PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2005

Clasele primare

P.94. *Aflaţi numerele de două cifre cu proprietatea că diferenţa dintre număr şi răsturnatul lui este egală cu cel mai mare număr scris cu o singură cifră.*
(*Clasa I*) **Mara Neicu, elevă, Hârlău**

Soluţie. Dacă un număr de două cifre îndeplineşte condiţia din problemă, atunci diferenţa dintre numărul reprezentat de cifra zecilor şi numărul reprezentat de cifra unităţilor este egală cu 1. Numerele care verifică cerinţa sunt: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

P.95. *La ora de educaţie fizică, fetele unei clase sunt aliniate de la cea mai înaltă la cea mai scundă, iar băieţii după ele, în aceeaşi ordine. Ana este cea mai înaltă. Ene este cel mai înalt, iar Sorin cel mai scund. Între Ana şi al doilea băiat sunt* 15 *copii, iar între Ene şi Sorin sunt* 10 *băieţi. Câţi elevi sunt aliniaţi la educaţia fizică?*
(*Clasa I*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cristea, Iaşi**

Soluţie. Numărul fetelor este $15-1+1=15$, iar numărul băieţilor este $10+1+1=12$. La ora de Educaţie fizică sunt aliniaţi 27 elevi.

P.96. *Descoperă regula şi completează căsuţele libere în cazurile:*

a) $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 5\\\hline 3 & 8\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 10\\\hline 4 & 14\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 7\\\hline 2 & \\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\\hline 6 & 13\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\\hline 4 & \\\hline\end{array}$;

b) $\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 7\\\hline 2 & 5\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 8 & 7\\\hline 1 & 6\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3\\\hline 0 & \\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 3\\\hline & 1\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\\hline 2 & 0\\\hline\end{array}$.

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. *a)* Dacă tabelul este de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b\\\hline c & d\\\hline\end{array}$, atunci regula este dată de $a+c=b$ şi $b+c=d$. În tabelul al treilea completăm căsuţa liberă cu $2+7=9$, în al patrulea cu $13-6=7$, iar în ultimul tabel cu $3+4=7$, respectiv $4+7=11$.

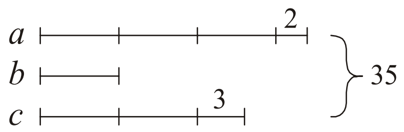
b) În acest caz regula este dată de $a-c=b$ şi $b-c=d$. Tabelele se completează cu $3-0=3$; $5-3=2$; $b=0+2$, $a=b+2=2+2=4$.

P.97. *În câte moduri putem forma un şir indian compus din* 4 *băieţi şi* 3 *fete astfel încât două fete să nu stea una lângă alta, iar şirul să nu înceapă cu o fată?*
(*Clasa a II-a*) **Andrei Burdun, elev, Iaşi**

Soluţie. Şirul poate începe cu cel mult doi băieţi. Avem posibilităţile: bfbfbfb; bfbbfbf; bfbfbbf; bbfbfbf. Şirul poate fi format în 4 moduri.

P.98. *La Crăciun, copii au împodobit bradul cu* 35 *globuri albe, galbene şi roşii. Andrei a observat că, dacă împarte numărul globurilor albe la cele galbene obţine câtul* 3 *şi restul* 2*, iar dacă împarte numărul globurilor roşii la cele galbene obţine câtul* 2 *şi restul* 3*. Câte globuri de fiecare fel au împodobit bradul?*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucătaru, Iaşi**

Soluţie. Folosim metoda figurativă.



Numărul globurilor galbene este

$[35-(2+3)]:6=5$.

Numărul globurilor albe este $5\times 3+2=17$.

Numărul globurilor roşii este $5\times 2+3=13$.

P.99. *La concursul de alergare organizat de clasa a II-a, cei mai buni băieţi sunt Radu, Cezar, Tudor, Dan şi Mihai. Care a fost clasamentul final, dacă:* 1) *Radu nu a luat locul întâi,* 2) *Cezar s-a clasat în urma lui Mihai,* 3) *Radu s-a clasat înaintea lui Mihai,* 4) *Tudor nu s-a clasat al doilea,* 5) *Dan este al treilea după Tudor.*

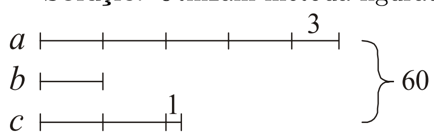
(*Clasa a III-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cristea, Iaşi**

Soluţie. Deoarece Tudor nu s-a clasat al doilea şi Dan este al treilea după Tudor, deducem că Tudor s-a clasat pe locul I. Ţinând cont şi de ordinea R–M–C, rezultă clasamentul final TRMDC.

P.100. *Trei numere naturale au suma* 60*. Să se afle numerele ştiind că împărţindu-l pe primul la al doilea obţinem câtul* 4 *şi restul* 3*, iar al treilea este cu* 1 *mai mare decât dublul celui de-al doilea.*

(*Clasa a III-a*) **Vasile Solcanu, Bogdăneşti, Suceava**

Soluţie. Utilizăm metoda figurativă.



Al doilea număr este

$b=[60-(3+1)]:7=8$.

Primul număr este $a=4\times 8+3=32+3=35$.

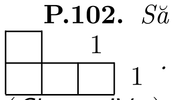
Al treilea număr este $c=2\times 8+1=17$.

P.101. *Există numere naturale care împărţite la* 12 *să dea câtul* 7*, iar împărţite la* 15 *să dea restul* 2*?*

(*Clasa a IV-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

Soluţie. Fie $n=12k+7=15p+2$. Atunci $n=3\,(4k+2)+1=3\cdot 5p+2$, adică pe de o parte n dă la împărţirea prin 3 restul 1, pe de altă parte dă restul 2, imposibil.

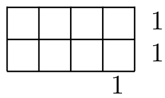
P.102. *Să se arate că pătratul de latură* 36 *poate fi acoperit cu piese de forma*



.

(*Clasa a IV-a*) **Andrei Burdun, elev, Iaşi**

Soluţie. Prin îmbinarea a două piese putem obţine o piesă dreptunghiulară de forma alăturată. Pentru acoperirea pătratului sunt necesare $(36:4)\times(36:2)=162$ piese dreptunghiulare. Pătratul poate fi acoperit cu 162×2 piese iniţiale.



P.103. *Un dreptunghi are perimetrul de* 624 *cm, iar lungimea este dublul lăţimii. Poate fi împărţit dreptunghiul într-o reţea de pătrate egale astfel încât suma perimetrelor lor să fie* 6656 *cm?*

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Lăţimea dreptunghiului este $624:6=104$ cm. Dacă împărţim dreptunghiul în n pătrate egale, atunci n poate fi 2, 8, 32, 128, 512, $\ldots$. Suma perimetrelor este $4nl=6656$ cm, de unde $nl=1664$ cm. Pentru $n=2$ obţinem $l=832$ cm

> 104 cm, fals. Pentru $n = 8$ obţinem $l = 208$ cm > 104 cm, fals. Pentru $n = 32$ obţinem $l = 52$ cm, ceea ce înseamnă că lăţimea poate fi acoperită cu de două ori latura unui pătrat, ceea ce este fals, deoarece dreptunghiul trebuie acoperit cu 32 pătrate. Pentru $n = 128$ obţinem $l = 13$ cm. Atunci dreptunghiul poate fi acoperit cu $(104 : 13) \times (208 : 13) = 8 \times 16 = 128$ pătrate. Pentru $n > 128$ nu avem soluţii.

Clasa a V-a

V.61. *Determinaţi* $x, y, z \in \mathbb{N}$ *în fiecare din cazurile:*

a) $x \cdot y = \dfrac{25}{2z+1}$; *b)* $x^2 + y^2 = \dfrac{25}{2z+1}$;

Vasile Solcanu, Bogdăneşti, Suceava

Soluţie. *a)* Deoarece $xy \in \mathbb{N}$, atunci $2z+1 \mid 25$, adică $2z+1 \in \{1, 5, 25\}$, prin urmare $z \in \{0, 2, 12\}$. Dacă $z = 0$, atunci $xy = 25$, deci $(x, y) \in \{(1, 25); (5, 5); (25, 1)\}$. Dacă $z = 2$, atunci $xy = 5$, deci $(x, y) \in \{(1, 5); (5, 1)\}$. Dacă $z = 12$, atunci $xy = 1$, deci $(x, y) = (1, 1)$. În concluzie,

$$(x, y, z) \in \{(1, 25, 0); (5, 5, 0); (25, 1, 0); (1, 5, 2); (5, 1, 2); (1, 1, 12)\}.$$

b) Obţinem tot $z \in \{0, 2, 12\}$ şi, analizând toate cazurile, găsim că

$$(x, y, z) \in \{(0, 5, 0); (5, 0, 0); (3, 4, 0); (4, 3, 0); (1, 2, 2); (2, 1, 2); (0, 1, 12); (1, 0, 12)\}.$$

Să notăm că *a)* şi *b)* nu pot avea loc simultan.

