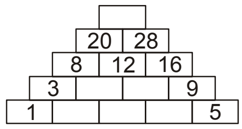
PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2006

Clasele primare



P.114. *În piramida alăturată unele numere s-au şters de-a lungul timpului. Putem să le punem la loc?*
(*Clasa I*) **Ionela Bărăgan, elevă, Iaşi**

Soluţie. $20 = 8 + 12$, $28 = 12 + 16$ etc.

P.115. *Dacă din prima ladă iau 2 mere şi le pun în lada a doua, din a doua ladă iau 3 mere şi le pun în lada a treia, iar din lada a treia iau 4 mere şi le pun în prima ladă, atunci în fiecare ladă voi avea câte 34 mere. Câte mere au fost în fiecare ladă?*
(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

Soluţie. În prima ladă erau $34 - 4 + 2 = 32$, în a doua $34 - 2 + 3 = 35$, iar în a treia $34 - 3 + 4 = 35$ (mere).

P.116. *Luni, mama pune într-un coş câteva mere. Joi, ea găseşte în coş doar* 20 *de mere. Câte mere a pus mama în coş, ştiind că, în fiecare zi din acea săptămână, Mihai, cel mai mare dintre fraţi, împarte fraţilor mai mici cu un măr mai mult ca în ziua precedentă şi că joi el împarte* 5 *mere? Câte mere mai rămân în coş sâmbătă, după împărţirea merelor?*
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Merele luate până joi: $5 + 4 + 3 + 2 = 14$. Merele existente la început în coş: $20 + 14 = 34$. Merele împărţite vineri şi sîmbătă: $6 + 7 = 13$. Merele rămase sâmbătă în coş: $20 - 13 = 7$.

P.117. *În exerciţiul* $1\square 1\square 1\square 1\square 1\square 1\square 1 =$ *fiecare căsuţă poate fi înlocuită cu* "+" *sau* "−". *Cât poate fi rezultatul acestui exerciţiu?*
(*Clasa* a *II-a*) **Diana Tănăsoaie, elevă, Iaşi**

Soluţie. Deoarece avem un număr impar de 1, putem obţine ca rezultat 1 sau 3 sau 5 sau 7. Exemplu: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$; $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 3$; $1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$; $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$.

P.118. *Calculaţi* $a + b + c + d$, *ştiind că* $a \times b = 5$ *şi* $c \times d = 15$. *Găsiţi toate posibilităţile.*
(*Clasa* a *III-a*) **Înv. Rica Bucătariu, Iaşi**

Soluţie. $a + b + c + d$ poate fi: $1 + 8 + 1 + 15 = 25$, $1 + 8 + 5 + 3 = 17$, $2 + 4 + 1 + 15 = 22$, $2 + 4 + 3 + 5 = 14$.

P.119. *Produsul a 10 numere naturale este 40. Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a sumei celor 10 numere.*
(*Clasa* a *III-a*) **Înv. Mirela Buburuzanu, Tomeşti (Iaşi)**

Soluţie. $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 10 = 2 \times 20 = 4 \times 10$. După caz, suma numerelor este $9 \times 1 + 40 = 49$, $6 \times 1 + 2 \times 3 \times 5 = 17$, $7 \times 1 + 2 \times 2 + 10 = 21$, $8 \times 1 + 2 + 20 = 30$, $8 \times 1 + 4 \times 10 = 22$. Suma minimă este 17, iar cea maximă este 49.

P.120. *Se consideră numerele* $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 49$. *Care este cel mai mare număr de numere pe care putem să alegem dintre acestea astfel încât suma oricăror trei*

dintre ele să se împartă exact la 9?
(*Clasa* a *III-a*) **Înv. Felicia-Petronela Leanu, Ceplenița (Iași)**

Soluție. Numerele 3, 12, 21, 30, 39, 48 satisfac condiția cerută la problemă. Dacă mai introducem cel puțin un număr, de exemplu 17, atunci putem găsi o sumă de trei numere care nu se împarte exact la 9, de exemplu $3 + 12 + 17$. Numărul maxim de numere este 6.

P.121. *Ceasul lui Andrei o ia înainte cu 20 secunde pe oră. El a potrivit ceasul luni la ora 8 și a citit din nou ceasul lunea următoare la aceeași oră. Știind că în această durată ceasul nu a funcționat permanent, iar la ultima citire arăta ora 8 h 50 min, să se afle cât nu a funcționat ceasul.*
(*Clasa* a *IV-a*) **Paula Borșanu, elevă, Iași**

Soluție. De luni, ora 8, până lunea următoare, ora 8, sunt 168 ore. Dacă ceasul ar fi funcționat permanent, atunci ar fi avut un avans de $168 \times 20 : 60 = 56$ (minute). În realitate, avansul este de 50 minute. Ceasul nu a funcționat $(56 - 50) \cdot 60 : 20 = 18$ (ore).

P.122. *La Concursul de matematică "Fl.T.Câmpan", etapa județeană, au participat 100 elevi de clasa a IV-a, care au avut de rezolvat 3 probleme. Dacă 70 elevi au rezolvat bine prima problemă, 69 a doua problemă și 64 a treia problemă, să se arate că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.*
(*Clasa* a *IV-a*) **Anca Cornea, elevă, Iași**

Soluție. Dacă fiecare elev a rezolvat bine numai câte două probleme, atunci numărul de rezolvări corecte este $100 \times 2 = 200$. În realitate numărul de rezolvări corecte este $70 + 69 + 64 = 203$. Deoarece $203 - 200 = 3$, înseamnă că măcar 3 elevi au rezolvat corect toate cele trei probleme.

P.123. *Într-o cutie sunt 34 bile, din care unele cântăresc cu 1 g mai mult. Dacă fiecare bilă cântărește un număr natural de grame, iar masa tuturor bilelor este 113 g, să se afle câte bile sunt mai grele.*
(*Clasa* a *IV-a*) **Petru Asaftei, Iași**

Soluție. Dacă o bilă mai grea cântărește 3g , atunci masa maximă este $2\text{g} \times 1 + 3\text{g} \times 33 = 101\text{g} < 113\text{g}$. Dacă o bilă mai ușoară cântărește 4g, atunci masa minimă este $4\text{g} \times 33 + 5\text{g} \times 1 = 132\text{g} > 113\text{g}$. Înseamnă ca o bilă mai grea cântărește 4g. Dacă fiecare bilă cântărește 3g, atunci masa tuturor bilelor este $3\text{g} \times 34 = 102\text{g}$; $113\text{g} - 102\text{g} = 11\text{g}$; $4\text{g} - 3\text{g} = 1\text{g}$. Numărul bilelor mai grele este $11 : 1 = 11$.

Clasa a V-a

V.71. *Comparați numerele 3^{300003} și 2^{450004}.*
Lucian Tuțescu, Craiova

Soluție. Avem:

$$3^{300003} = 3 \cdot 3^{300002} = 3 \cdot 9^{150001} > 3 \cdot 8^{150001} = 3 \cdot 2^{450003} > 2 \cdot 2^{450003} = 2^{450004}.$$

V.72. *Fie mulțimile A, B astfel încât $A \subset B$, $|\mathcal{P}(A)| \geq 60$, $|\mathcal{P}(B)| \leq 260$. Să se determine $|A|$ și $|B|$. (Prin $|X|$ am notat cardinalul mulțimii X.)*
Petru Asaftei, Iași

Soluție. Cum $A \subset B$, atunci $|A| \leq |B|$, de unde $60 \leq 2^{|A|} \leq 2^{|B|} \leq 260$. Obținem că $6 \leq |A| \leq |B| \leq 8$, deci $(|A|, |B|) \in \{(6,6);(6,7);(6,8);(7,7);(7,8);(8,8)\}$.

V.73. *Să se scrie numărul* 2006^{2005} *ca o sumă de şase pătrate perfecte nenule.*

Ionel Nechifor, Iaşi

Soluţia 1. Avem:

$$2006^{2005} = 2006 \cdot 2006^{2004} = \left(1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 25^2 + 35^2\right) \cdot 2006^{2004} =$$
$$= \left(2006^{1002}\right)^2 + \left(5 \cdot 2006^{1002}\right)^2 + \left(7 \cdot 2006^{1002}\right)^2 + \left(9 \cdot 2006^{1002}\right)^2 +$$
$$+ \left(25 \cdot 2006^{1002}\right)^2 + \left(35 \cdot 2006^{1002}\right)^2.$$

Soluţia 2 (Emanuel Petrescu, elev, Iaşi**).**

$$2006^{2005} = \left(2006^{1002}\right)^2 \cdot \left(4^2 + 5^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 40^2\right) =$$
$$= \left(2006^{1002} \cdot 4\right)^2 + \cdots + \left(2006^{1002} \cdot 40\right)^2.$$

V.74. *Se consideră şirul de numere naturale 1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, ... Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.*

Marius Damian, Brăila

Soluţie. Adunînd 0 la primul termen, 1 la al doilea, 2 la al treilea etc, obţinem şirul puterilor lui 2. Deducem că termenii şirului sunt de forma $2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$. Suma primilor 100 de termeni va fi

$$S = \left(2^0 - 0\right) + \left(2^1 - 1\right) + \left(2^2 - 2\right) + \cdots + \left(2^{99} - 99\right) =$$
$$= \left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{99}\right) - (1 + 2 + \cdots + 99) = 2^{100} - 1 - \frac{99 \cdot 100}{2} = 2^{100} - 4951.$$

V.75. *Fie* $x, k \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, $k < x$. *Să se arate că*

$$(x-1)\,\overline{12\ldots k}_{(x)} + k + 1 = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k+1 \text{ cifre}}{}_{(x)}.$$

Doru Buzac, Iaşi

Soluţie. Avem:

$$(x-1) \cdot \overline{12\ldots k}_{(x)} + k + 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + 2x^{k-2} + \cdots + (k-1)\,x + k\right) + (k+1) =$$
$$= x^k - x^{k-1} + 2x^{k-1} - 2x^{k-2} + \cdots + (k-1)\,x^2 - (k-1)\,x + kx - k + k + 1 =$$
$$= x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1 = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k+1 \text{ cifre}}{}_{(x)}.$$

Clasa a VI-a

VI.71. *Fie* $x, y, z \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $100x - 2006y^2 + 15z = 0$. *Să se arate că* $y\,(x+z) \,\vdots\, 85$.

Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

Soluţie. Cum $2006y^2 = 5\,(20x + 3z)$ şi $(5, 2006) = 1$, atunci $y^2 \,\vdots\, 5$, deci $y \,\vdots\, 5$. Apoi, $15\,(x+z) = 17\left(118y^2 - 5x\right)$ şi cum $(15, 17) = 1$, obţinem că $x + z \,\vdots\, 17$. Deducem că $y\,(x+z) \,\vdots\, 5 \cdot 17$, adică $y\,(x+z) \,\vdots\, 85$.

