_{n+3}=-aS_{n+1}+bS_n$. Cum $S_0=3$, $S_1=0$, $S_2=-2a$, deducem: $S_3=3b$; $S_4=2a^2$; $S_5=-5ab$; $S_7=7a^2b$. Din condiţia $S_5=S_7$, rezultă că $ab(7a+5)=0$. Cum $ab\neq 0$, obţinem că $a=-\dfrac{5}{7}$ şi $A=S_2=\dfrac{10}{7}$.

XII.112. *Calculaţi limita şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definit prin* $a_n=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^n+x^{n+2}}dx$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Soluţia 1. Vom aplica inegalitatea CBS, forma integrală:

$$a_n=\int_0^1\sqrt{x^n}\cdot\sqrt{1+x^2}dx\le\sqrt{\int_0^1 x^n dx}\cdot\sqrt{\int_0^1(1+x^2)dx}=\frac{2}{\sqrt{3(n+1)}}.$$

Cum evident $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Soluţia 2 (**Moubinool Omarjee**)**.** Observăm că $0<a_n=\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+x^2}dx\le\int_0^1 x^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

XII.113. *Calculaţi* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}}\operatorname{ctg}t^2dt$.

Silviu Boga, Iaşi

Soluţie. Din formula de medie, $\displaystyle\int_{\frac{1}{x+1}}^{\frac{1}{x}}\operatorname{ctg}t^2dt=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\operatorname{ctg}t_x^2=\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{t_x^2}{\sin^2t_x}\cdot\cos^2t_x\cdot\frac{x^2}{(xt_x)^2}$. Cum $\dfrac{1}{x+1}<t_x<\dfrac{1}{x}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}t_x=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(xt_x)=1$; obţinem că limita cerută este egală cu 1.

XII.114. *Se consideră funcţia continuă* $f:[0,1]\to(0,1]$. *Demonstraţi că pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$, *există un unic* $x_n\in(0,1)$ *astfel încât* $\displaystyle\int_0^{x_n}f(t)dt=n\int_{x_n}^1 f(t)dt$. *Calculaţi limita şirului* (x_n) *şi arătaţi că* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(1-x_n)=\frac{1}{f(1)}\int_0^1 f(t)dt$.

Florin Stănescu, Găeşti

Notă. Problema a apărut şi în G.M. 6/2010, cu numărul C.O: 5130. Soluţia sa poate fi găsită în G.M. 1/2011.

XII.115. *Fie* $\mathcal{F}$ *mulţimea funcţiilor de două ori derivabile pe* $[a,b]$ *cu derivata de ordin doi continuă, pentru care* $f(a)=\alpha$ *şi* $f(b)=\beta$, *unde* α *şi* β *sunt constante fixate. Notăm* $I(f)=\displaystyle\int_a^b[f'(x)]^2dx$, $\forall f\in\mathcal{F}$ *şi* $J(f)=\displaystyle\int_a^b[f'(x)(1+2f(x))]^2dx$, $\forall f\in\mathcal{F}$. *Determinaţi* $\min\{I(f)|f\in\mathcal{F}\}$ *şi* $\min\{J(f)|f\in\mathcal{F}\}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Fie $f_0 \in \mathcal{F}$ astfel încât $I(f) \geq I(f_0)$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Orice $f \in \mathcal{F}$ poate fi scrisă sub forma $f = f_0 + \varepsilon\varphi$, unde $\varphi \in C^2[a,b]$ şi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, iar ε este o constantă arbitrară. Rezultă că $I(f) = I(f_0+\varepsilon\varphi) = \int_a^b [(f_0+\varepsilon\varphi)']^2 dx = \int_a^b [f_0'(x)]^2 + 2\varepsilon \int_a^b f_0'(x)\varphi'(x)dx + \varepsilon^2 \int_a^b [\varphi'(x)]^2 dx$, expresie al cărei minim se atinge pentru $\varepsilon = 0$ (întrucât $I(f) \geq I(f_0)$). Rezultă că $\int_a^b f_0'(x)\varphi'(x)dx = 0$, de unde $\int_a^b f_0''(x)\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in C^2[a,b]$ cu $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. De aici, $f_0''(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$, deci $f_0(x) = \lambda x + \mu$, cu λ, μ constante care se determină din condiţiile în capete. În final, găsim că f_0 este unic determinat: $f_0(x) = \dfrac{\beta}{b-a}(x-a) + \dfrac{\alpha}{b-a}(b-x)$. Valoarea minimă a lui $I(f)$ este $I(f_0) = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{b-a}$.

Pentru a doua parte, observăm că $f'(1+2f) = (f+f^2)'$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Considerând funcţia $g = f + f'$, cu $g(a) = \alpha + \alpha^2$, $g(b) = \beta + \beta^2$, avem de găsit minimul integralei $\int_a^b [g'(x)]^2 dx$. Ţinând seama de a), valoarea minimă a lui $J(f)$ este $\dfrac{(g(b)-g(a))^2}{b-a} = \dfrac{(\beta-\alpha)^2(1+\alpha+\beta)^2}{b-a}$.

Recreaţii ... matematice

Parabola

Un preasfânt părinte spune discipolului său:
– Fiule, să nu uiţi niciodată: $y = ax^2 + bx + c$!
– Da, preasfinte, o să ţin minte...

Peste ani de zile, credinciosul îl întreabă pe mentorul său:
– Mă chinuie o întrebare, părinte, ce este $y = ax^2 + bx + c$?
La care preasfântul părinte îi răspunde:
– Fiule, asta e o parabolă !