V.62. *Să se scrie numărul* 12321 *ca diferenţă a două pătrate perfecte.*

Andrei-Sorin Cozma, elev, Iaşi

Soluţie. Observăm că $12321 = 3^2 \cdot 37^2$. Înmulţim relaţia $3^2 + 4^2 = 5^2$ cu 37^2 şi obţinem că $3^2 \cdot 37^2 + 4^2 \cdot 37^2 = 5^2 \cdot 37^2$, de unde $3^2 \cdot 37^2 = 5^2 \cdot 37^2 - 4^2 \cdot 37^2$, deci $12321 = 34225 - 21904$.

V.63. *Să se scrie în ordine crescătoare numerele* 3^{3^3}*;* 3^{33}*;* 333*;* 33^3*;* $\left(3^3\right)^3$.

Ion Vişan, Craiova

Soluţie. Observăm că

$$3^{33} > 3^{27} = 3^{3^3} = \left(3^9\right)^3 = 81^3 > 33^3 > 27^3 = \left(3^3\right)^3 > \left(3^2\right)^3 = 9^3 = 729 > 333,$$

deci $333 < \left(3^3\right)^3 < 33^3 < 3^{3^3} < 3^{33}$.

V.64. *Să se determine* $x, y, z \in \mathbb{N}$*,* $z \neq 0$*, încât* $5^x + 5^y = z!$*, unde* $z! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot z$.

Doru Turbatu, Iaşi

Soluţie. Notăm $U_2(A)$ ultimele două cifre ale numărului A. Dacă $x \geq 2$, $y \geq 2$, atunci $U_2(5^x + 5^y) = 50$, în timp ce $U_2(z!) \neq 50$, $\forall z \in \mathbb{N}$. Dacă $x = 1$, $y \geq 2$, atunci $U_2(5^x + 5^y) = 30$, în timp ce $U_2(z!) \neq 30$, $\forall z \in \mathbb{N}$. Analog se arată că nu convine cazul $x \geq 2$, $y = 1$. Rămân de studiat cazurile $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Analizându-le pe rând, obţinem soluţiile $(x, y, z) \in \{(0, 0, 2), (1, 0, 3), (0, 1, 3)\}$.

V.65. *Vom numi "număr p" un număr natural care are exact* 4 *divizori.*

a) Daţi exemplu de trei numere p consecutive.

b) Să se arate că nu există trei numere p consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. *a)* De exemplu, putem considera numerele 33, 34, 35.

b) Presupunem prin absurd că există $a = 2k$, $b = 2k+1$, $c = 2k+2 = 2(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, trei *numere p* consecutive. Cum $2k$ şi $2(k+1)$ au fiecare exact 4 divizori, numerele k şi $k+1$ trebuie să fie ambele prime. Singurele numere prime consecutive sunt 2 şi 3, deci $k = 2$, apoi $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Evident însă că 5 nu este *număr p*.

Clasa a VI-a

VI.61 *Dacă* $a = x^9y^3z^4t^{10}$, $b = xy^5z^6t^8$, $c = x^5y^7z^{10}t^{12}$ *şi* $|a| + a = 0$, *să se arate că* $|b| + b = |c| + c = 0$.

Cristian - Cătălin Budeanu, Iaşi

Soluţie. Evident că $|a| + a = 0 \Leftrightarrow a \le 0$. Deoarece $a = xy\left(x^4yz^2t^5\right)^2 \le 0$, rezultă că $xy \le 0$. Atunci

$$b = xy\left(y^2z^3t^4\right)^2 \le 0, \qquad c = xy\left(x^2y^3z^5t^6\right) \le 0,$$

prin urmare $|b| + b = |c| + c = 0$.

VI.62. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ *astfel încât*

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_4} + \frac{a_2a_3a_4}{a_5} + \cdots + \frac{a_{n-1}a_na_1}{a_2} + \frac{a_na_1a_2}{a_3} = 0.$$

Să se arate că n *se divide cu* 4.

Ioana Olan, elevă, Iaşi

Soluţie. Suma dată are n termeni, fiecare dintre ei fiind $+1$ sau -1. Rezultatul fiind 0, numărul termenilor egali cu $+1$ este acelaşi cu al celor egali cu -1, prin urmare $n = 2k$. Produsul celor n fracţii este, pe de o parte, $(-1)^k(+1)^k = (-1)^k$, pe de alta este $a_1^2a_2^2\cdots a_n^2 = +1$; rezultă $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. În concluzie, $n = 4l$, deci $n \,\vdots\, 4$.

Să remarcăm că pentru $n = 4$ nu există numere a_1, a_2, a_3, a_4 care să verifice ipotezele problemei, însă pentru $n = 8$ putem considera numerele -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

VI.63. *Se poate completa un pătrat* 10×10 *cu numerele de la* 1 *la* 100, *aşa încât pentru fiecare coloană să se poată forma (cu numerele din acea coloană) trei grupe, astfel ca sumele numerelor din fiecare grupă să fie egale?*

Bogdan Andrei Ciacoi, elev, Gherla

Soluţie. Suma tuturor numerelor din pătrat este $\dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. Dacă s-ar putea completa pătratul în acest fel, atunci datorită faptului că pe fiecare coloană suma numerelor este multiplu de 3, suma numerelor de la 1 la 100 ar fi multiplu de 3. Cum 5050 nu este multiplu de 3, rezultă că pătratul nu se poate completa în modul dorit.

VI.64. *Pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}, n \ge 4$, *arătaţi că interiorul oricărui patrulater convex se poate descompune în reuniune de* n *triunghiuri dreptunghice cu interioarele disjuncte.*

Gabriel Popa, Iaşi

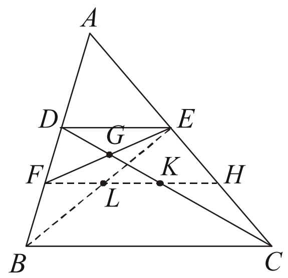
Soluţie. Observăm întâi că interiorul oricărui triunghi poate fi împărţit în două triunghiuri dreptunghice, ducând înălţimea din vârful unghiului cel mai mare (precauţie necesară dacă triunghiul iniţial este obtuzunghic). Dacă $n = 4$, o diagonală împarte interiorul patrulaterului în două triunghiuri, iar după procedeul de mai sus obţinem 4 triunghiuri dreptunghice. Dacă se poate face o descompunere în k triunghiuri dreptunghice, putem realiza descompunerea în $k+1$ triunghiuri, ducând înălţimea ipotenuzei în unul din primele k şi cu aceasta rezolvarea este încheiată.

VI.65. *Fie $\triangle ABC, DE \parallel BC$, cu $E \in (AC)$ şi $D \in (AB)$, iar $F \in (BD)$ şi $\{G\} = FE \cap DC$. Demonstraţi că, dacă două dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi a treia:*

(i) $BD = 2\,BF$; (ii) $AC = 2\,CE$; (iii) $EF = 2\,FG$.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie H mijlocul lui $[CE]$, iar $\{L\} = BE \cap FH$, $\{K\} = CD \cap FH$.



(i), (ii) $\Rightarrow$ (iii). Folosim în mod repetat teoremele liniei mijlocii într-un triunghi/ trapez şi reciprocele lor. Cum $AE = EC$ şi $DE \parallel BC$, atunci $DE = \dfrac{BC}{2}$. Apoi, din $DF = FB$ şi $EH = HC$, obţinem $FH \parallel BC$, deci $[FL]$, $[FK]$ vor fi linii mijlocii în $\triangle BDE$, respectiv $\triangle DBC$. Atunci $FL = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{BC}{4}$, $LK = FK - FL = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{BC}{4} = \dfrac{BC}{4}$, adică $FL = LK = KH$. În $\triangle FEC$, FH este mediană şi $\dfrac{FK}{KH} = \dfrac{2}{1}$, deci K va fi centru de greutate; rezultă că CK este mediană, adică $FG = GE$.

(i), (iii) $\Rightarrow$ (ii). În $\triangle CEF$, FH şi CG sunt mediane, deci K va fi centru de greutate. Rezultă că $FK = 2\,KH$ şi cum $FK = \dfrac{BC}{2}$, $KH = \dfrac{DE}{2}$, atunci $BC = 2\,DE$. Conform unei a doua reciproce a teoremei liniei mijlocii în triunghi, mai puţin cunoscută, rezultă că $[DE]$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$ (altfel $[D'E']$ ar fi acea linie mijlocie şi cum $DE = D'E' = \dfrac{BC}{2}$, $DE \parallel D'E' \parallel BC$, am obţine că $DEE'D'$ ar fi paralelogram, adică $DD' \parallel EE'$ şi atunci $AB \parallel AC$, fals!).

(ii), (iii) $\Rightarrow$ (i). Presupunem prin absurd că F nu este mijlocul lui $[BD]$; fie atunci F' acest mijloc, iar $\{G'\} = F'E \cap DC$. Din (ii), $EF' = 2\,F'G'$, deci $[GG']$ este linie mijlocie în $\triangle EFF'$, prin urmare $GG' \parallel BD$, adică $DC \parallel BD$, absurd. Rămâne că are loc (i).

Clasa a VII-a

VII.61. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat şi $p, k \in \mathbb{N}$, $p < k$. Să se arate că*

$$\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p+1} + \cdots + \frac{1}{n+k} > \frac{2\,(k-p+1)}{2n+k+p}.$$

(În legătură cu **V.31** din RecMat - 2/2002).