VI.72. *Fie* $p \in \mathbb{N}^*$ *un număr prim. Să se determine* $x, y \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\dfrac{p}{x^2} + \dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Fie $\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{y}{x}=a\in\mathbb{N}^*$; atunci $p+xy=ax^2$, deci $p=x\,(ax-y)$. Cum p este prim, atunci $x\in\{1,p\}$ şi corespunzător găsim soluţiile

$$(x,y)=\{(1,a-p)\,;(p,ap-1)\mid a\in\mathbb{N}^*\}\,.$$

VI.73. *Fie* $A_n=14+1414+141414+\cdots+\underbrace{\overline{1414\ldots14}}_{2n\text{ cifre}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. *Să se determine mulţimea* $M=\left\{n\in\mathbb{N}^*\mid\dfrac{A_n-7n^2-7n}{9}\in\mathbb{N}\right\}$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

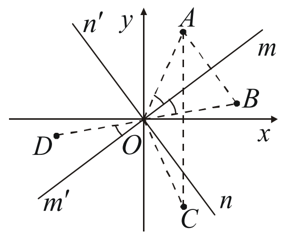
Soluţie. Notând cu $s\,(k)$ suma cifrelor numărului natural k, avem $k-s\,(k)\,\vdots\,9$. Deducem că $14-5\,\vdots\,9$, $1414-5\cdot2\,\vdots\,9$, $\ldots$, $\underbrace{\overline{1414\ldots14}}_{2n\text{ cifre}}-5n\,\vdots\,9$, prin urmare $A_n-5\dfrac{n\,(n+1)}{2}\,\vdots\,9$. Rezultă de aici că $A_n-\dfrac{5n\,(n+1)}{2}-\dfrac{9n\,(n+1)}{2}\,\vdots\,9$, de unde $\dfrac{A_n-7n\,(n+1)}{9}\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. În concluzie, $M=\mathbb{N}^*$.

VI.74. *Considerăm două axe perpendiculare* Ox *şi* Oy*, precum şi cele două bisectoare ale unghiurilor drepte care se formează. Fie* A *oarecare, iar* B*,* C *simetricele sale faţă de prima bisectoare, respectiv faţă de* Ox*. Rotim segmentul* $[OC]$ *în jurul lui* O *cu* 90° *în sensul acelor de ceasornic şi notăm cu* D *extremitatea segmentului rotit. Să se arate că:*

a) B*,* O*,* D *sunt coliniare şi* O *este mijlocul lui* $[BD]$*;*

b) D *este simetricul lui* A *faţă de a doua bisectoare.*

Adrian Corduneanu, Iaşi



Soluţie. *a)* Din $\triangle AOC$ isoscel avem că $\widehat{AOx}\equiv\widehat{COx}$, de unde $\widehat{AOn'}\equiv\widehat{COm'}$ (aceeaşi diferenţă până la 135°). Atunci unghiurile $\widehat{AOm}$ şi $\widehat{DOm'}$ au complementele egale, deci sunt congruente. Din $\triangle AOB$ isoscel avem că $\widehat{AOm}\equiv\widehat{BOm}$, prin urmare $\widehat{DOm'}\equiv\widehat{BOm}$, adică punctele B, O, D sunt coliniare. Cum $AO=BO=CO=DO$, deducem şi că O este mijlocul lui $[BD]$.

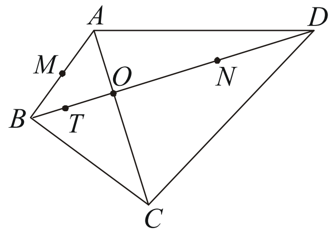
b) Din relaţia deja demonstrată $\widehat{AOm}\equiv\widehat{DOm'}$ rezultă că $\widehat{AOn'}\equiv\widehat{DOn'}$, deci $[On'$ este bisectoare în $\triangle AOD$ isoscel. Obţinem că On' este mediatoarea lui $[AD]$, adică D este simetricul lui A faţă de a doua bisectoare.

VI.75. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex,* O *intersecţia diagonalelor,* M *mijlocul lui* $[AB]$*, iar* N *mijlocul lui* $[OD]$*. Să se arate că* $2P_{BCNM}<P_{BDC}+P_{ABC}$*.*

Bogdan Posa şi Marius Drăgoi, elevi, Motru

Soluţie. Fie T mijlocul lui $[OB]$. Cum M, N, T nu pot fi coliniare, avem că $MN<MT+TN=\dfrac{AO+BD}{2}$. În $\triangle CDO$, $[CN]$ fiind mediană, rezultă că $CN<\dfrac{CO+CD}{2}$. Atunci:

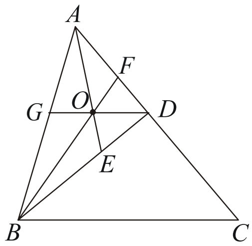
$$P_{BCNM} = BC + CN + NM + MB <$$
$$< BC + \frac{CO + CD}{2} + \frac{AO + BD}{2} + \frac{AB}{2} =$$
$$= \frac{BC + AC + AB}{2} + \frac{BC + BD + CD}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(P_{ABC} + P_{BCD}\right).$$



Clasa a VII-a

VII.71. *Fie $\triangle ABC$, $AB < AC$ şi $D \in (AC)$. Fie AE bisectoarea lui $\widehat{BAC}$, $E \in (BD)$, F mijlocul lui $[AD]$, $\{O\} = AE \cap BF$, $\{G\} = DO \cap AB$. Să se arate că $GD \parallel BC \Leftrightarrow AB = CD$.*

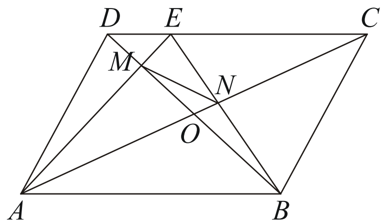
Carmen Daniela Tamaş, Bârlad



Soluţie. Cu teorema bisectoarei în $\triangle ABD$, obţinem că $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{AD}$. Folosind apoi teorema lui Ceva, $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{DE} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$, deducem că $\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{AB}$. Atunci $GD \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AG}{GB} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow AB = CD$.

VII.72. *Fie $ABCD$ paralelogram, $E \in (CD)$, $\{M\} = AE \cap BD$, $\{N\} = BE \cap AC$, $\{O\} = AC \cap BD$. Să se arate că $A_{MEN} = 2A_{MON}$.*

Mirela Marin, Iaşi



Soluţie. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle MEB$ ($O - N - A$ transversală) şi $\triangle AEN$ ($M - O - B$ transversală) obţinem că $\frac{NE}{NB} \cdot \frac{OB}{OM} \cdot \frac{AM}{AE} = 1$, respectiv $\frac{ME}{MA} \cdot \frac{OA}{ON} \cdot \frac{BN}{BE} = 1$. Înmulţind aceste relaţii membru cu membru, rezultă că $\frac{OA \cdot OB}{OM \cdot ON} \cdot \frac{NE \cdot ME}{AE \cdot BE} = 1$, deci $\frac{A_{AOB}}{A_{MON}} \cdot \frac{A_{MEN}}{A_{AEB}} = 1$. Însă evident că $d(E, AB) = 2d(O, AB)$, adică $A_{AEB} = 2A_{AOB}$ şi de aici urmează concluzia.

VII.73. *Fie $a < b \leq c$ razele a trei cercuri tangente între ele şi tangente la o aceeaşi dreaptă în trei puncte distincte. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.*

Dan Radu, Bucureşti

Soluţie. Fie T_1, T_2, T_3 punctele de tangenţă ale celor trei cercuri cu dreapta. Un calcul imediat arată că $T_2T_3^2 = 4bc$ şi analog $T_1T_3^2 = 4ac$, $T_1T_2^2 = 4ab$. Scriind că $T_2T_3 = T_1T_2 + T_1T_3$, rezultă că $\sqrt{bc} = \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$ şi, prin împărţire cu $\sqrt{abc}$, obţinem egalitatea dorită.

Evident, concluzia nu are loc în cazul în care $T_1 = T_2 = T_3$.

VII.74. *Fie M mulţimea multiplilor lui 36 în a căror scriere în baza 10 nu apar alte cifre decât 4, 6 sau 9. Câte numere cel mult egale cu 100 000 conţine M?*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Elementele lui M se divid cu 4 şi cu 9, deci se termină în 44, 64 sau 96 şi, cum au cel mult 5 cifre, au suma cifrelor 9, 18, 27 sau 36. Notăm cu s suma tuturor cifrelor afară de ultimele două ale unui număr din M.

Dacă un număr se termină în 44, atunci $s \in \{10, 19\}$. Suma 10 se formează din $4+6$, iar suma 19 din $4+6+9$. Obţinem astfel $2+6=8$ elemente ale lui M: 4644, 6444, 46944, 49644, 64944, 69444, 96444, 94644. Dacă un număr se termină în 64, atunci $s \in \{8, 17\}$. Suma 8 se formează din $4+4$, iar suma 17 din $4+4+9$ şi găsim alte $1+3=4$ elemente ale lui M. În sfârşit, dacă un număr se termină în 96, atunci $s \in \{12, 21\}$. Avem că $12 = 4+4+4 = 6+6$, iar $21 = 9+6+6$ şi astfel găsim încă $1+1+3=5$ elemente ale lui M.

În total, M conţine $8+4+5=17$ elemente cel mult egale cu 100000.

VII.75. *Fie $m \geq 3$ un număr natural impar şi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ astfel încât*

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \cdots = |a_{m-1} - a_m| = |a_m - a_1|.$$

Demonstraţi că $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ se divide cu m.

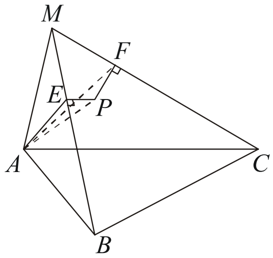
Maria Miheţ, Timişoara

Soluţie. Fie d valoarea comună a modulelor din enunţ; atunci fiecare dintre numerele $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $\ldots$, $a_{m-1} - a_m$, $a_m - a_1$ este d sau $-d$, deci suma lor este un multiplu impar de d. Pe de altă parte, suma celor m numere este 0, deci $d = 0$. Rezultă că $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$, de unde $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = ma_1$.

Clasa a VIII-a

VIII.71. *Pe planul $\triangle ABC$ se ridică perpendiculara AM. Fie P proiecţia lui A pe planul (MBC), iar E, F proiecţiile punctului P pe MB, respectiv MC. Să se arate că $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MCB}$.*

Otilia Nemeş, Ocna Mureş



Soluţie. Conform teoremei celor trei perpendiculare, obţinem că $AE \perp MB$ şi $AF \perp MC$. Cu teorema catetei în $\triangle MAB$ şi $\triangle MAC$, deducem că $MA^2 = ME \cdot MB = MF \cdot MC$, deci $\dfrac{ME}{MC} = \dfrac{MF}{MB}$. Rezultă că $\triangle MEF \sim \triangle MCB$, de unde $\widehat{MEF} \equiv \widehat{MCB}$.

VIII.72. *Fie a, b, c numere reale distincte. Să se afle partea întreagă a numărului*
$$A = \frac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}.$$

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. După calcule de rutină, se arată că $A = 2$, deci $[A] = 2$.

VIII.73. *Să se demonstreze că $a \in \mathbb{N}$ este ipotenuză a unui triunghi dreptunghic cu laturile exprimate prin numere naturale dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 - n$ şi $a^2 + n$ sunt pătrate perfecte.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie $b, c \in \mathbb{N}$ cu $a^2 = b^2 + c^2$; considerând $n = 2bc$, avem că $a^2 - n = (b-c)^2$ şi $a^2 + n = (b+c)^2$, Reciproc, dacă $a^2 - n = x^2$, $a^2 + n = y^2$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $2a^2 = x^2 + y^2$, deci x, y au în mod necesar aceeaşi paritate. Obţinem că $a^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, cu $\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$ numere naturale.