Gigel Buth, Satu Mare

Soluţie. Avem:

$$(n+p) + (n+p+1) + \cdots + (n+k) = \frac{(n+k)\,(n+k+1)}{2} - \frac{(n+p-1)\,(n+p)}{2} =$$

$$= \frac{(2n+k+p)\,(k-p+1)}{2}. \tag{1}$$

Inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică arată că

$$\frac{(n+p)+(n+p+1)+\cdots+(n+k)}{k-p+1} > \frac{k-p+1}{\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p+1}+\cdots+\frac{1}{n+k}}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem inegalitatea dorită. Problema **V.31** se obţine pentru $n = 100$, $p = 1$, $k = 100$.

VII.62. *Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{10} - a^6 + a^2 = 4$. Să se arate că $7 < a^{12} < 16$.*

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Soluţie. Faptul că $a^{10} - a^6 + a^2 = 4$ implică $a \neq 0$ şi $a \neq 1$, de unde $a^2 + \frac{1}{a^2} > 2$ şi $a^4 + \frac{1}{a^4} > 2$. Din $a^{12} + 1 = \left(a^4+1\right)\left(a^8 - a^4 + 1\right) = \frac{a^4+1}{a^2}\left(a^{10} - a^6 + a^2\right) = 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$, avem $a^{12} + 1 > 4 \cdot 2$, deci $a^{12} > 7$. Din $a^{10} + a^2 = a^6 + 4$, avem $a^4 + \frac{1}{a^4} = 1 + \frac{4}{a^6}$, de unde $1 + \frac{4}{a^6} > 2$, deci $a^6 < 4$, prin urmare $a^{12} < 16$.

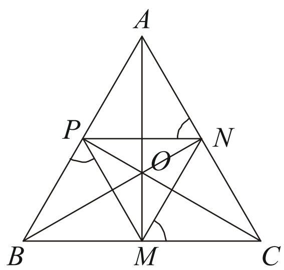
VII.63. *Fie triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ cu $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ şi bisectoarele $[BE]$, $[B'E']$ congruente. Să se arate că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. A se vedea în acest număr nota *Criterii de congruenţă a triunghiurilor*, pag. 107-109.

VII.64. *În triunghiul echilateral ABC considerăm cevienele AM, BN şi CP concurente într-un punct O, interior triunghiului. Arătaţi că, dacă $\triangle MNP$ este echilateral, atunci O este centrul $\triangle ABC$.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

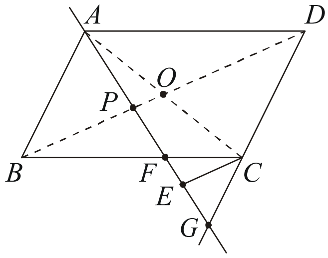


Soluţie. Unghiurile marcate sunt congruente. Într-adevăr, $m(\widehat{A}) = 60°$ implică $m(\widehat{ANP}) = 120° - m(\widehat{APN})$; $m(\widehat{NPM}) = 60°$ implică $m(\widehat{BPM}) = 120° - m(\widehat{APN})$, deci $\widehat{ANP} \equiv \widehat{BPM}$. Analog arătăm că $\widehat{BPN} \equiv \widehat{CMN}$; vom avea şi egalităţile $\widehat{APN} \equiv \widehat{BMP} \equiv \widehat{CNM}$. Se arată uşor că $\triangle ANP \equiv \triangle BPM \equiv \triangle CMN$, de unde $AP = BM = CN$ şi $AN = BP = CM$. Conform teoremei lui Ceva, are loc relaţia $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$, care revine la $\left(\frac{MB}{MC}\right)^3 = 1$ sau $MB \equiv MC$. Rezultă că M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, deci O este centrul acestuia.

VII.65. *Fie $ABCD$ paralelogram. O dreaptă variabilă ce trece prin A taie dreptele BC şi CD în F, respectiv G şi taie paralela prin C la BD în E. Să se arate că $AE^2 \leq AF \cdot AG$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $\{P\} = AE \cap BD$; cum $[OP]$ este linie mijlocie în $\triangle ACE$, vom avea că $AE = 2\,AP$. Din asemănările evidente $\triangle APD \sim \triangle FPB$, $\triangle ABF \sim \triangle GCF$, $\triangle GCF \sim \triangle GDA$, obţinem respectiv $\dfrac{1}{AP} = \dfrac{BF}{PF \cdot BC}$, $\dfrac{1}{AF} = \dfrac{CF}{GF \cdot BF}$, $\dfrac{1}{AG} = \dfrac{CF}{GF \cdot BC}$. De aici,



$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{CF}{GF}\left(\frac{1}{BF} + \frac{1}{BC}\right) = \frac{CF}{GF} \cdot \frac{BF + BC}{BF \cdot BC} \cdot \frac{1}{AP} \cdot \frac{PF \cdot BC}{BF} =$$
$$= \frac{1}{AP} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{BF + BC}{BF} \cdot \frac{PF}{BF}.$$

Din $\triangle DPA \sim \triangle BPF$ obţinem $\dfrac{FB}{BC + FB} = \dfrac{PF}{AP + PF} \Leftrightarrow \dfrac{BC + BF}{BF} = \dfrac{AF}{PF}$, deci

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{1}{AP} \cdot \frac{CF}{FG} \cdot \frac{AF}{PF} \cdot \frac{PF}{BF} = \frac{1}{AP} = \frac{2}{AE}$$

şi de aici concluzia rezultă imediat, aplicând inegalitatea mediilor.

Clasa a VIII-a

VIII.61. *Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia* $x! = y^{2^z} + 1$.

Denisa Florică şi Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Pentru $x \in \{0, 1\}$, obţinem $y = 0$, $z \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 2$, găsim $y = 1$, $z \in \mathbb{N}$ sau $y \in \mathbb{N}$, $z = 0$. Pentru $x \geq 3$ nu mai avem soluţii, deoarece $x!$ se divide cu 3, pe când $y^{2^z} + 1$ nu (dacă $y = 3k$, atunci $y^{2^z} + 1 = M3 + 1$, iar dacă $y = 3k \pm 1$, atunci $y^2 = M3 + 1$, deci $y^{2^z} + 1 = M3 + 2$).

VIII.62. *If* $a, b, c > 0$ *and* $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$, *prove that*

$$2\,(a + b + c)^2 \geq 3\,(ab + bc + ca) + 3\,(a + b + c)\,.$$

Babis Stergiou, Chalkida, Greece

Soluţie. Inegalitatea de demonstrat revine la

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + (ab + bc + ca) \geq 3\,(a + b + c)\,. \tag{1}$$

Condiţia din ipoteză şi inegalitatea Cauchy - Schwarz arată că

$$3\,(a + b + c) \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow a + b + c \geq 3.$$

Atunci:

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + (ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab + bc + ca) =$$
$$= (a + b + c)^2 = (a + b + c)\,(a + b + c) \geq 3\,(a + b + c)\,,$$

deci (1) este adevărată. Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 1$.

VIII.63. *Let a, b be distinct nonzero real numbers. Find all solutions* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *of the equation* $(x - 1)^2 + y^2 + \dfrac{4ab}{a^2 + b^2}\,(x - 1)\,y = 0.$

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain

Soluţie. Ecuaţia devine succesiv:

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2\right)\left[\left(x-1^2\right)+y^2\right]+4ab\,(x-1)\,y=0 \Leftrightarrow\\ &\left(a^2x^2+b^2y^2+a^2+2abxy-2a^2x-2aby\right)+\\ &\quad+\left(b^2x^2+a^2y^2+b^2+2abxy-2b^2x-2aby\right)=0 \Leftrightarrow\\ &(ax+by-a)^2+(bx+ay-b)^2=0.\end{aligned}$$

Evident atunci că $ax+by-a=bx+ay-b=0$, de unde obţinem $x=1, y=0$.

VIII.64. *Să se afle numărul de pătrate perfecte p astfel încât $2^n \le p < 2^{n+1}$.*

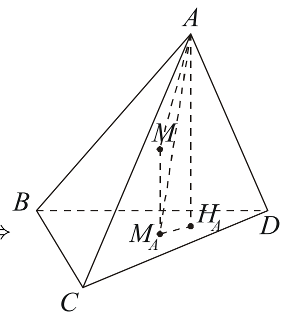
Marian Panţiruc, Iaşi

Soluţie. Dacă $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, atunci primul pătrat perfect va fi chiar 2^n. Dacă notăm cu m numărul de pătrate perfecte căutat, atunci acesta verifică dubla inegalitate $\left(2^k+m-1\right)^2 < 2^{2k+1} < \left(2^k+m\right)^2$, de unde $m-1<2^k\sqrt{2}-2^k<m$, ceea ce ne arată că $m-1$ este partea întreagă a numărului $2^k\sqrt{2}-2^k$, adică între 2^{2k} şi 2^{2k+1} se găsesc $\left[2^k\sqrt{2}\right]-2^k+1$ pătrate perfecte. Analog tratăm cazul $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$, obţinând $m=2^{k+1}-\left[2^k\sqrt{2}\right]$.

VIII.65. *Fie M un punct interior tetraedrului $ABCD$, iar d_A, d_B, d_C, d_D distanţele de la M la planele (BCD), (ACD), (ABD), respectiv (ABC). Să se arate că* $\dfrac{MA}{d_A}+\dfrac{MB}{d_B}+\dfrac{MC}{d_C}+\dfrac{MD}{d_D}\ge 12.$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Fie M_A, H_A proiecţiile punctelor M, respectiv A, pe planul (BCD); evident că $d_A=MM_A$, $h_a=AH_A$ şi analoagele. Mai notăm $s_A=S_{BCD}$, $s_B=S_{ACD}$ etc. Observăm că:



$$\begin{aligned}&AM+MM_A\ge AM_A\ge AH_A\Rightarrow\\ &s_A\cdot MA+s_A\cdot d_A\ge s_A\cdot h_A=3V_{ABCD}\Rightarrow\\ &s_A\cdot MA+s_A\cdot d_A\ge s_A\cdot d_A+s_B\cdot d_B+s_C\cdot d_C+s_D\cdot d_D\Rightarrow\\ &\frac{MA}{d_A}>\frac{s_B}{s_A}\cdot\frac{d_B}{d_A}+\frac{s_C}{s_A}\cdot\frac{d_C}{d_A}+\frac{s_D}{s_A}\cdot\frac{d_D}{d_A}.\end{aligned}$$

Grupând convenabil termenii, obţinem:

$$\sum\frac{MA}{d_A}\ge\sum\left(\frac{s_A}{s_B}\cdot\frac{d_A}{d_B}+\frac{s_B}{s_A}\cdot\frac{d_B}{d_A}\right)\ge 6\cdot 2=12,$$

cu egalitate când tetraedrul este regulat, iar M este centrul său de greutate.

Clasa a IX-a

IX.61. *The radii of the three escribed circles of a triangle ABC are $r_a=4$, $r_b=6$, $r_c=12$. Find the lenghts of the sides of the triangle.*

José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, Spain

Soluţie. Folosim succesiv binecunoscutele relaţii

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}; S^2=rr_ar_br_c; S=r_a\,(p-a)=r_b\,(p-b)=r_c\,(p-c)\,.$$

Obţinem $r=2$, apoi $S=24$, prin urmare $a=6$, $b=8$, $c=10$.

IX.62. *Rezolvaţi sistemul în necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$:*

$$2(n-1) \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k = \left(1 + x_1^2\right) \cdot \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = \left(1 + x_n^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2.$$

Silviu Boga, Suceava

Soluţie. Considerând o soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, din prima egalitate obţinem

$$\left(\sum_{k=2}^{n} x_k^2\right) \cdot x_1^2 - 2(n-1)\left(\prod_{k=2}^{n} x_k\right) \cdot x_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = 0. \quad (1)$$

Discriminantul este $\triangle = \left[(n-1) \cdot \prod\limits_{k=2}^{n} x_k\right]^2 - \left(\sum\limits_{k=2}^{n} x_k^2\right)$ şi, conform inegalităţii mediilor, $\triangle \leq 0$. Însă $x_1 \in \mathbb{R}^*$prin urmare trebuie să avem $\triangle \geq 0$, fapt care se realizează când $x_2^2 = x_3^2 = \cdots = x_n^2$. Analog obţinem că $x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_{n-1}^2$şi atunci $x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_n^2 = t \in \mathbb{R}_+^*$. Înlocuim în (1) şi găsim că $x_1 = \dfrac{\pm(n-1) \cdot t^{n-1}}{(n-1) \cdot t^2} = \pm t^{n-3}$, de unde $t = 1$. În concluzie, soluţiile sistemului au forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu $|x_k| = 1, k \in \overline{1, n}$.

IX.63. *Determinaţi $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $x^3 + y^3 \leq x + y \leq x^5 + y^5$.*

Romeo Ilie, Braşov

Soluţie. Notăm $x + y = s$, $xy = p$. Dacă $s > 0$, avem:

$$(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) \leq x + y \leq (x+y)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right) \Leftrightarrow$$
$$(x+y)^2 - 3xy \leq 1 \leq \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 - xy\left(x^2 + y^2\right) \Leftrightarrow$$
$$s^2 - 3p \leq 1 \leq \left(s^2 - 2p\right)^2 - p\left(s^2 - 2p\right) - p^2.$$

Atunci $s^2 - 2p \leq 1 + p$, deci

$$1 \leq \left(s^2 - 2p\right)^2 - p\left(s^2 - 2p\right) - p^2 \leq (1+p)^2 - p(1+p) - p^2 =$$
$$= -p^2 + p + 1 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}.$$

Deoarece $1 \leq -p^2+p+1 \leq \dfrac{5}{4}$ şi $-p^2+p+1 \in \mathbb{Z}$, atunci $-p^2+p+1 = 1$, deci $p \in \{0, 1\}$. Ne amintim că $s > 0$ şi $s^2 - 3p \leq 1$ şi obţinem soluţiile $(x, y) \in \{(0,1);(1,0),(1,1)\}$.

Analog, dacă $s < 0$ găsim soluţiile $(x, y) \in \{(0,-1);(-1,0),(-1,-1)\}$. În sfârşit, dacă $s = 0$, evident că şirul de inegalităţi din ipoteză este adevărat cu egal, deci orice pereche $(n, -n)$, $n \in \mathbb{Z}$ constituie soluţie a ecuaţiei.

IX.64. *Fie $ABCD$ un patrulater, iar H_A, H_B, H_C, H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Demonstraţi că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{H_C H_A}$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{H_D H_B}$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Notăm cu O_A, O_B, O_C, O_D centrele circumscrise triunghiurilor BCD, ACD, ABD, respectiv ABC. Ţinând cont de relaţia Sylvester, se obţine succesiv:

$$\overrightarrow{O_A H_A} + \overrightarrow{H_C O_C} = \left(\overrightarrow{O_A B} + \overrightarrow{O_A C} + \overrightarrow{O_A D}\right) + \left(\overrightarrow{AO_C} + \overrightarrow{BO_C} + \overrightarrow{DO_C}\right) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{O_AC}+\overrightarrow{CH_A}+\overrightarrow{H_CA}+\overrightarrow{AO_C}=\overrightarrow{O_AC}+\overrightarrow{AO_C}+\left(\overrightarrow{O_AB}+\overrightarrow{BO_C}\right)+\left(\overrightarrow{O_AD}+\overrightarrow{DO_C}\right)\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{CH_A}+\overrightarrow{H_CA}=2\overrightarrow{O_AO_C}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{O_CO_A}=\overrightarrow{AH_C}+\overrightarrow{H_AC}.$$

Analog se deduce că $2\overrightarrow{O_BO_D}=\overrightarrow{DH_B}+\overrightarrow{H_DB}$. Atunci
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{H_CH_A}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH_C}=\overrightarrow{CH_A}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH_C}+\overrightarrow{H_AC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow O_C=O_A\Leftrightarrow$$
$ABCD$ patrulater inscriptibil $\Leftrightarrow O_B=O_D\Leftrightarrow\overrightarrow{DH_B}+\overrightarrow{H_DB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{H_DH_B}$.

IX.65. *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x+\sin a\geq\cos x\cdot\cos b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\dfrac{a-b}{\pi}\in\mathbb{Z}$.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Dacă $\sin a<1$, pentru $x=\dfrac{3\pi}{2}$ relaţia dată devine $-1+\sin a\geq 0\Leftrightarrow$ $\sin a<1$, contradicţie. Rămâne că $\sin a=1$, adică $a=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Inegalitatea din enunţ devine:
$$\sin x+1\geq\cos x\cdot\cos b\Leftrightarrow\sin x-\cos x\cdot\cos b\geq -1\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\cdot\sin x-\frac{\cos b}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\cdot\cos x\geq\frac{-1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\Leftrightarrow$$
$$\sin x\cdot\cos\phi-\sin\phi\cdot\cos x\geq-\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\Leftrightarrow\sin(x-\phi)\geq\frac{-1}{\sqrt{1+\cos^2 b}},$$
pentru orice $x\in\mathbb{R}$ (am notat $\phi\in[0,2\pi)$ numărul pentru care $\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}$, $\sin\phi=\dfrac{\cos b}{\sqrt{1+\cos^2 b}}$). Luând $x=\phi+\dfrac{3\pi}{2}$ în această inegalitate, obţinem $-1\geq\dfrac{-1}{\sqrt{1+\cos^2 b}}\Leftrightarrow\cos^2 b\leq 0\Leftrightarrow\cos b=0$, deci $b=\dfrac{\pi}{2}+l\pi, l\in\mathbb{Z}$. Astfel, $\dfrac{a-b}{\pi}=2k-l\in\mathbb{Z}$.

Clasa a X-a

X.61. *If $x\geq 0$, prove that $\log_3(1+3^x)>\log_4\left(4^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\right)$.*

Oleg Faynshteyn, Leipzig, Germany

Soluţie. Ineglitatea dată se scrie echivalent
$$\log_3 3^x\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)>\log_4 4^x\left(1+\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)^x\right)\Leftrightarrow$$
$$\log_3\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)>\log_4\left(1+\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)^x\right).$$
Această ultimă inegalitate rezultă din observaţia că $\dfrac{1}{3}>\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$, iar $\log_3 a=\log_3 4\times$ $\times\log_4 a>\log_4 a>\log_4 b$, de îndată ce $a>b$.