VIII.74. *Fie $\alpha \in (0,1]$; să se arate că* $\left(\alpha + \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\right) : \left(\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\right) \geq 1$, *în fiecare din situaţiile:*

a) $x, y \in [0, \alpha)$; *b)* $-\alpha < x \leq 0 \leq y < \frac{x+\alpha}{1+x\alpha} \leq \alpha$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Este suficient să demonstrăm, în fiecare dintre ipoteze, că numitorul $\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|$ este strict pozitiv.

a) Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că $x \geq y$; atunci

$$\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| > 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{x-y}{1-xy} > 0 \Leftrightarrow (\alpha - x) + y(1-\alpha x) > 0. \qquad (1)$$

Însă $x < \alpha \Rightarrow \alpha x < \alpha^2 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 - \alpha x > 0 \Rightarrow y(1-\alpha x) \geq 0$, de unde (1) este imediată.

b) Mai întâi, să verificăm că $0 < \frac{x+\alpha}{1+x\alpha} \leq \alpha$, adică ipoteza nu este contradictorie. Avem:

$$-1 \leq -\alpha < x \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\alpha^2 < \alpha x \Rightarrow 1 + \alpha x > 0 \Rightarrow \frac{x+\alpha}{1+\alpha x} > 0;$$

$$\alpha^2 \leq 1 \Rightarrow x\left(\alpha^2 - 1\right) \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha^2 x \Rightarrow x + \alpha \leq \alpha(1+\alpha x) \Rightarrow \frac{x+\alpha}{1+\alpha x} \leq \alpha.$$

Acum:

$$\alpha - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| > 0 \Leftrightarrow \alpha - \frac{y-x}{1-xy} > 0 \Leftrightarrow \alpha(1-xy) - y + x > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + x) - y(1+\alpha x) > 0 \Leftrightarrow y < \frac{\alpha + x}{1+\alpha x},$$

adevărat conform ipotezei.

Notă. Concluzia are loc şi dacă $x, y \in (-\alpha, 0]$ sau $-\alpha \leq \frac{x-\alpha}{1-\alpha x} < y \leq 0 \leq x < \alpha$.

VIII.75. *Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracţia $\frac{2^{n+1}+3}{3 \cdot 2^n + 1}$ este reductibilă.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Dacă $d \mid 2^{n+1} + 3$ şi $d \mid 3 \cdot 2^n + 1$, atunci $d \mid 3\left(2^{n+1}+3\right) - 2\left(3 \cdot 2^n + 1\right)$, adică $d \mid 7$. Cum fracţia este reductibilă, ea se simplifică prin 7. Vom arăta că acest lucru se realizează dacă şi numai dacă $n = M_3 + 1$.

Dacă $n = M_3$, atunci $2^{n+1} + 3 = 2 \cdot 2^{3k} + 3 = 2(7+1)^k + 3 = 2(M_7 + 1) + 3 = M_7 + 5$. Dacă $n = M_3 + 2$, atunci $2^{n+1} + 3 = 2^{3k+3} + 3 = (7+1)^{k+1} + 3 = (M_7 + 1) + 3 = M_7 + 4$. În sfârşit, pentru $n = M_3 + 1$, avem că $2^{n+1} + 3 = 2^{3k+2} + 3 = 3(7+1)^k + 3 = 4(M_7+1) + 3 = M_7$ şi $3 \cdot 2^n + 1 = 3 \cdot 2^{3k+1} + 1 = 3 \cdot 2(7+1)^k + 1 = 6(M_7+1) + 1 = M_7$.

Clasa a IX-a

IX.71. *Fie $a < b$ numere reale; să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care $2z^2 + b = 2yz + a$, iar $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = y$.*

Andrei Nedelcu şi Lucian Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Din a doua ecuaţie deducem că $x \in [a, b]$, iar $y \geq 0$. Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem

$$y^2 = \left(\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}\right)^2 \leq \left[\left(\sqrt{x-a}\right)^2 + \left(\sqrt{b-x}\right)^2\right]\left(1^2 + 1^2\right) = 2\,(b-a)\,. \quad (1)$$

Înmulţind prima relaţie cu 2 şi adumînd y^2, găsim că

$$y^2 + 4z^2 + 2b = 4yz + 2a + y^2 \Leftrightarrow (2z-y)^2 + 2b - 2a = y^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 2\,(b-a) + (2z-y)^2 \geq 2\,(b-a)\,. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) deducem că $y = 2z = \sqrt{2\,(b-a)}$ şi, cum avem egalitate în (1), atunci $x - a = b - x$, deci $x = \dfrac{1}{2}\,(a+b)$.

IX.72. *Fie $x, y, z \in [1, +\infty)$ aşa încât $\dfrac{x}{[x]} = \dfrac{y}{[y]} = \dfrac{z}{[z]}$. Să se arate că*

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} + \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ce egalitate se obţine pentru $x, y, z \in (-\infty, -1]$?

Dan Plăeşu, Iaşi

Soluţie. Fie $\dfrac{x}{[x]} = \dfrac{y}{[y]} = \dfrac{z}{[z]} = k \in [1, 2)$; atunci

$$\frac{x^2}{[x]^2} = \frac{y^2}{[y]^2} = \frac{z^2}{[z]^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} = k^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} \quad (1)$$

$$\frac{x - [x]}{[x]} = \frac{y - [y]}{[y]} = \frac{z - [z]}{[z]} = k - 1 \Rightarrow$$
$$\frac{\{x\}^2}{[x]^2} = \frac{\{y\}^2}{[y]^2} = \frac{\{z\}^2}{[z]^2} = \frac{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2}{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} = (k-1)^2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = (k-1)\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2}. \quad (2)$$

Scăzând membru cu membru relaţiile (1) şi (2) obţinem concluzia. Când $x, y, z \in (-\infty, -1]$, vom avea $k \in (0, 1]$ şi, reluând raţionamentul, găsim că

$$\sqrt{[x]^2 + [y]^2 + [z]^2} - \sqrt{\{x\}^2 + \{y\}^2 + \{z\}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

IX.73. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ cu $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, să se arate că are loc inegalitatea*

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}.$$

Marius Tiba, elev, Iaşi

Soluţia 1 (**Titu Zvonaru**, Comăneşti). Conform inegalităţii mediilor, avem:

$$a_1^m + \cdots + a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq mn \sqrt[mn]{a_1^{m(mn-n+1)} a_2^m \cdots a_n^m} =$$
$$= mn \sqrt[mn]{a_1^{mn(m-1)} (a_1 a_2 \cdots a_n)^m} = mn a_1^{m-1} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Scriind încă $n-1$ inegalităţi similare, după adunare şi împărţire cu mn, obţinem

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq \left(a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\right) \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \qquad (1)$$

inegalitate echivalentă cu cea dorită, întrucât $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$.

Soluţia 2. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$; atunci $a_1^{m-1} \geq a_2^{m-1} \geq \cdots \geq a_n^{m-1}$ şi aplicăm inegalitatea lui Cebîşev:

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m = a_1 a_1^{m-1} + a_2 a_2^{m-1} + \cdots + a_n a_n^{m-1} \geq$$
$$\geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\right).$$

Însă $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1$ şi astfel rezultă concluzia. Egalitatea se atinge pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Notă. Demonstraţia inegalităţii (1) ca în soluţia a doua (folosind Cebîşev) este prezentă în RecMat 2/2006, pg. 160, în cadrul soluţiei problemei L92.

IX.74. *Fie a, b, c lungimile laturilor $\triangle ABC$ şi $m, n \in (0, +\infty)$. Considerăm punctele A', B', C' astfel încât $C \in (AA')$, $A \in (BB')$, $B \in (CC')$ şi $CA' = ma+n$, $AB' = mb+n$, $BC' = mc+n$. Să se arate că $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.*

Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţie. Observăm că $\overrightarrow{AA'} = \frac{ma+n+b}{b} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB'} = \frac{mb+n+c}{c} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CC'} = \frac{mc+n+a}{a} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{mc+n+a}{a}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$. Atunci $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{mc+n+a}{a} - \frac{mb+n+c}{c}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{ma+n+b}{b} - \frac{mc+n+a}{a}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$
$$\frac{mc+n+a}{a} = \frac{mb+n+c}{c} = \frac{ma+n+b}{b} \Leftrightarrow \frac{mc+n}{a} = \frac{mb+n}{c} = \frac{ma+n}{b}. \qquad (1)$$

Dacă $a = b = c$, relaţia (1) este evidentă. Reciproc, să presupunem (1) îndeplinită. Dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale, din (1) rezultă imediat că $a = b = c$. În caz contrar, putem considera că $a < b < c$ şi din (1) deducem că

$$\frac{(mc+n)-(mb+n)}{a-c} = \frac{(mb+n)-(ma+n)}{c-b} \Leftrightarrow \frac{c-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-b},$$

unde primul raport este negativ, iar al doilea pozitiv, ceea ce constituie o contradicţie.

IX.75. *Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil, $\{O\} = AC \cap BD$, $m(\widehat{AOD}) = 60°$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$. Notăm $k = \frac{MA}{MB}$, $r = \frac{NC}{ND}$, $p = \frac{OA}{OB}$. Dacă*

$p \in \left\{2k, \dfrac{2}{r}, \dfrac{1}{2r}\right\}$, *să se arate că* $m(\widehat{MON}) \neq 90°$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Cum $ABCD$ este inscriptibil, avem că $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Atunci:

$$m(\widehat{MON}) = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB}\right)\left(\frac{1}{r+1}\overrightarrow{OC} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{OD}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-OA \cdot OC + r \cdot OA \cdot OD \cdot \cos 60° + k \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 60° - kr \cdot OB \cdot OD = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1+rk)\, OA \cdot OC = \frac{1}{2}\left(r \cdot OA \cdot OD + k \cdot OB \cdot OC\right) \Leftrightarrow$$

$$2(1+rk) = r\frac{OD}{OC} + k\frac{OB}{OA} \Leftrightarrow 2(1+rk) = rp + \frac{k}{p}. \qquad (1)$$

Dacă $p \in \left\{2k, \dfrac{2}{r}, \dfrac{1}{2r}\right\}$, evident că relaţia (1) nu este verificată, deci $m(\widehat{MON}) \neq 90°$.

Clasa a X-a

X.71. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că*

$$\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c} + 2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} > 3.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Se observă că $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (deoarece $a < b + c + 2\sqrt{bc}$), $\sqrt{b} < \sqrt{c} + \sqrt{a}$ şi $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Prin urmare, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt de asemenea lungimile laturilor unui triunghi. Repetând raţionamentul anterior, deducem că şi $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi. De aici, rezultă că $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} > 1$ (1). (Într-adevăr, (1) $\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt[4]{bc} > \sqrt{b} + \sqrt{c} \Leftrightarrow \sqrt{a} > \left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{c}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a} > \left|\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{c}\right|$). Acum, nu ne rămâne decât să remarcăm faptul că inegalitatea din enunţ se obţine adunând relaţia (1) cu inegalităţile derivate din ea prin permutări circulare ale laturilor a, b şi c.