X.62. *Se dă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ cu proprietatea că $z_{n+2}=z_n+iz_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, şi se notează cu V mulţimea termenilor săi. Dacă $U_3\subset V$, să se arate că $V=U_{12}$. (Am notat $U_k=\left\{z\in\mathbb{C}\mid z^k=1\right\}$.)*

Monica Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Observăm că $z_{n+3} = z_{n+1} + iz_{n+2} = z_{n+1} + i\left(z_n + iz_{n+1}\right) = iz_n$, prin urmare $z_{n+12} = iz_{n+9} = i^2 z_{n+6} = i^3 z_{n+3} = i^4 z_n = z_n$, deci şirul este periodic de perioadă 12. În plus, $iz \in V$ pentru orice $z \in V$.

Pentru a arăta că $V = U_{12}$, este suficient să demonstrăm că $U_{12} \subset V$. Fie

$$U_{12} = \{z_k \mid z_k = \cos \frac{2k\pi}{12} + i \sin \frac{2k\pi}{12}, k = \overline{0,11}\}.$$

Evident că $\{z_0, z_4, z_8\} = U_3 \subset V$, apoi $z_3 = iz_0 \in V$, $z_6 = iz_3 \in V$, $z_9 = iz_6 \in V$, $z_7 = iz_4 \in V$, $z_{10} = iz_7 \in V$, $z_1 = iz_{10} \in V$, $z_{11} = iz_8 \in V$, $z_2 = iz_{11} \in V$, $z_5 = iz_2 \in V$ şi demonstraţia este încheiată.

X.63. *Un număr de n jucători aruncă succesiv o monedă având feţele s şi b; jocul este câştigat de acela care obţine primul faţa s. Să se afle probabilitatea ca jucătorul de pe locul k $(1 \le k \le n)$ să câştige jocul în primele $np + k$ aruncări ale monedei, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este dat.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Problema extinde, folosind aceeaşi idee, cazul $n = 2$ prezent în unele manuale. Notăm cu A_i evenimentul ca jucătorul de pe locul k să câştige jocul în exact $ni + k$ aruncări ale monedei; pentru realizarea lui A_i, feţele monedei trebuie să apară în ordinea $\underbrace{bb\ldots b}_{ni+k-1 \text{ori}}\ s$, deci $P\left(A_i\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{ni+k}$. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sunt incompatibile în totalitatea lor, iar $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$ reprezintă evenimentul a cărui probabilitate este cerută de problemă. Avem:

$$P(A) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \cdots + P\left(A_p\right) = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+m}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+np}} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\dfrac{1}{2^{np}} - 1}{\dfrac{1}{2^n} - 1} = \frac{1}{2^{n(p-1)+k}} \cdot \frac{1 - 2^{np}}{1 - 2^n}.$$

X.64. *Fie* $f : \mathbb{R}^* \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{2005 \cdot |x|}{2004 \cdot \left|\sin^{2005} x\right| + 2005 \cdot |x|^4} + \dfrac{3}{|x|^3}$. *Să se arate că* $\left|f(x) + \dfrac{1}{2}\right| - \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{9}{1 + |x|^3}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Ioan Şerdean, Orăştie

Soluţie. Construim funcţia $g : \mathbb{R}^* \to (0, \infty)$,

$$g(x) = \frac{1 + |x|^3}{9} \left(\left|f(x) + \frac{1}{2}\right| - \left|f(x) - \frac{1}{2}\right|\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*;$$

este suficient să arătăm că $g(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Vom demonstra acest lucru în două etape:

i) Dacă $|x| > 2$, atunci

$$0 < f(x) \le \frac{2005 \cdot |x|}{2005 \cdot |x|^4} + \frac{3}{|x|^3} = \frac{4}{|x|^3} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

deci $\left|f(x)+\dfrac{1}{2}\right| = f(x)+\dfrac{1}{2}$, iar $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}-f(x)$. Rezultă că

$$g(x)+\frac{1+|x|^3}{9}\cdot 2f(x) \le \frac{1+|x|^3}{9}\cdot 2\cdot\frac{4}{|x|^3} = \frac{8}{9}\left(\frac{1}{|x|^3}+1\right) \le \frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}+1\right) = 1.$$

ii) Dacă $0<|x|\le 2$, folosind faptul că $|a|-|b|\le|a-b|$, avem:

$$g(x)\le\frac{1+|x|^3}{9}\cdot\left|f(x)+\frac{1}{2}-f(x)+\frac{1}{2}\right| = \frac{1+|x|^3}{9}\le\frac{1+8}{9}=1.$$

X.65. *Fie $\mathcal{C}$ un cerc de rază 1 şi fie $P_1, P_2, \dots, P_n$ puncte ale discului corespunzător. Arătaţi că există un semicerc închis $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}$ astfel încât $MP_1+MP_2+\dots+MP_n\ge$ $\ge n$, $\forall M\in\mathcal{S}$.*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Fie O centrul cercului, iar G centrul de greutate al sistemului de puncte $P_1, P_2, \dots, P_n$. Vom demonstra că $MP_1+MP_2+\dots+MP_n\ge nMG$, pentru orice punct M din plan. Raportăm planul complex la un reper cu originea în M; fie g afixul lui G, p_i afixele punctelor $P_i, i=\overline{1,n}$. Atunci

$$g=\frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{n}\Rightarrow n\cdot|g| = |p_1+p_2+\dots+p_n|\le|p_1|+|p_2|+\dots+|p_n|\Rightarrow$$
$$n\cdot MG\le MP_1+MP_2+\dots+MP_n.$$

Rămâne de demonstrat că există un semicerc $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}$ astfel încât $MG\ge 1,\forall M\in\mathcal{S}$. Dacă $G=O$, inegalitatea este adevărată pentru orice $M\in\mathcal{C}$. Dacă $G\ne O$, fie $[AB]$ diametrul lui $\mathcal{C}$ perpendicular pe OG, iar $\mathcal{S}$ semicercul delimitat de acesta, "opus" lui G. Atunci $m(\widehat{MOG})\ge 90°,\forall M\in\mathcal{S}$, deci $MG\ge MO=1$, ceea ce încheie rezolvarea.

Clasa a XI-a

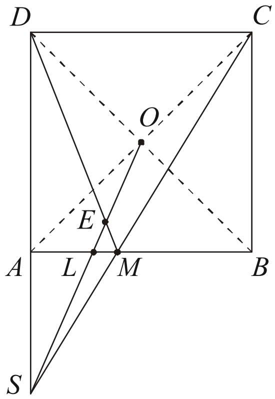
XI.61. *Fie $a\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ şi $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $A^{k+1}=aA^k$, să se arate că I_n-A este inversabilă.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ o soluţie a sistemului $(I_n-A)\cdot X=O$. Atunci $AX_0=X_0$, deci $A^k\cdot X_0=A^{k+1}\cdot X_0=X_0$, de unde $X_0=aX_0$ şi cum $a\ne 1$ rezultă că $X_0=O$. Astfel, sistemul omogen $(I_n-A)\cdot X=O$ are doar soluţia banală şi atunci $\det(I_n-A)\ne 0$.

XI.62. *Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar M un punct variabil pe $[AB]$. Notăm $\{S\}=CM\cap AD$, $\{E\}=SO\cap MD$. Se cere locul geometric al punctului E.*

Petru Răducanu, Iaşi



Soluţia 1 (analitică). Raportăm planul la un reper cu originea în A, având dreptele AB şi AD axe de coordonate. Putem considera $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$, $O(1,1)$, iar $M(a,0)$, cu $a\in(0,2)$. Intersectând dreapta CM cu AD, obţinem că $S\left(0,\dfrac{2a}{a-2}\right)$. Atunci ecuaţia dreptei SO este $\dfrac{a+2}{a-2}\cdot(x-1)+y-1=0$ şi cum $DM: 2x+a(y-2)=0$, prin eliminarea parametrului a între cele două ecuaţii găsim ecuaţia locului geometric: $x^2+y^2-2y=0$. Această ecuaţie reprezintă cercul de diametru $[AD]$, din care trebuie reţinut doar semicercul interior pătratului (fără capete), deoarece $a\in(0,2)$.

Soluţia 2 (sintetică). În $\triangle AMD$ cu transversala $E-L-S$, conform teoremei lui Menelaus obţinem că $\dfrac{EM}{ED}\cdot\dfrac{LA}{LM}\cdot\dfrac{SD}{SM}=1$. Apoi, în $\triangle AMC$ cu transversala $O-L-S$ obţinem $\dfrac{LA}{LM}\cdot\dfrac{OC}{OA}\cdot\dfrac{SM}{SM}=1$. Cum $\dfrac{SC}{SM}=\dfrac{SD}{SA}=\dfrac{CD}{AM}$, atunci $\dfrac{EM}{ED}=\dfrac{AM^2}{AD^2}$. De aici rezultă că $AE\perp MD$, adică $AEOD$ este patrulater inscriptibil, deci E aparţine cercului de diametru $[AD]$.

Rămâne să arătăm că orice punct E' de pe semicercul interior pătratului aparţine locului. Fie $\{M'\}=DE'\cap AB$, $\{S'\}=CM'\cap DA$, $\{T\}=AC\cap M'D$. Atunci:

$$\frac{OA}{OT}=\frac{OD}{OT}=\operatorname{tg}(\widehat{OTD})=\operatorname{tg}(\widehat{ATE'});$$
$$\frac{E'T}{E'D}=\frac{E'T}{AE'}:\frac{E'D}{AE'}=\frac{\operatorname{ctg}(\widehat{ATE'})}{\operatorname{ctg}(\widehat{ADM'})}=\frac{AM'}{AD}\cdot\operatorname{ctg}(\widehat{ATE'}).$$

Cum $\dfrac{S'D}{S'A}=\dfrac{CD}{AM'}=\dfrac{AD}{AM'}$, rezultă că $\dfrac{OA}{OT}\cdot\dfrac{E'T}{E'D}\cdot\dfrac{S'D}{S'A}=1$. Din reciproca teoremei lui Menelaus în $\triangle ATD$ urmează că punctele O, E', S' sunt colinare, ceea ce încheie demonstraţia.

XI.63. *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii continue astfel încât $g(a)+f(b)<1+g(a)f(b)$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ pentru care*

$$\left(\frac{f(c)}{b-c}\right)^3+\left(\frac{g(c)}{a-c}\right)^3+\left[\frac{2c-a-b}{(b-c)(a-c)}\right]^3=\frac{3(2c-a-b)f(c)g(c)}{(b-c)^2(a-c)^2}.$$

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

Soluţie. Florin Popovici, Braşov, dă următoarea generalizare:

Fie $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ trei funcţii continue pe $[a,b]$, astfel încât $(g(a)-1)\cdot(f(b)-1)>0$ şi $h(a)=h(b)=0$. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$ este impar, există $c\in(a,b)$ astfel încât $f^n(c)(a-c)^n+g^n(c)(b-c)^n+(2c-a-b)^n=h(c)$.

Într-adevăr, din ipoteză rezultă că $(g^n(a)-1)(f^n(a)-1)>0$. Considerăm funcţia $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, $u(x)=f^n(x)(a-x)^n+g^n(x)(b-x)^n+(2x-a-b)^n-h(x)$. Evident că u este continuă pe $[a,b]$, iar

$$u(a)=(g^n(a)-1)(b-a)^n;\quad u(b)=(1-f^n(b))(b-a)^n\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(a)u(b)=(g^n(a)-1)(1-f^n(b))(b-a)^{2n}<0.$$

Urmează că există $c\in(a,b)$ astfel încât $u(c)=0$, de unde concluzia.

Problema se obţine pentru $n=3$ şi $h(x)=3(2x-a-b)(a-b)(b-x)f(x)g(x)$.

XI.64. *Fie $f:(0,1)\to(0,\infty)$ o funcţie crescătoare cu $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $f(x)\le x$, $\forall x\in(0,1)$. Definim şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(x_n)_{n\ge1}$ prin $a_n=\dfrac{1}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)}$*

$(a > 0,\ b > 0)$ *şi* $x_n = [f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + \cdots + f(a_{2n})]^{1/n}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Să observăm întâi că problema este consistentă, în sensul că există funcţii f ca în enunţ; de exemplu $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_4(x) = \ln(1+x)$ etc.

Notăm $b_n = f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + \cdots + f(a_{2n})$ şi observăm că $b_n \to 0$:

$$0 < b_n \le nf(a_n) \le n \cdot \frac{1}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} \to 0.$$

Avem că $x_n = e^{\ln x_n} = e^{\frac{\ln b_n}{n}}$. Pentru a calcula limita exponentului, ne ocupăm de raportul (Stolz pentru $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\frac{\ln b_{n+1} - \ln b_n}{(n+1)-n} = \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} = \ln\left(1 + \frac{f(a_{2n+1}) + f(a_{2n+2})}{b_n} - \frac{f(a_{n+1})}{b_n}\right).$$

Dar

$$\frac{f(a_{2n+1}) + f(a_{2n+2})}{b_n} \le \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{nf(a_{2n})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{2n}}{f(a_{2n})} \cdot \left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} + \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right) \to 0$$

şi ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{f(a_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{f(a_{n+2}) - f(a_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_{2n+1}) + f(a_{2n+2}) - f(a_{n+1})}{f(a_{2n+2}) - f(a_{n+1})} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a_{2n+1})}{a_{2n+1}} \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1}} + \frac{f(a_{2n+2})}{a_{2n+2}} \cdot \frac{a_{2n+2}}{a_{n+1}} - \frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}}\right) :$$

$$: \left(\frac{f(a_{n+2})}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}}\right) = 1$$

(am folosit Stolz pentru $\frac{0}{0}$). Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln b_n}{n} = -\infty$ şi, prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

XI.65. *Pentru* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA$, *arătaţi că*

$$\left[\left(\frac{x_1}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_1}{A}\right) + 2\right] \cdot \left[\left(\frac{x_2}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_2}{A}\right) + 2\right] \cdot \ldots \cdot \left[\left(\frac{x_n}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_n}{A}\right) + 2\right] \le 6^n.$$

Să se obţină de aici inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică.

Dumitru Mihalache, Bârlad

Soluţia 1 (a autorului). Este cunoscută inegalitatea $e^x \ge 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, egalitate pentru $x = 0$. (Inegalitatea se poate obţine ignorând restul în dezvoltarea Taylor a lui e^x, sau direct prin derivări repetate). Trecem pe x în $x-1$ şi găsim că

$$e^{x-1} \ge 1 + \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} \Leftrightarrow e^{x-1} \ge \frac{x^3 + 3x + 2}{6}, \forall x \in \mathbb{R},$$

cu egalitate pentru $x = 1$. Dăm lui x valorile $\frac{x_1}{A}, \frac{x_2}{A}, \ldots \frac{x_n}{A}$ şi înmulţim membru cu membru inegalităţile obţinute; ţinând seama de ipoteza $\frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{A} - n = 0$, obţinem concluzia. Egalitatea se atinge pentru $\frac{x_1}{A} = \frac{x_2}{A} = \cdots = \frac{x_n}{A} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Vom demonstra că $x^3 + 3n + 2 \geq 6x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$; într-adevăr, acest fapt revine la $(x-1)^2(x+2) \geq 0$, evident adevărat. Cu notaţia $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, obţinem:

$$6^n \geq \left[\left(\frac{x_1}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_1}{A}\right) + 2\right]\left[\left(\frac{x_2}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_2}{A}\right) + 2\right]\cdots\left[\left(\frac{x_n}{A}\right)^3 + 3\left(\frac{x_n}{A}\right) + 2\right] \geq$$
$$\geq \left(6 \cdot \frac{x_1}{A}\right)\left(6 \cdot \frac{x_2}{A}\right)\cdots\left(6 \cdot \frac{x_n}{A}\right) = 6^n \cdot \frac{G^n}{A^n} \Rightarrow \frac{G^n}{A^n} \leq 1 \Rightarrow G \leq A,$$

adică tocmai inegalitatea mediilor.

Soluţia 2 (**Marian Tetiva**, Bârlad). Fie $x_1 = a_1 A, x_2 = a_2 A, \ldots, x_n = a_n A$, cu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{A} = n$; inegalitatea de demonstrat devine $\left(a_1^3 + 3a_1 + 2\right)\left(a_2^3 + 3a_2 + 2\right)\ldots\left(a_n^3 + 3a_n + 2\right) \leq 6^n \Leftrightarrow P(a_1)\cdot P(a_2)\cdot\cdots\cdot P(a_n) \leq 6^n$, unde $P(x) = x^3 + 3x + 2$. Însă

$$P(a_1)\cdot P(a_2)\cdot\cdots\cdot P(a_n) \leq 6^n \Leftrightarrow \ln P(a_1) + \ln P(a_2) + \cdots + \ln P(a_n) \leq n \ln 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln P(a_1) + \ln P(a_2) + \cdots + \ln P(a_n)}{n} \leq \ln P\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right),$$

deoarece $P\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = P(1) = 6$. Ultima inegalitate ar fi adevărată dacă funcţia $\ln P(x)$ ar fi concavă. Cum

$$P''(x) \cdot P(x) - [P'(x)]^2 = 6x\left(x^3 + 3x + 2\right) - \left(3x^2 + 3\right)^2 =$$
$$= -3\left(x^4 - 4x + 3\right) = -3(x-1)^2\left(x^2 + 2x + 3\right) \leq 0,$$

demonstraţia este încheiată.

Notă. Cum domeniul de definiţie al funcţiei $\ln P(x)$ este de forma (x_0, ∞), cu $x_0 \in (-1, 0)$, putem spune că inegalitatea din enunţ are loc pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (x_0, +\infty)$, cu $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$.

Clasa a XII-a

XII.61. *Să se determine funcţiile derivabile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ care admit o primitivă $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ pentru care $\lim_{x \searrow 0} F(x) = 2 \cdot \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$ şi $F(x) f'(x) = F(x) f(x) - f^2(x) + x - 1$, $\forall x \in (0,\infty)$.*

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. (dată de **Florin Popovici**, Braşov). Cu notaţia $u = \frac{1}{2}F^2$, relaţia din enunţ se scrie sub forma $u''(x) - u'(x) = x - 1$, $\forall x \in (0,\infty)$, care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordin 2, cu coeficienţi constanţi, neomogenă. Soluţia sa generală este $u(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in (0,\infty)$, adică $\frac{1}{2}F^2(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in (0,\infty)$. Din condiţia $\lim_{x \searrow 0} F(x) = 1$ obţinem că $c_1 + c_2 = \frac{1}{2}$. Apoi, derivând în ambii membri şi folosind din nou condiţia iniţială, găsim că $c_2 = \frac{1}{2}$, deci $c_1 = 0$. În concluzie, $F^2(x) = e^x - x^2$, $\forall x \in (0,\infty)$.