X.72. *Să se rezolve sistemul*

$$x^2 \log_2 15 + y^2 \log_3 10 + z^2 \log_5 6 = 2(xy + yz + zx),$$
$$x + y + z = 5.$$

Marius Damian, Brăila

Soluţie. Adunând $x^2 + y^2 + z^2$ în ambii membri ai primei ecuaţii, obţinem $x^2 \log_2 30 + y^2 \log_3 30 + z^2 \log_5 30 = (x+y+z)^2$, sau $\dfrac{x^2}{\log_{30} 2} + \dfrac{y^2}{\log_{30} 3} + \dfrac{z^2}{\log_{30} 5} = (x+y+z)^2$. Pe de altă parte, conform inegalităţii lui Cauchy-Schwarz, avem

$$(\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5)\left(\frac{x^2}{\log_{30} 2} + \frac{y^2}{\log_{30} 3} + \frac{z^2}{\log_{30} 5}\right) \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{\log_{30} 2} + \frac{y^2}{\log_{30} 3} + \frac{z^2}{\log_{30} 5} \geq (x+y+z)^2.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă x, y, z sunt proporţionale cu $\log_{30} 2$, $\log_{30} 3$, $\log_{30} 5$. Astfel, putem scrie

$$\frac{x}{\log_{30} 2} = \frac{y}{\log_{30} 3} = \frac{z}{\log_{30} 5} = \frac{x+y+z}{\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5} = 5,$$

de unde rezultă că soluţia sistemului este $x = 5\log_{30} 2$, $y = 5\log_{30} 3$, $z = 5\log_{30} 5$.

X.73. *Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3 \mid x + y$, are loc egalitatea $f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{3}$.*

Eugenia Roşu, elevă, Iaşi

Soluţie. Fie f o funcţie cu proprietatea considerată. Pentru $x = y = 0$, avem $f\left(\frac{0+0}{3}\right) = \frac{f(0) + f(0)}{3}$, deci $f(0) = 0$. Dacă luăm pe rând $x = 2$, $y = 1$ şi apoi $x = 3$, $y = 0$ în egalitatea dată, obţinem $f(2) = 2f(1)$ şi $f(3) = 3f(1)$. Vom demonstra prin inducţie propoziţia $P(n)$: $f(n) = nf(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Am arătat deja că $P(0)$, $P(1)$ şi $P(2)$ sunt adevărate. Presupunem acum că $P(k)$ este adevărată oricare ar fi $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Să demonstrăm valabilitatea propoziţiei $P(m+1)$. Distingem trei cazuri.

I. Dacă $m + 1 = 3l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, atunci luând $x = 3l + 1$ şi $y = 3l - 1$ în egalitatea considerată (pentru că $3 \mid x+y$), avem $f\left(\frac{3l+1+3l-1}{3}\right) = \frac{f(3l+1) + f(3l-1)}{3}$, deci $3(2l) = f(3l+1) + f(3l-1)$. Cum $2l \le 3l \le m$ şi $3l - 1 \le m$, rezultă, conform ipotezei de inducţie, că $f(3l+1) = 3f(2l) - f(3l-1) = 6lf(1) - (3l-1)f(1) = (3l+1)f(1) = (m+1)f(1)$.

II. Dacă $m + 1 = 3l + 2$, $l \in \mathbb{N}$, considerăm $x = 3l + 2$ şi $y = 3l + 1$ în egalitatea din ipoteză ($3 \mid x+y$) şi obţinem $f\left(\frac{3l+2+3l+1}{3}\right) = \frac{f(3l+2) + f(3l+1)}{3}$, deci $f(3l+2) = 3f(2l+1) - f(3l+1) = 3(2l+1)f(1) - (3l+1)f(1) = (3l+2)f(1) = (m+1)f(1)$.

III. Dacă $m + 1 = 3l + 3$, $l \in \mathbb{N}$, atunci pentru $x = 3l + 3$ şi $y = 3l$ ($3 \mid x + y$), relaţia iniţială devine $f\left(\frac{3l+3+3l}{3}\right) = \frac{f(3l+3) + f(3l)}{3}$, de unde deducem că $f(3l+3) = 3f(2l+1) - f(3l) = (3l+3)f(1) = (m+1)f(1)$.

Cu aceasta demonstraţia propoziţiei $P(n)$ este terminată. Cum funcţia $f(n) = nf(1)$, $n \in \mathbb{N}$ satisface proprietatea cerută, rezultă că aceasta este soluţia problemei.

X.74. *Fie d_1, d_2 două drepte perpendiculare şi l_1, l_2 dreptele suport ale bisectoarelor celor două perechi de unghiuri opuse formate de ele. Determinaţi $\triangle ABC$ cu $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in l_1$ şi $O, H \in l_2$ (O, H cu semnificaţiile uzuale).*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Faţă de reperul cartezian xOy cu d_1 luată ca axă Ox şi d_2 ca Oy, fie $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(c, c)$ (nu este esenţial faptul că l_1 este luată ca prima bisectoare a reperului). Mediatoarele laturilor $[AB]$ şi $[BC]$ au ecuaţiile $y - \frac{b}{2} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$, respectiv $y - \frac{b+c}{2} = \frac{c}{b-c}\left(x - \frac{c}{2}\right)$. Punând condiţia ca punctul lor comun să aparţină dreptei l_2: $x + y = 0$, obţinem relaţia $(a+b)\left(2c^2 - ab\right) = 0$ (1). Apoi, înălţimile din A şi C au ecuaţiile $y = \dfrac{c}{b-c}(x-a)$, respectiv $y - c = \dfrac{a}{b}(x-c)$, iar condiţia $H \in l_2$ conduce la $c\left(a^2+b^2\right) = 0 \quad (2)$. Distingem patru cazuri:

(i) $a+b=0$, $c=0$, adică $b=-a$, $c=0$; atunci $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel, situat în cadranele II sau IV, având catetele pe axele reperului.

(ii) $a+b=0$, $a^2+b^2=0$, adică $a=b=0$; atunci $\triangle ABC$ este degenerat.

(iii) $2c^2-ab=0$, $c=0$; din nou $\triangle ABC$ este degenerat.

(iv) $2c^2-ab=0$, $a^2+b^2=0$, adică tot triunghi degenerat.

X.75. *a) Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dacă z_1, z_2, z_3 sunt trei numere complexe diferite astfel încât $\mathrm{Re}\,(\alpha\bar{z}_1) = \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{z}_2) = \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{z}_3)$, atunci punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare. Notăm cu d dreapta pe care sunt situate aceste puncte.*

b) Dacă z_1', z_2', z_3' sunt trei numere complexe diferite cu proprietatea că $\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_1') = \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_2') = \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_3')$, atunci punctele cu afixele z_1, z_2, z_3 sunt coliniare. Fie d' dreapta ce le conţine.

c) Să se arate că dreptele d şi d' sunt perpendiculare.

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. $a)$ Avem:

$$\mathrm{Re}\,(\alpha\bar{z}_1) = \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{z}_2) = \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{z}_3) \Leftrightarrow \frac{\alpha\bar{z}_1+\bar{\alpha}z_1}{2} = \frac{\alpha\bar{z}_2+\bar{\alpha}z_2}{2} = \frac{\alpha\bar{z}_3+\bar{\alpha}z_3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{z_3-z_1}{\bar{z}_3-\bar{z}_1} = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}. \tag{1}$$

Din relaţia (1), obţinem $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \overline{\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)}$, adică $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare.

$b)$ Deoarece

$$\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_1') = \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_2') = \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{z}_3') \Leftrightarrow \frac{\alpha\bar{z}_1'-\bar{\alpha}z_1'}{2i} = \frac{\alpha\bar{z}_2'-\bar{\alpha}z_2'}{2i} = \frac{\alpha\bar{z}_3'-\bar{\alpha}z_3'}{2i} \Leftrightarrow$$
$$\frac{z_2'-z_1'}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'} = \frac{z_3'-z_1'}{\bar{z}_3'-\bar{z}_1'} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}, \tag{2}$$

rezultă că $\dfrac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'} \in \mathbb{R}$. Prin urmare, punctele cu afixele z_1', z_2', z_3' sunt coliniare.

$c)$ Din relaţiile (1) şi (2) deducem că $\dfrac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = -\dfrac{z_2'-z_1'}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'}$ sau $\dfrac{z_2-z_1}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'} = -\overline{\left(\dfrac{z_2-z_1}{\bar{z}_2'-\bar{z}_1'}\right)}$, de unde rezultă că $\dfrac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'} \in i\mathbb{R}_+^*$, aşadar dreptele d şi d' sunt perpendiculare.

Clasa a XI-a

XI.71. *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n-1}{\ln x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Din inegalitatea $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$, $\forall x \in (1,\infty)$, rezultă că (x_n) este strict descrescător şi are limita 1. Scriem $x_n^n = \left[(1+x_n-1)^{\frac{1}{x_n-1}}\right]^{n(x_n-1)}$. Folosind criteriul Stolz–Cesaro,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(x_n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}-1}-\frac{1}{x_n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\ln x_n-x_n+1}{(x_n-1)^2-(x_n-1)\ln x_n}=\infty$$

(din $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2-(x-1)\ln x}=\infty$). Urmează că $x_n^n\to e^0=1$.

XI.72. *Este posibil ca o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică $1+f(x)+f(x)f(1+x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, să fie continuă pe $\mathbb{R}$?*

Dorin Mărgidanu, Corabia

Soluţie. Răspunsul este negativ. Vom demonstra că f nu are proprietatea lui Darboux. Fireşte $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dacă f ar avea proprietatea lui Darboux, atunci ar fi negativă pe $\mathbb{R}$ (pozitivă pe $\mathbb{R}$ nu poate fi!): $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deducem imediat că $1+f(1+x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)>-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Pe de altă parte, din $-1<f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $0<f(x)+1<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, adică $0<-f(x)f(x+1)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, contradicţie cu $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

XI.73. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie nenulă de clasă C^{k+1} pe $[0,1]$, $k\in\mathbb{N}^*$, astfel ca $f(0)=f(1)=0$. Dacă pentru orice $1\le j\le k$ există $a_j\in\{0,1\}$ astfel încât $f^{(j)}(a_j)=0$, atunci există $x_1,x_2\in(0,1)$ astfel ca $f^{(k+1)}(x_1)\cdot f^{(k+1)}(x_2)<0$.*

Gheorghe Moroşanu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Vom ţine seama că, dacă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe $[0,1]$, g' are semn constant pe $(0,1)$, iar $g(0)=0$ sau $g(1)=0$, atunci g păstrează semn constant pe $[0,1]$ şi în plus este monotonă pe $[0,1]$. Dacă presupunem că $f^{(k+1)}(x)\ge 0$, $\forall x\in(0,1)$, aplicând succesiv rezultatul precedent pentru $g=f^{(k)}$, $g=f^{(k-1)}$, … , $g=f$ obţinem că f este monotonă pe $[0,1]$. Cum $f(0)=f(1)=0$ rezultă că $f\equiv 0$ pe $[0,1]$, contradicţie; deci există $x_1\in(0,1)$ astfel că $f^{(k+1)}(x_1)<0$. Analog există $x_2\in(0,1)$ astfel ca $f^{(k+1)}(x_2)>0$, de unde concluzia.

XI.74. *Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq0$, $n\in 2\mathbb{N}^*$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) $b^2-4ac\le 0$, (2) $\det\left(aA^2+bA+cI_n\right)\ge 0$, $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Marian Ursărescu, Roman

Soluţie. Pentru (1) $\Rightarrow$ (2) avem succesiv:

$$\det\left(aA^2+bA+cI_n\right)=a^n\det\left(A^2+\frac{b}{a}A+\frac{c}{a}I_n\right)=$$

$$=a^n\det\left[\left(A+\frac{b}{2a}I_n\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}I_n\right]=a^n\det\left(X^2+Y^2\right)\ge 0,$$

unde $X=A+\dfrac{b}{2a}I_n$, iar $Y=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}I_n$; $X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $XY=YX$.

Pentru (2) $\Rightarrow$ (1) să presupunem că $b^2-4ac>0$. Notând cu x_1, x_2 rădăcinile reale şi distincte ale ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, vom considera două numere $\alpha\in(x_1,x_2)$ şi $\beta\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$. Fie

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&0&\dots&0\\0&\beta&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\beta\end{pmatrix};\quad aA^2+bA+cI_n=\begin{pmatrix}a\alpha^2+b\alpha+c&&0\\&a\beta^2+b\beta+c&\\&&\ddots\\0&&a\beta^2+b\beta+c\end{pmatrix}.$$

Acum $\det\left(aA^2+bA+cI_n\right)=\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)\left(a\beta^2+b\beta+c\right)^{n-1}<0$, ţinând seama de alegerea numerelor α şi β, de semnul funcţiei de gradul al doilea şi de faptul că n este par. Avem deci contradicţie, ceea ce încheie demonstraţia.

XI.75. *Fie $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se arate că dacă $AB-BA$ comută cu A şi cu B, atunci $AB=BA$.*

Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie. Vom utiliza următorul rezultat: "Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi mulţimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid AX=XA\}$. Atunci:

a) Dacă $A=kI_2$, $k\in\mathbb{C}$, atunci $C(A)=\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;

b) Dacă $A\neq kI_2$, $k\in\mathbb{C}$ atunci $C(A)=\{\alpha A+\beta I_2\mid\alpha,\beta\in\mathbb{C}\}$".

Să presupunem că $AB-BA$ nu este de forma λI_2. Atunci $\exists\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ astfel încât $A=\alpha(AB-BA)+\beta I_2$ şi $B=\gamma(AB-BA)+\delta I_2$. Dacă $\alpha=0$ atunci $A=\beta I_2$, deci $AB-BA=O_2$, absurd. Deci $\alpha\neq0$ şi atunci $AB-BA=\dfrac{1}{\alpha}A-\dfrac{\beta}{\alpha}I_2$, deci $B=\gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}A-\dfrac{\beta}{\alpha}I_2\right)+\delta I_2=\alpha A+bI_2$, ceea ce implică $AB=BA=aA^2+bA$, adică $AB-BA=O_2$, absurd. Astfel, există $\lambda\in\mathbb{C}$ astfel încât $AB-BA=\lambda I_2$. Cum $\operatorname{tr}(AB-BA)=0$, obţinem $\lambda=0$, adică $AB=BA$.

<u>Clasa a XII-a</u>

XII.71. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=0$.*

Dan Radu, Bucureşti

Soluţie. Integrând prin părţi, ajungem la relaţia

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=\frac{f(a)\cos na-f(b)\cos nb}{n}+\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\,dx.$$

Dacă $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $M'=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, obţinem că $0\leq\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right|\leq\dfrac{2M+M'(b-a)}{n}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int_a^b f(x)\sin nx\,dx\right|=0$, de unde concluzia.

XII.72. *Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, indefinit derivabilă pe $[0,1]$, cu proprietatea că există $M>0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M$, $\forall x\in[0,1]$ şi $\forall n\in\mathbb{N}$. Arătaţi că:*

a)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)f^{(n+p-k)}(1)}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}=0,\ \forall p\in\mathbb{N}^*;$$

b)
$$\lim_{p\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)f^{(n+p-k)}(1)}{(-1)^{p+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)}=$$
$$=\int_0^1 x^nf^{(n)}(x)\,dx,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem succesiv:

$$\int_0^1 x^{n+p} f^{(n+p)}(x)\,dx = x^{n+p} f^{(n+p-1)}(x)\Big|_0^1 - (n+p)\int_0^1 x^{n+p-1} f^{(n+p-1)}(x)\,dx =$$

$$= f^{(n+p-1)}(1) - (n+p)\left[x^{n+p-1} f^{(n+p-2)}(x)\Big|_0^1 - (n+p-1)\int_0^1 x^{n+p-2} f^{(n+p-2)}(x)\,dx\right] =$$

$$= f^{(n+p-1)}(1) - (n+p)\, f^{(n+p-2)}(1) + (n+p)(n+p-1)\cdot$$

$$\cdot\left[x^{n+p-2} f^{(n+p-3)}(x)\Big|_0^1 - (n+p-2)\int_0^1 x^{n+p-3} f^{(n+p-3)}(x)\,dx\right]$$

şi aşa mai departe. Deducem că

$$\int_0^1 x^{n+p} f^{(n+p)}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1}(n+p)(n+p-1)\cdots(n+p-k+2)\, f^{(n+p-k)}(1) +$$

$$+ (-1)^p (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)\int_0^1 x^n f^{(n)}(x)\,dx, \quad \forall n,p\in\mathbb{N}, p\neq 0. \quad (1)$$

Arătăm că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^m f^m(x)\,dx = 0. \quad (2)$$

Din $\left|f^{(m)}(x)\right| \leq M$, $\forall x\in[0,1]$, $\forall m\in\mathbb{N}$, rezultă că $-\dfrac{M}{m+1} \leq \int_0^1 x^m f^{(m)}(x)\,dx \leq \dfrac{M}{m+1}$, $\forall m\in\mathbb{N}$ şi trecând la limită, obţinem relaţia (2).

Din (1) şi (2) rezultă concluzia problemei.

XII.73. *Să se arate că*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{1+x^n}dx = n\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = n\frac{\pi}{8}\ln 2,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze apoi $\int\limits_0^{\pi/4}\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x}dx.$

Gabriel Necula, Plopeni

Soluţie. Cu substituţia $x=\dfrac{1-y}{1+y}$ avem succesiv

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^n)\,dx = \int_0^1\frac{2}{(1+y)^2+(1-y)^2}\ln\frac{(1+y)^n+(1-y)^n}{(1+y)^n}dy =$$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+y^2}\ln\left((1+y)^n+(1-y)^n\right)dy - \int_0^1\frac{1}{1+y^2}\ln(1+y)^n\,dy \Rightarrow$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\ln\left((1+x)^n+(1-x)^n\right)dx - \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^n)\,dx =$$

$$= n\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}n\ln 2 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{1+x^n}dx = n\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}n\ln 2.$$

(Presupunem cunoscut rezultatul $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.) Pentru $n = 3$ avem $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{(1+x)^3+(1-x)^3}{1+x^3}dx = 3\frac{\pi}{8}\ln 2$, sau $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{2\left(1+3x^2\right)}{1+x^3}dx = 3\frac{\pi}{8}\ln 2$, adică

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{1+3x^2}{1+x^3}dx = 3\frac{\pi}{8}\ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln 2}{1+x^2}dx = 3\frac{\pi}{8}\ln 2 - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Cu substituţia $x = \operatorname{tg} t$ rezultă că $\int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+3\operatorname{tg}^2 x}dx = -\frac{\pi}{8}\ln 2.$

XII.74. *Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu proprietatea că există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$, unde $x, y\in G$. Dacă f, g sunt două endomorfisme ale lui G, atunci ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are soluţie unică dacă şi numai dacă funcţia $h : G\to G$, $h(x) = f(x^n)\,g(x^n)$este injectivă.*

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Să presupunem că ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are soluţie unică (evident aceasta va fi $x = e$) şi să arătăm că h este injectivă. Succesiv avem:

$$h(x) = h(y) \Leftrightarrow f(x^n)\,g(x^n) = f(y^n)\,g(y^n) \Leftrightarrow g(x^n)\,(g(y^n))^{-1} = (f(x^n))^{-1}\,f(y^n) \Leftrightarrow$$
$$g(x^n)\,g\big(y^{-n}\big) = f\big(x^{-n}\big)\,f(y^n) \Leftrightarrow$$
$$g\big(x^n y^{-n}\big) = f\big(x^{-n} y^n\big) = f\Big(\big(y^{-n}x^n\big)^{-1}\Big) = f\Big(\big(x^n y^{-n}\big)^{-1}\Big),$$

de unde deducem că $x^n y^{-n} = e \Rightarrow x^n = y^n \Rightarrow x = y$, adică h este imjectivă.

Reciproc, dacă h este injectivă, să presupunem că există $a\in G\setminus\{e\}$ astfel încât $f(a) = g\left(a^{-1}\right)$. Dar $h(a^n) = f(a^n)\,g(a^n) = g(a^{-n})\,g(a^n) = g(a^{-n}a^n) = g(e) = e$, prin urmare $h(a^n) = h(e^n)$, ceea ce contrazice injectivitatea lui h. Urmează că ecuaţia $f(x) = g\left(x^{-1}\right)$ are numai soluţia $x = e$.

XII.75. *Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r şi $S = \{B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid ABA = O_n\}$. Arătaţi că S este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi că $\dim S = n^2 - r^2$.*

Adrian Reisner, Paris

Soluţie. Faptul că S este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o simplă verificare. Matricea A fiind de rang r, există $P, Q\in GL_n(\mathbb{C})$ astfel încât $P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Acum $B\in S\Leftrightarrow ABA = O_n \Leftrightarrow P^{-1}ABAQ = O_n \Leftrightarrow \big(P^{-1}AQ\big)\big(Q^{-1}BP\big)\big(P^{-1}AQ\big) = O_n$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = O_n$, unde am notat $Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, α şi δ fiind matrice pătratice de ordin r, respectiv $n - r$. Însă $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, de unde $\alpha = O_r$. Deducem că $B\in S \Leftrightarrow Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, adică $\dim S = n^2 - r^2$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 2 / 2006

A. Nivel gimnazial

G106. *Fie $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ şi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$, considerăm propoziţiile: $x > 1; x > 2; \ldots; x > m$. Aflaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care k din cele m propoziţii sunt adevărate, iar celelalte $m - k$ sunt false.*

Maria Miheţ, Timişoara

Soluţie. Pentru $k = 0$, toate propoziţiile sunt false. În particular, $x > 1$ este falsă şi dacă $x \in \{0, 1\}$. Pe de altă parte, pentru $x = 0$ şi $x = 1$ evident că toate cele m propoziţii sunt false, deci pentru $k = 0$ răspunsul este $x \in \{0, 1\}$.

Pentru $1 \leq k \leq m-1$, cele k propoziţii adevărate trebuie să fie $x > 1$; $x > 2$; $\ldots$; $x > k$, iar cele false vor fi $x > k + 1$; $\ldots$; $x > m$. Avem aşadar $x > k$ şi $x \leq k + 1$, deci $x = k + 1$.

Când $k = m$, toate propoziţiile trebuie să fie adevărate. În particular, $x > m$ va fi adevărată, deci $x \in \{m + 1, m + 2, \ldots\}$.

G107. *Mulţimea $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ are proprietatea că, oricare ar fi patru elemente ale sale, putem alege două cu suma $2^{2006} + 1$. Aflaţi valoarea maximă a lui n.*

Dan Nedeianu, Dr. Tr. Severin

Soluţia 1 (a autorului). Pentru $m = 6$, putem considera $A = \{1, 2, 3, 2^{2006} - 2, 2^{2006} - 1, 2^{2006}\}$. Să presupunem prin absurd că ar exista mulţimi A cu $m \geq 7$. Conform principiului cutiei, există o submulţime $B \subset A$ de cardinal 4 cu toate elementele de aceeaşi paritate. Suma oricăror două numere din B va fi pară, deci diferită de $2^{2006} + 1$.