Pentru $x \in (0,1]$, avem $e^x - x^2 \geq e^x - 1 > 0$. Pentru $x \in (1,\infty)$, avem $\left(e^x - x^2\right)'' = e^x - 2 > e - 2 > 0$. Apoi, $\left(e^x - x^2\right)' > 0$, $\forall x \in (1,\infty)$ şi cum $e - 1 > 0$, deducem că $e^x - x^2 > 0$, $\forall x \in (1,\infty)$. Astfel, $F(x) = \sqrt{e^x - x^2}$, $\forall x \in (0,\infty)$, prin urmare $f(x) = F'(x) = \dfrac{e^x - x^2}{2\sqrt{e^x - x^2}}$, $\forall x \in (0,\infty)$ este unica soluţie a problemei.

XII.62. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ o funcţie continuă, iar F primitiva sa care se anulează în origine. Să se calculeze:* a) $\lim\limits_{x\to\infty} xF\left(\dfrac{1}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. *a*) Avem:

$$\lim_{x\to\infty} xF\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{F(y)}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{F(y) - F(0)}{y - 0} = F'(0) = f(0).$$

b) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} nF\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$, pentru orice $0 < a < f(0)$, există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt{n} \cdot F\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > a, \forall n > n_1$, altfel spus $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > \dfrac{a}{\sqrt{n}}, \forall n > n_1$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=n_1+1}^{n} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) > \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - a\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{k}} >$$

$$> \sum_{k=1}^{n_1} F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + a\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - a\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{k}}, \forall n > n_1$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} a \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} F\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = +\infty$.

XII.63. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii surjective. Dacă $g \circ (g - f)$ este descrescătoare şi există $L > 1$ astfel încât $|g(x) - g(y)| \geq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, să se arate că f are un unic punct fix.*

Sorin Puşpană, Craiova

Soluţie. Din $|g(x) - g(y)| \geq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că g este injectivă şi, cum g surjectivă, rezultă g bijectivă; atunci g^{-1} este o contracţie de constantă $\dfrac{1}{L} < 1$, deci continuă. Rezultă că g este continuă şi cum este şi injectivă, atunci g este strict monotonă. Folosind acum faptul că $g \circ (g - f)$ este descrescătoare, rezultă că $g - f$ este monotonă, iar g şi $g - f$ au monotonii diferite. Distingem situaţiile:

i) Fie g descrescătoare, iar $g - f$ crescătoare; dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunci

$$(g - f)(x) \leq (g - f)(y) \Rightarrow g(x) - g(y) \leq f(x) - f(y) \Rightarrow$$
$$|f(x) - f(y)| \geq |g(x) - g(y)| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq L \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii) Fie g crescătoare, $g - f$ descrescătoare; dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunci

$$(g - f)(x) \geq (g - f)(y) \Rightarrow f(y) - f(x) \geq g(y) - g(x) \Rightarrow$$
$$|f(x) - f(y)| \geq L \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

În ambele cazuri am obţinut că $|f(x) - f(y)| \geq L \cdot |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Cum f surjectivă, ca şi în cazul lui g, obţinem că f^{-1} este contracţie de constantă $\frac{1}{L} < 1$, deci are un unic punct fix, acesta fiind unicul punct fix şi pentru f.

XII.64. *Fie M mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile de două ori şi cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'' = \alpha f + 1$. Arătaţi că există o familie de grupuri $\{(G_\alpha, *_\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$ ce verifică simultan:*
1) $(G_\alpha, *_\alpha) \simeq (\mathbb{R}^2, +)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
2) $\{G_\alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$ *este o partiţie a mulţimii M.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat notăm cu G_α mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale $f'' = \alpha f + 1$. Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 = \alpha$, cu rădăcinile: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$, dacă $\alpha > 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-\alpha}$, dacă $\alpha < 0$ şi $\lambda_{12} = 0$ (dublă), dacă $\lambda = 0$. Mai observăm că o soluţie particulară a acestei ecuaţii este $f_\alpha(x) = -\frac{1}{\alpha}$, dacă $\alpha \neq 0$, şi $f_0(x) = \frac{x^2}{2}$, dacă $\alpha = 0$. Ca urmare, avem:

$$G_\alpha = \left\{ae^{-\sqrt{\alpha}x} + be^{\sqrt{\alpha}x} - 1/\alpha; \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}, \text{ dacă } \alpha > 0;$$
$$G_\alpha = \left\{a\cos\sqrt{-\alpha}x + b\sin\sqrt{-\alpha}x - 1/\alpha; \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}, \text{ dacă } \alpha < 0;$$
$$G_0 = \left\{ax + b + \frac{x^2}{2}; \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}, \text{ dacă } \alpha = 0.$$

Evident, $M = \bigcup\{G_\alpha; \alpha \in \mathbb{R}\}$. Mulţimile G_α sunt nevide şi $G_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_2} = \phi$, dacă $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (se aplică rezultatul: dacă $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k(t)\, e^{\alpha_k t} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sunt distincte, atunci polinoamele $P_k(t)$ sunt identic nule pe $\mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$), ceea ce încheie demonstraţia punctului 2).

Pe mulţimea G_α, cu $\alpha \neq 0$, definim operaţia $*_\alpha$ prin $(f *_\alpha g)(x) = f(x) + g(x) + \frac{1}{\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, iar pe G_0 considerăm $*_0$ dată de $(f *_0 g)(x) = f(x) + g(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilitatea operaţiilor $*_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, şi axiomele de grup se verifică cu uşurinţă (elementele neutre sunt funcţiile f_α şi f_0 definite mai sus).

În sfârşit, dacă $f_i(x) = a_i e^{-\sqrt{\alpha}x} + b_i e^{\sqrt{\alpha}x} - 1/\alpha$, $i = 1, 2$, avem $(f_1 *_\alpha f_2)(x) = (a_1 + a_2)\, e^{-\sqrt{\alpha}x} + (b_1 + b_2)\, e^{\sqrt{\alpha}x} - 1/\alpha$ şi deducem că $(G_\alpha, *_\alpha) \simeq (\mathbb{R}^2, +)$ pentru $\alpha > 0$. La fel se procedează în cazurile $\alpha < 0$ şi $\alpha = 0$.

XII.65. *Fie $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ numere prime, iar $\mathcal{P}$ mulţimea polinoamelor de grad n cu termenul liber 1 şi ceilalţi termeni distincţi în mulţimea $\left\{\frac{1}{p_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ relativ prim cu toate numerele p_i există $q, r \in \mathcal{P}$ astfel încât $0 \leq |q(x) - r(x)| < \frac{37x^n + 42}{42n!}$. Dacă, în plus, $x \geq p_n - 1$, inegalitatea de mai sus este strictă.*

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie. Avem:

$$\max_{k\in\mathcal{P}} k(x) = \frac{1}{p_1}x^n + \frac{1}{p_2}x^{n-1} + \cdots + 1 \le x^n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{2p_2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}p_n}\right) + 1 \le$$
$$\le x^n\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 5} + \left(\frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 9} + \ldots\right)\right] + 1 <$$
$$< x^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{7}\right) + 1 < \frac{37}{42}x^n + 1.$$
(Am utilizat inegalitatea evidentă $p_n \cdot 2^{n-1} \ge n(n-1)$, precum şi faptul că
$$\frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{7}).$$
Cum mulţimea $\mathcal{P}$ conţine $n!$ polinoame, putem găsi două q, r distincte pentru care să aibă loc inegalitatea din enunţ.

Pentru partea a doua, fie $q \ne r$ şi $x \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ relativ prim cu toate numerele p_i şi astfel încât $x \ge p_n - 1$. Să presupunem prin absurd că $q(x) = r(x)$, deci
$$\frac{1}{p_{i_1}}x^n + \frac{1}{p_{i_2}}x^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{1}{p_{j_1}}x^n + \frac{1}{p_{j_2}}x^{n-1} + \cdots + 1,$$
unde $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ şi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sunt permutări distincte ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci $x^{n-1}\left(\frac{1}{p_{i_1}} - \frac{1}{p_{j_1}}\right) + x^{n-2}\left(\frac{1}{p_{i_2}} - \frac{1}{p_{j_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{p_{in}} - \frac{1}{p_{j_n}}\right) = 0$ şi, înmulţind această relaţie cu $p_1p_2\cdots p_n$, obţinem că x divide $\frac{p_1p_2\cdots p_n\left(p_{j_n} - p_{i_n}\right)}{p_{i_n}p_{j_n}}$, deci în mod necesar $p_{i_n} = p_{j_n}$. Analog se demonstrează că $p_{i_k} = p_{j_k}$, $\forall k = \overline{1, n}$, deci $q = r$ şi astfel ajungem la o contradicţie.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro**, **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**
- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 2 / 2005

A. Nivel gimnazial

G86. *Fie $n \geq 3$ un număr natural impar, iar $A \subset \mathbb{N}$ o mulţime cu $n^2 - 2n + 2$ elemente. Să se arate că putem alege n numere din mulţimea A cu proprietatea că suma lor se divide cu n.*

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Scriem $A = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} A_i$, unde A_i conţine toate elementele lui A care dau restul i la împărţirea prin n. Dacă cel puţin o mulţime A_i este vidă, cum $n^2-2n+2 = (n-1)(n-1)+1$, din principiul cutiei rezultă că există măcar o mulţime A_j care conţine cel puţin n elemente, iar suma acestora se divide evident cu n. Dacă toate mulţimile A_i, $i = \overline{0, n-1}$, sunt nevide, alegem câte un element din fiecare mulţime. Suma acestora, modulo n, este $0 + 1 + \cdots + (n-1) \equiv \dfrac{n(n-1)}{2} \pmod{n}$ şi, cum n este impar, $n-1$ este par şi rezultă că $\dfrac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$.