Soluţia 2 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Pentru a demonstra că nu putem avea $m \geq 7$, putem proceda astfel: dacă $n \geq 7$, există în A fie 4 elemente cel mult egale cu 2^{2005}, fie 4 elemente cel puţin egale cu $2^{2005} + 1$. Alegând două numere din cele patru, obţinem o sumă fie mai mare, fie mai mică decât $2^{2006} + 1$.

G108. *Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că mulţimea numerelor întregi de modul cel mult egal cu n poate fi partiţionată în m submulţimi cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă $n + 1 \geq m$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Să presupunem mai întâi că $n+1 \geq m$. Să notăm $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq n\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ şi $M_k = \{-k, k\}$ pentru $k = \overline{0, n}$. Clasele partiţiei pot fi atunci mulţimile $M_0, M_1, \ldots, M_{m-2}, M_{m-1} \cup M_m \cup \cdots \cup M_n$; este evident că suma elementelor din fiecare astfel de mulţime este aceeaşi şi anume 0.

Reciproc, să presupunem că avem partiţia $M = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ unde suma elementelor din fiecare mulţime A_j este aceeaşi, $j = \overline{1, m}$. Se obţine fără dificultate că această sumă trebuie să fie 0 (deoarece şi suma elementelor mulţimii M este 0). Observăm atunci că fiecare mulţime a partiţiei, cu excepţia celei care-l conţine pe 0, are cel puţin două elemente. (Orice element nenul al mulţimii respective trebuie să fie adunat cu un element nenul pentru a da suma zero). Avem atunci că $2n + 1 = \operatorname{card} M = \sum\limits_{k=1}^{m} \operatorname{card} A_k \geq 2\,(m - 1) + 1$, de unde deducem că $n + 1 \geq m$.

G109. *La un concurs se dau şase probleme evaluate cu 1, 2, 3, 4, 5, repectiv 6 puncte. Dacă un elev nu rezolvă o problemă, primeşte 1 punct; dacă o rezolvă, primeşte punctajul corespunzător. Fiecare elev obţine măcar 11 puncte. Să se arate că o problemă a fost rezolvată de cel puţin o treime dintre elevi.*

Gabriel Dospinescu, student, Paris

Soluţie. Fie n numărul elevilor; punctajul total este cel puţin $11n$. Fixăm o problemă, de punctaj a, şi notăm cu $A(a)$ mulţimea elevilor care rezolvă această problemă. Astfel, exact $|A(a)|$ elevi primesc a puncte şi exact $n - |A(a)|$ primesc 1 punct, deci punctajul obţinut la această problemă va fi $(a-1)|A(a)| + n$. Punctajul total va fi

$$\sum_a [(a-1)|A(a)| + n] \leq \max_a |A(a)| (1+2+3+4+5) + 6n,$$

deci $\max\limits_a |A(a)| \cdot 15 + 6n \geq 11n$, de unde concluzia problemei.

G110. *Fie mulţimile* $A = \{k + \sqrt{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $B = (0, 1/10)$. *Arătaţi că* $A \cap B$ *este infinită.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţia 1. Considerăm $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{m^2+1} - m, m \in \mathbb{N}, m \geq 10\right\}$. Evident că $C \subset A$ şi, dacă $x \in C$, atunci $0 < x = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}+m} < \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{10}$, prin urmare $C \subset A \cap B$. Să mai arătăm că mulţimea C este infinită. Dacă presupunem contrariul, există $s \neq t$, $s, t \geq 10$ astfel încât $\sqrt{s^2+1} - s = \sqrt{t^2+1} - t$. Obţinem succesiv:

$$t - s = \sqrt{t^2+1} - \sqrt{s^2+1} \Rightarrow s^2 - 2st + t^2 = t^2 + s^2 + 2 - 2\sqrt{(t^2+1)(s^2+1)} \Rightarrow$$
$$\sqrt{(t^2+1)(s^2+1)} = st + 1 \Rightarrow \left(t^2+1\right)\left(s^2+1\right) = (st+1)^2 \Rightarrow s^2 + t^2 - 2st = 0,$$

prin urmare $t = s$ şi ajungem astfel la o contradicţie. Rămâne că C este infinită, prin urmare $A \cap B$ este infinită.

Soluţia 2 (Marius Tiba, elev, Iaşi**).** Pentru fiecare k întreg negativ divizibil cu 5, considerăm $n = k^2 - \dfrac{k}{5}$; ar fi suficient să arătăm că $0 < k + \sqrt{n} < \dfrac{1}{10}$. Avem:

$$\sqrt{k^2 - \frac{k}{5}} + k > 0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 - \frac{k}{5}} > -k \Leftrightarrow k^2 - \frac{k}{5} > k^2 \Leftrightarrow k < 0;$$
$$\sqrt{k^2 - \frac{k}{5}} + k < \frac{1}{10} \Leftrightarrow k^2 - \frac{k}{5} < \frac{(1-10k)^2}{100} \Leftrightarrow 100k^2 - 20k < 100k^2 - 20k + 1,$$

ambele relaţii la care am ajuns fiind evident adevărate.

G111. *Fie* $0 < a < b$ *numere reale date şi* $x, y \in [a, b]$. *Dacă* $s = x + y$, $p = xy$, *să se afle maximul expresiei* $E = p + \dfrac{ab\left(s^2+ab\right)}{p}$.

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

Soluţie. Cum $x \in [a, b]$, avem că $(x-a)(x-b) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$, deci $(a+b)x \geq x^2 + ab$. Scriem o inegalitate analoagă în y şi înmulţind membru cu membru, obţinem:

$$(a+b)^2 xy \geq \left(x^2+ab\right)\left(y^2+ab\right) \Leftrightarrow (a+b)^2 p \geq p^2 + ab\left(s^2-2p\right) + a^2b^2 \Leftrightarrow$$

$$p+\frac{ab\left(s^2+ab\right)}{p}\le a^2+b^2+4ab\Leftrightarrow E\le a^2+b^2+4ab.$$

Pentru a se atinge egalitatea, trebuie ca $x^2-(a+b)\,x+ab=y^2-(a+b)\,y+ab=0$, fapt care se realizează pentru $(x,y)\in\{(a,a)\,;(a,b)\,;(b,a)\,;(b,b)\}$. Rezultă că $E_{\max}=a^2+b^2+4ab$.

G112. *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci*

$$\sqrt{(a+b)^2-c^2}+\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(c+a)^2-b^2}<2\,(a+b+c)\,.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia şi Muntenegru

Soluţie. Evident că $\sqrt{(a+b)^2-c^2}<\sqrt{(a+b)^2}=a+b$; scriind încă două inegalităţi similare şi sumând, obţinem concluzia.

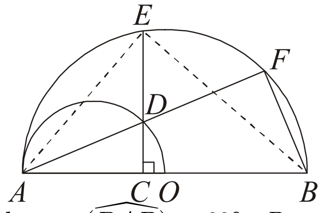
Notă. O mai bună evaluare a membrului stâng al inegalităţii, este indicată de **Titu Zvonaru**:

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\sqrt{(a+b)^2-c^2}+\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{(c+a)^2-b^2}\le\sqrt{3}\,(a+b+c)\,.$$

G113. *Fie segmentul $[AB]$ de mijloc O şi semicercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ de diametre $[AB]$, respectiv $[AO]$ situate în acelaşi semiplan faţă de AB. Perpendiculara în $C\in(AO)$ pe AB intersectează $\mathcal{C}_1$ în E şi $\mathcal{C}_2$ în D. Dacă $AD\cap\mathcal{C}_1=\{F\}$, să se arate că AE este tangentă cercului circumscris $\triangle DEF$.*

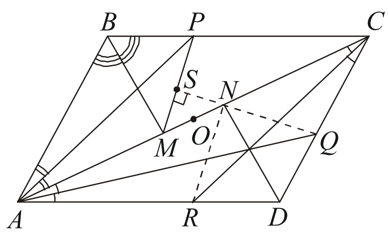
Alexandru Negrescu, elev, Botoşani



Soluţie. Cum $m(\widehat{DCB})+m(\widehat{DFB})=90^\circ+90^\circ=180^\circ$, rezultă că punctele B, F, D, C sunt conciclice. Scriind puterea punctului A faţă de cercul determinat de ele, obţinem că $AC\cdot AB=AD\cdot AF$. Pe de altă parte, $AC\cdot AB=AE^2$ din teorema catetei în $\triangle AEB$. Deducem că $AE^2=AD\cdot AF$, de unde concluzia.

G114. *Fie $ABCD$ un paralelogram care nu este romb cu $m(\widehat{BAD})=60^\circ$. Dacă $M,N\in(AC)$, $P\in(BC)$ şi $Q\in(CD)$ sunt astfel încât $[BM$, $[DN$, $[AP$ şi $[AQ$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{BAC}$ şi respectiv $\widehat{DAC}$, atunci MP este perpendiculară pe NQ.*

Andrei Nedelcu, Iaşi



Soluţie. Luăm $R\in(AD)$ astfel încât $[CR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACD}$, adică cea de a treia bisectoare interioară a triunghiului ACD.

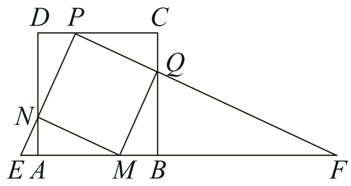
Deoarece triunghiurile ABC şi ADC sunt congruente şi simetrice faţă de centrul O al paralelogramului $ABCD$, rezultă că $[AP]$ este paralel şi congruent cu $[CR]$. De asemenea, din congruenţa şi simetria triunghiurilor AMP şi CNR rezultă că PM este paralelă cu RN. Prin urmare, dacă vom arăta că $NQ\perp RN$, atunci rezultă că $NQ\perp MP$. Punctul R este centrul cercului exînscris, tangent laturii $[ND]$ în triunghiul CDN. Prin urmare, $[NR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AND}$. Analog, Q este centrul cercului exînscris, tangent laturii $[ND]$ în triunghiul AND; rezultă că

$[NQ$ este bisectoarea unghiului $\widehat{CND}$. Deoarece unghiurile $\widehat{AND}$ şi $\widehat{CND}$ au vârful comun N şi laturile $[NA$ şi $[NC$ în prelungire, rezultă că bisectoarele lor $[NQ$ şi $[NR$ sunt perpendiculare, ceea ce încheie rezolvarea.

G115. *Fie pătratul $MNPQ$ înscris în pătratul $ABCD$, $M \in (AB)$, $N \in (AD)$, $P \in (CD)$, $Q \in (BC)$ şi fie $\{E\} = PN \cap AB$, $\{F\} = PQ \cap AB$. Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile pătratului $ABCD$, pătratului $MNPQ$, respectiv $\triangle PEF$. Să se arate că:*

a) $S_1 - S_2 = 4\sqrt{S_{AEN} \cdot S_{BFQ}}$; *b)* $S_3 \geq S_1$; *c)* $\dfrac{1}{S_3} = \dfrac{1}{S_2} - \dfrac{1}{S_1}$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi



Soluţie. *a*) Din congruenţa triunghiurilor AMN, BQM, CPQ şi DNP (I.U.) rezultă că $AN = BM = CQ = DP$ şi $AM = BQ = CP = DM$. Notăm cu S aria $\triangle AMN$; evident că $4S = S_1 - S_2$. Apoi, din asemănările evidente $\triangle AEN \sim \triangle DPN$ şi $\triangle CPQ \sim \triangle BFQ$, obţinem că $\dfrac{S_{AEN}}{S} = \left(\dfrac{AN}{DN}\right)^2 = \left(\dfrac{CQ}{BQ}\right)^2 = \dfrac{S}{S_{BFQ}}$, deci $S^2 = S_{AEN} \cdot S_{BFQ}$. Concluzia de la *a*) este imediată.

b) Fie $k = \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CQ}{BQ}$; atunci $S_{AEN} = k^2 S$, $S_{BFQ} = \dfrac{S}{k^2}$, prin urmare

$$S_3 = S_2 + 2S + S_{AEN} + S_{BFQ} = S_2 + 2S + k^2 S + \frac{S}{k^2} = S_2 + S\left(k + \frac{1}{k}\right)^2.$$

Cum $k + \dfrac{1}{k} \geq 2$, rezultă că $S_3 \geq S_2 + 4S$, adică $S_3 \geq S_1$.

c) Cum $S_3 = S_{PEM} + S_{PFM}$, avem succesiv:

$$\frac{1}{2} PE \cdot PF = \frac{PM \cdot PE \cdot \sin 45^\circ}{2} + \frac{PM \cdot PF \cdot \sin 45^\circ}{2} \Leftrightarrow PM = \frac{\sqrt{2} PE \cdot PF}{PE + PF};$$

$$BQ^2 + BM^2 = MQ^2 = \left(\frac{PM}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{PE^2 \cdot PF^2}{(PE + PF)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{BQ^2 + BM^2} = \frac{EF^2 + 2PE \cdot PF}{PE^2 \cdot PF^2} \Rightarrow \frac{1}{AM^2 + BM^2} = \left(\frac{EF}{PE \cdot PF}\right)^2 + \frac{2}{PE \cdot PF} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(AM + MB)^2 - 2AM \cdot MB} = \left(\frac{1}{AD}\right)^2 + \frac{1}{S_3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{AB^2 - 4\dfrac{AM \cdot AN}{2}} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{S_3} \Rightarrow \frac{1}{S_3} = \frac{1}{S_1 - 4S} - \frac{1}{S_1} \Rightarrow \frac{1}{S_3} = \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}.$$

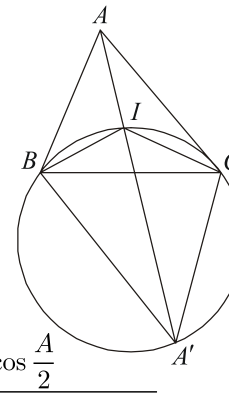
B. Nivel liceal

L106. *Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Dreptele AI, BI şi CI intersectează a doua oară cercurile circumscrise triunghiului BCI, CAI şi ABI în A', B', respectiv C'. Dacă notăm cu $|XYZ|$ perimetrul $\triangle XYZ$, să se demonstreze că*

$$\frac{BC}{|BCA'|}+\frac{CA}{|CAB'|}+\frac{AB}{|ABC'|}=1.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Notăm cu R raza cercului circumscris $\triangle ABC$. Patrulaterul $BA'CI$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{CA'I})=m(\widehat{IBC})=\frac{1}{2}m(\widehat{B})$. Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AA'C$ şi în $\triangle ABC$, avem:



$$\frac{A'C}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{AC}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin B}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=4R\cos\frac{B}{2},$$

deci $A'C=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$. Atunci:

$$|BCA'|=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+a=$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{BC}{|BCA'|}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}.$$

Egalând analog celelalte două rapoarte din concluzie, se obţine cerinţa problemei.

Observaţie. 1) Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic şi în locul punctului I considerăm punctul O, relaţia rămâne valabilă şi constituie o parte a problemei 3103 din *Crux Mathematicorum 1/2006*.

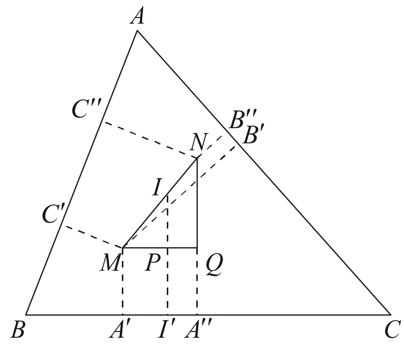
2) Relaţia este adevărată şi pentru ortocentrul H în cazul triunghiului ascuţitunghic.

Notă. În aceeaşi manieră a rezolvat problema **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L107. *Fie M, N două puncte situate în interiorul $\triangle ABC$, având distanţele până la laturile AB, BC, CA egale cu 3, 2, 7, respectiv $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{5}{2}$. Dacă raza cercului circumscris $\triangle ABC$ este $R=8$, să se calculeze MN.*

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

Soluţie. Fie A', B', C' şi A'', B'', C'' proiecţiile punctelor M, respectiv N pe laturile AB, BC, CA. Considerăm punctul $I\in[MN]$ astfel $\frac{MI}{IN}=2$ şi fie $MQ\parallel BC$, $Q\in NA''$, $I'=\mathrm{Pr}_{BC}\,I$, $\{P\}=II'\cap MQ$. Avem că $NQ=NA''-MA'=5-2=3$ şi $\frac{IP}{NQ}=\frac{MI}{MN}=\frac{2}{3}$, deci $IP=2$, apoi $II'=2+2=4$. Dacă $I''=\mathrm{Pr}_{AC}\,I$, $I'''=\mathrm{Pr}_{AB}\,I$, analog se arată că $II''=II'''=4$, prin urmare I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar $r=4$. Rezultă că în inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$ se atinge egalitatea şi astfel $\triangle ABC$ este echilateral.



Notăm $x = A'B$, $y = C'B$. Din teorema lui Pitagora, $BM^2 = BC'^2 + C'M^2 = BA'^2 + A'M^2$. Apoi, cu teorema cosinusului, $A'C'^2 = MC'^2 + MA'^2 - 2MC' \cdot MA' \cdot \cos 120^\circ = BC'^2 + BA'^2 - 2BC' \cdot BA' \cdot \cos 60^\circ$. Obţinem astfel sistemul $x^2 + 4 = y^2 + 9$, $x^2 + y^2 - xy = 19$, cu unica soluţie admisibilă $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $y = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Latura $\triangle ABC$ echilateral este $l = 8\sqrt{3}$. Cum I' este mijlocul lui BC, vom avea că $BI' = 4\sqrt{3}$, de unde $A'I' = 4\sqrt{3} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Ştim că $\dfrac{A'I'}{I'A''} = \dfrac{MI}{IN} = 2$, deci $A'A'' = 2\sqrt{3}$. Din trapezul dreptunghic $MA'A''N$ găsim $MN = \sqrt{21}$.

Notă (Mihai Haivas). Dacă $M, N \in \operatorname{Int} ABC$ au distanţele până la laturile triunghiului egale cu a, b, c, respectiv a', b', c', iar raza cercului circumscris $\triangle ABC$ este $R = \dfrac{2\,(ab' - a'b)}{a - b - a' + b'}$, atunci condiţia

$$(ab' - a'b)\,(b - c - b' + c') = (bc' - b'c)\,(a - b - a' + b')$$

este suficientă pentru ca triunghiul să fie echilateral. În cazul nostru, cele două relaţii sunt verificate.

L108. *Să se arate că în orice $\triangle ABC$ are loc inegalitatea*

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - (\sin A + \sin B + \sin C) \geq 4\sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi - 3A}{12}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţia 1 (Vlad Emanuel, elev, Sibiu**).** Deoarece

$$\sin B + \sin C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \cos\frac{B - C}{2} \leq 2 \cos\frac{A}{2},$$

cu egalitate când $B = C = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, rămâne să demonstrăm că

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sin A - 2\cos\frac{A}{2} \geq 2\sqrt{3}\left(1 - \cos\frac{\pi - 3A}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - 2\cos\frac{A}{2} \geq 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{A}{2}\right).$$

Notăm $x = \cos\dfrac{A}{2} \in (0, 1)$, $\sqrt{1 - x^2} = \sin\dfrac{A}{2}$; avem de arătat că

$$-2x\sqrt{1 - x^2} - 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - 3x - \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{1 - x^2}.$$

Dacă $x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ rămâne că $1 \geq 2\sqrt{1 - x^2}$, evident, iar dacă $x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ rămâne $1 \leq 2\sqrt{1 - x^2}$, iarăşi evident. Egalitatea se atinge în cazul triunghiului echilateral.

Soluţia 2 (a autorului). Mai general, vom demonstra că oricare ar fi $x, y, z \in (0, \pi)$, are loc inegalitatea

$$\sin\frac{x + y + z}{3} - \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \geq \frac{8}{3}\sin\frac{x + y + z}{3}\sin^2\frac{x + y - 2z}{12}. \qquad (1)$$

Plecăm de la egalitatea imediată

$$\sin\frac{x+y}{2}-\frac{\sin x+\sin y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{4}, \tag{2}$$

pe care o rescriem sub formele

$$\sin\frac{z+t}{2}-\frac{\sin z+\sin t}{2}=2\sin\frac{z+t}{2}\sin^2\frac{z-t}{4}, \tag{3}$$

$$\sin\frac{x+y+z+t}{4}-\frac{\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{z+t}{2}}{2}=2\sin\frac{x+y+z+t}{4}\sin^2\frac{x+y-z-t}{8}. \tag{4}$$

Din relaţiile (2), (3) şi (4) deducem că

$$\sin\frac{x+y+z+t}{4}-\frac{\sin x+\sin y+\sin z+\sin t}{4}=\sin\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{4}+$$
$$+\sin\frac{z+t}{2}\sin^2\frac{z-t}{4}+2\sin\frac{x+y+z+t}{4}\sin^2\frac{x+y-z-t}{8}.$$

Pentru $x,y,z,t\in(0,\pi)$, primii doi termeni din membrul drept sunt nenegativi (egali cu 0 când $x=y$, $z=t$), deci are loc inegalitatea

$$\sin\frac{x+y+z+t}{4}-\frac{\sin x+\sin y+\sin z+\sin t}{4}\geq 2\sin\frac{x+y+z+t}{4}\sin^2\frac{x+y-z-t}{8}.$$

Înlocuind aici $t=\dfrac{x+y+z}{3}$, obţinem exact relaţia (1). Egalitatea se atinge pentru $x=y$, $z=\dfrac{x+y+z}{3}$, deci când $x=y=z$.

Cerinţa problemei se obţine din (1) pentru $x+y+z=\pi$. Egalitatea se atinge în cazul triunghiului echilateral.

L109. *Se dau numerele reale pozitive subunitare* $a_1,a_2,\ldots,a_{2n^2-n}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. *Să se demonstreze inegalitatea (sumarea se face prin permutări circulare)*

$$\sum\frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n-1}+a_3^{2n-1}+\ldots+a_{2n^2-n}^{2n-1}+2n+1}<\frac{2n-1}{2n+1}.$$

Ioan Şerdean, Orăştie

Soluţie. Cum $1>a_1^{2n+1}$, atunci

$$\sum\frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n+1}+a_3^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n+1}<$$
$$<\sum\frac{a_1^{2n-1}}{a_2^{2n+1}+a_3^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n+a_1^{2n+1}}=$$
$$=\frac{a_1^{2n-1}+a_2^{2n-1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n-1}}{a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, din inegalitatea mediilor $MG\leq MA$, avem că

$$(2n-1)\,a_1^{2n+1}+1+1\geq(2n+1)\sqrt[2n+1]{\left(a_1^{2n+1}\right)^{2n-1}\cdot1\cdot1}=(2n+1)\,a_1^{2n-1}$$

şi încă $2n^2-n-1$ inegalităţi analoage pentru $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{2n^2-n}$. Prin adunarea acestora membru cu membru, obţinem că

$$(2n-1)\left(a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}\right)+2\left(2n^2-n\right)\geq$$
$$\geq(2n+1)\left(a_1^{2n-1}+a_2^{2n-1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n-1}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{a_1^{2n-1}+a_2^{2n-1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n-1}}{a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+\cdots+a_{2n^2-n}^{2n+1}+2n}\leq\frac{2n-1}{2n+1}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă inegalitatea dorită, care este strictă întrucât (1) este strictă.

L110. *Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ şi $n,k\in\mathbb{N}$. Demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\geq a^k+b^k+c^k+\frac{4n(a-b)^2}{k(a^{2-k}+b^{2-k}+c^{2-k})}.$$

(În legătură cu o problemă propusă la OBM 2005).

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

Soluţie. Considerăm polinomul $P(t)=kt^{n+k}-(n+k)\,t^k+n,\ t>0$. Folosind schema lui Horner, obţinem că

$$P(t)=(t-1)^2\left[kt^{n+k-2}+\cdots+2nt+n\right]\geq n\,(t-1)^2.$$

În inegalitatea $P(t)\geq n\,(t-1)^2$ facem $t=\dfrac{a}{b}$; obţinem

$$k\,\frac{a^{n+k}}{b^{n+k}}\geq(n+k)\,\frac{a^k}{b^k}-n+\frac{n\,(a-b)^2}{b^2}\Rightarrow k\,\frac{a^{n+k}}{b^n}\geq(n+k)\,a^k-nb^k+\frac{n\,(a-b)^2}{b^{2-k}}.$$

Scriem încă două relaţii analoage pentru $t=\dfrac{b}{c}$ şi $t=\dfrac{c}{a}$ şi le sumăm:

$$k\left(\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\right)\geq k\left(a^k+b^k+c^k\right)+n\left(\frac{(a-b)^2}{b^{2-k}}+\frac{(b-c)^2}{c^{2-k}}+\frac{(c-a)^2}{a^{2-k}}\right).$$

Însă, din inegalitatea Cauchy-Schwarz, avem că

$$\frac{(a-b)^2}{b^{2-k}}+\frac{(b-c)^2}{c^{2-k}}+\frac{(c-a)^2}{a^{2-k}}\geq\frac{(a-b+c-b+a-c)^2}{a^{2-k}+b^{2-k}+c^{2-k}}=\frac{4\,(a-b)^2}{a^{2-k}+b^{2-k}+c^{2-k}},$$

de unde concluzia problemei.

L111. *Se dau m numere naturale distincte din mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$. Să se arate că putem alege câteva dintre ele, cu suma S, astfel încât*

$$0\leq S-\frac{m(m+1)}{2}\leq n+\sqrt{2n}-m.$$

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Fie $a_1<a_2<\cdots<a_m$ cele m numere date. Notăm cu j indicele minim pentru care $a_1+a_2+\cdots+a_j\geq\dfrac{m\,(m+1)}{2}$ şi cu i indicele maxim pentru care $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j\geq\dfrac{m\,(m+1)}{2}$. Pentru $S=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j$ este atunci îndeplinită condiţia $0\leq S-\dfrac{m\,(m+1)}{2}$.

Din maximalitatea lui i, avem $S - a_i \leq \frac{m(m+1)}{2}$, deci

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1. \tag{1}$$

Din minimalitatea lui j, deducem că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \Rightarrow a_j > a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}.$$

Însă $a_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deci

$$n - 1 \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} \geq 1 + 2 + \cdots + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2} \Rightarrow i \leq \sqrt{2n} + 1.$$

Apoi, $a_k \leq n - m + k$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$; în particular

$$a_i \leq n - m + i \leq n - m + \sqrt{2n} + 1. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $S \leq \frac{m(m+1)}{2} + n - m + \sqrt{2n}$, ceea ce încheie rezolvarea.

L112. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $a(n)$ numărul modurilor în care n se poate scrie ca sumă a unui număr par de puteri ale lui 2 şi cu $b(n)$ numărul modurilor în care n se poate scrie ca sumă a unui număr impar de puteri ale lui 2. Să se arate că $a(n) = b(n)$, $\forall n \geq 2$.*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţia 1. Fie $\mathcal{N}$ mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale care au un număr finit de termeni nenuli. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim

$$\mathcal{M}_n = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{N} \mid n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots\}.$$

Atunci se observă că

$$a(n) = |\mathcal{M}_n(A)|, \quad \text{unde} \quad \mathcal{M}_n(A) = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{M}_n \mid a_0 + a_1 + \cdots = \text{par}\};$$
$$b(n) = |\mathcal{M}_n(B)|, \quad \text{unde} \quad \mathcal{M}_n(B) = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathcal{M}_n \mid a_0 + a_1 + \cdots = \text{impar}\}.$$

Evident că

$$a(2n+1) = a(2n) \quad \text{şi} \quad b(2n+1) = b(2n). \tag{1}$$

Să evaluăm $a(2n)$. Este clar că a_0 este tot timpul par. Cardinalul lui $\mathcal{M}_n(A)$ cu $a_0 = 2k$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, este $b(n-k)$. Atunci

$$a(2n) = b(n) + b(n-1) + \cdots + b(0) \Rightarrow a(2n) = a(2n-2) + b(n). \tag{2}$$

Analog se arată că

$$b(2n) = b(2n-2) + a(n). \tag{3}$$

Folosind relaţiile (1), (2) şi (3), se arată prin inducţie că $a(n) = b(n)$, $\forall n \geq 2$.

Notă. Asemănător a rezolvat problema **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

Soluţia 2 (a autorului). Vom folosi funcţii generatoare. Fie

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}.$$

Atunci, din definiţia numerelor $a(n)$ şi $b(n)$ dată în prima soluţie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a(n) - b(n)) x^n = f(x) f(x^2) f(x^4) \cdots = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdots = 1 - x,$$

de unde $a(n) - b(n) = 0$, $\forall n \geq 2$, ceea ce trebuia demonstrat.

L113. *Determinaţi numerele reale a, b pentru care mulţimea $A = \{a^n + b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţia 1 (a autorului). Notăm $S_n = a^n + b^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece A este finită, ea este mărginită: există $m = \min A$, $M = \max A$, deci $m \leq S_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $|a| > 1$, avem că

$$S_{2n} = a^{2n} + b^{2n} \geq a^{2n} = \left(1 + a^2 - 1\right)^n \geq 1 + n\left(a^2 - 1\right) > M,\ \forall n > \frac{M-1}{a^2-1}.$$

Din contradicţia obţinută rezultă că $|a| \leq 1$. La fel se arată că $|b| \leq 1$.

Dacă $|a| < 1$, $a \neq 0$ şi $|b| \leq 1$, atunci $a^{2n+2} < a^{2n}$ şi $b^{2n+2} \leq b^{2n}$, deci $S_{2n+2} < S_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă astfel că mulţimea A este infinită, fals. Analog se obţine contradicţie dacă $|b| < 1$, $b \neq 0$. Deducem că $a, b \in \{-1, 0, 1\}$ şi pentru aceste valori se verifică imediat că A este finită.

Soluţia 2 (Vlad Emanuel, elev, Sibiu**).** Dacă A, B sunt mulţimi finite cu $|A| = m$, $|B| = n$, atunci $A \pm B = \{x \pm y \mid x \in A, y \in B\}$ şi $A \cdot B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$ sunt tot finite, având cel mult mn elemente. Fie $x_n = a^n + b^n$; cum A este finită, mulţimile $\{x_{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $\left\{x_n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sunt finite. Atunci $\left\{x_n^2 - x_{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{2a^n b^n g \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită, apoi $\left\{(a^n - b^n)^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ este finită, deci $\{a^n - b^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită. Cum $a^n = \dfrac{(a^n + b^n) + (a^n - b^n)}{2}$, deducem că $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită, de unde se deduce imediat că $a \in \{-1, 0, 1\}$. Analog obţinem că $b \in \{-1, 0, 1\}$ şi pentru aceste valori se verifică imediat că A este finită.

L114. *Considerăm o parabolă şi două drepte secante parabolei, paralele între ele, dar neparalele cu axa de simetrie a parabolei. Folosind doar rigla negradată, să se construiască tangenta la parabolă care este paralelă cu dreptele date.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Fie $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ parabola dată, iar d şi d' cele două drepte. Fie $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ intersecţiile lui d cu $\mathcal{P}$, cu $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, iar $M(a, b)$ punctul căutat în care tangenta la parabolă este paralelă cu dreapta PQ. Tangenta în M are ecuaţia $by = px + pa$ şi panta $\dfrac{p}{b}$, iar dreapta PQ are panta

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p(y_1 - y_2)}{2px_1 - 2px_2} = \frac{2p(y_1 - y_2)}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

Din egalitatea pantelor obţinem că $b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, deci M are aceeaşi ordonată cu mijlocul segmentului $[PQ]$.

Folosind teorema lui Ceva, se arată că putem construi mijlocul unui segment dacă avem dată o dreaptă paralelă cu el, apoi putem construi o nouă paralelă la segment printr-un punct dat, ambele construcţii efectuându-se doar cu sigla negradată (vezi, de exemplu, A.Tóth - *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, E.D.P., 1963).

Cu segmentul $[PQ]$ şi dreapta d', construim mijlocul M al lui $[PQ]$. Dacă d' taie parabola în P' şi Q', construim mijlocul M' al lui $[P'Q']$. Dreapta MM' taie parabola în punctul T (ea fiind paralelă cu axa de simetrie a parabolei) şi acum paralela prin T la d este tangenta dorită.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L115. *Determinaţi* $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{grad} P \geq 2$, *astfel încât funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = p(\{x\}) + \{p(x)\}$ *să fie periodică (unde* p *este funcţia polinomială ataşată lui* P, *iar* $\{\cdot\}$ *desemnează partea fracţionară).*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Vom arăta că nu există polinoame P cu proprietăţile din enunţ. Presupunem contrariul şi fie $T \in \mathbb{R}_+^*$ o perioadă a lui f. Cum discontinuităţile posibile ale lui f sunt numere întregi şi soluţiile ecuaţiei $p(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}$, rezultă că f are în $[0, T]$ un număr finit de puncte de discontinuitate − fie acesta N. Funcţia f va avea acelaşi număr de puncte de discontinuitate în orice interval $[kT, (k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fie $n = \operatorname{grad} P$; atunci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(k) = p((k+1)T) - p(kT)$ este funcţie polinomială de grad $n-1$ în k, deci $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) = \pm\infty$. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $\lim\limits_{k\to\infty} g(k) = +\infty$. Există atunci $k \in \mathbb{Z}$ pentru care $g(k) \geq N + [T] + 2$. Cum $p((k+1)T) - p(kT) \geq N + [T] + 2$, între $p(kT)$ şi $p((k+1)T)$ se vor afla minim $N + [T] + 2$ valori întregi, iar din continuitatea funcţiei polinomiale p pe $\mathbb{R}$ rezultă că p ia toate aceste valori pe $[kT, (k+1)T]$. În intervalul $[kT, (k+1)T]$ se află cel mult $[T] + 1$ numere întregi, posibile puncte de discontinuitate pentru $p(\{x\})$ şi cum $p(\{x\})$ este continuă pe restul intervalului, rezultă că f are cel puţin $N + 1$ puncte de discontinuitate pe $[kT, (k+1)T]$, contradicţie.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro** sau **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk** . Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).