G87. *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care putem găsi $a_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât $2005 = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Aflaţi valoarea minimă a lui n.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Putem scrie:

$$4010 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

şi cum $4010 = 64^2 - 86$, putem alege $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 64$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 86$. Aceste două egalităţi sunt realizate pentru $n = 86$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{75} = 1$, $a_{76} = a_{77} = \cdots = a_{86} = -1$.

Bineînţeles, există o infinitate de posibilităţi de alegere ale lui n. De exemplu, scriind $4010 = 65^2 - 109$, ar trebui ca $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 65$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 109$, deci putem considera $n = 109$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{88} = 1$, $a_{89} = a_{90} = \cdots = a_{109} = -1$. Se poate continua!

Demonstrăm că valoarea minimă a lui n este 86. Fie p numere egale cu 1 şi q numere egale cu -1, $p + q = n$. Atunci

$$4010 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) = (p-q)^2 - p - q \Leftrightarrow$$
$$(2p-n)^2 - n = 4010 \Leftrightarrow 4p^2 - 4np + \left(n^2 - n - 4010\right) = 0.$$

Cum $p \in \mathbb{N}$, trebuie ca discriminantul ecuaţiei de grad II în p de mai sus să fie pătrat perfect. Avem că $\Delta = 16(n + 4010)$ şi cel mai mic pătrat perfect de această formă se obţine pentru $n = 86$, când $\Delta = 16 \cdot 4096 = 256^2$.

G88. *Spunem că o mulţime $M \subseteq \mathbb{R}_+$ are proprietatea (P) dacă orice element din M este media geometrică a două elemente distincte ale lui M.*

a) Să se arate că există o infinitate de mulţimi cu proprietatea (P).

b) Găsiţi mulţimile cu 2005 elemente având proprietatea (P).

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. *a*) Pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, mulţimea $M = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ are proprietatea (P), deoarece $x^n = \sqrt{1 \cdot x^{2n}}$, iar $1 = \sqrt{x^{n_0} \cdot x^{-n_0}}$, cu $n_0 \in \mathbb{Z}$ arbitrar.

b) Fie M o mulţime finită cu proprietatea (P), iar $a \in M$ cel mai mare element al acesteia; atunci a este media geometrică a elementelor $b, c \in M$, cu $b < c$. Rezultă că $b < a < c$, deci c ar fi un element al lui M strict mai mare decât a! În concluzie, nici o mulţime finită nu are proprietatea (P).

G89. *Pentru* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, *să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}\right).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie (semnalată de **Titu Zvonaru**, Comăneşti)**.** Inegalitatea evidentă $(a-b)^2 \geq 0$ conduce la $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$, deci $\frac{1}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{1}{3ab}$. Analog obţinem că $\frac{1}{a^2+a+1} \leq \frac{1}{3a}$, $\frac{1}{b^2+b+1} \leq \frac{1}{3b}$ şi prin sumare obţinem concluzia problemei. Egalitatea se atinge pentru $a = b = 1$.

Din păcate, această rezolvare evidentă nu a fost observată în momentul selectării problemelor, fapt care a condus la includerea ei în secţiunea *Probleme pentru pregătirea concursurilor.*

G90. *Fie* $n \geq 1$ *un număr natural. Să se arate că mulţimea* $A = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ *se poate partiţiona în două submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă* $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ *sau* $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Dacă A se poate partiţiona cum cere enunţul, suma elementelor lui A: $(n+1) + (n+2) + \cdots + 2n = \frac{n(3n+1)}{2}$ trebuie să fie număr par, deci $n(3n+1) \,\vdots\, 4$. Cum n şi $3n+1$ au parităţi diferite, unul dintre ele este multiplu de 4, deci $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. În al doilea caz, nu putem avea $k = 1$, altfel $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ şi suma elementelor fiecarei submulţimi din partiţie ar trebui să fie 20; submulţimea care-l conţine pe 10 nu poate avea însă suma elementelor 20.

Reciproc, fie întâi $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $A = \{4k+1, 4k+2, \ldots, 8k\}$ poate fi împărţită în $2k$ submulţimi cu aceeaşi sumă a elementelor: $\{4k+1, 8k\}$; $\{4k+2, 8k-1\}$; $\ldots$; $\{6k, 6k+1\}$. Reuniunea a k dintre aceste submulţimi constituie una dintre clasele partiţiei, iar cele rămase cealaltă clasă.

Fie acum $n = 4k+1$, $k \geq 2$; atunci $A = \{4k+2, 4k+3, \ldots, 8k+2\}$. Fie $A = B \cup C$ partiţia dorită. În B punem, pentru început, numerele $4k+2$, $4k+3$, $4k+4$, $4k+6$, $4k+8$, iar în C numerele $4k+5$, $4k+7$, $4k+9$, $8k+2$; până acum, elementele din B şi cele din C au aceeaşi sumă $20k+23$. Numerele rămase, de la $4k+10$ la $8k+1$, le împăţim în $k-2$ grupe de câte 4 numere consecutive, de forma $\{p, p+1, p+2, p+3\}$. Numerele p şi $p+3$ din fiecare grupă le punem în B, iar $p+1$ şi $p+2$ le punem în C, realizând astfel partiţia dorită.

G91. *Găsiţi cel mai mic număr natural* k *pentru care, oricum am colora o tablă de şah* 8×8 *cu* k *culori astfel încât fiecare culoare să fie folosită cel puţin o dată, există* 6 *căsuţe de culori diferite care se află pe aceeaşi linie sau coloană.*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Răspunsul este 35. Dăm mai întâi un exemplu de colorare cu 34 de culori care nu are proprietatea dorită: împărţim tabla în 4 table 4×4, pe cea din stânga-sus o colorăm în albastru, pe cea din dreapta-jos o colorăm în roşu, iar restul căsuţelor, în număr de 32, vor fi colorate fiecare cu câte una dintre cele 32 de culori rămase. În acest fel, pe fiecare linie şi pe fiecare coloană vom avea câte 5 culori diferite.

Demonstrăm în continuare că numărul $k = 35$ verifică cerinţele problemei. Presupunem prin absurd că ar exista o colorare cu 35 de culori care nu are proprietatea dorită. Numerotăm culorile de la 1 la 35. Fie l_i, respectiv c_i, numărul de linii/coloane pe care se află cel puţin o căsuţă de culoare i. Cum intersecţia a l_i linii cu c_i coloane are $l_i c_i$ elemente, rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{35} l_i c_i \geq 64 \quad (*)$. Din faptul că pe fiecare linie/coloană avem cel mult 5 culori diferite, rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{35} l_i \leq 40$, $\sum\limits_{i=1}^{35} c_i \leq 40$ şi, desigur, $l_i \geq 1$, $c_i \geq 1$. Fie $x_i = l_i - 1 \geq 0$, $y_i = c_i - 1 \geq 0$ şi atunci $\sum\limits_{i=1}^{35} x_i = \sum\limits_{i=1}^{35} l_i - 35 \leq 5$, $\sum\limits_{i=1}^{35} y_i = \sum\limits_{i=1}^{35} c_i - 35 \leq 5$. Din $(*)$ obţinem:

$$\sum_{i=1}^{35} (x_i y_i + x_i + y_i + 1) \geq 64 \Rightarrow \sum_{i=1}^{35} x_i y_i \geq 19.$$

Putem presupune, din simetrie, că $\max x_i \geq \max y_i$. Cele trei inegalităţi pe care le avem la îndemână nu sunt suficiente pentru a obţine o contradicţie, dar nu lasă decât 3 cazuri:

i) $x_i = y_i = 5$ şi $x_k, y_k = 0$ pentru $k \neq i$ (pentru un i fixat); atunci există o culoare care ocupă (nu în întregime!) 6 linii şi 6 coloane, iar restul culorilor apar exact o dată, deci vor rămâne două linii şi două coloane care conţin căsuţe de culori diferite două câte două, contradicţie cu presupunerea asumată.

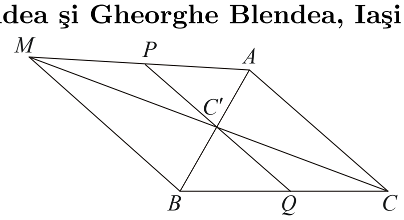
ii) $x_i = 5$, $y_i = 4$ şi $x_k, y_k = 0$ pentru $k \neq i$ (pentru un i fixat); acest caz este evident mai defavorabil decât primul.

iii) $x_i = 5$, $y_i = 4$, $y_j = 1$, $x_k = 0$ pentru $k \neq i$, $y_k = 0$ pentru $k \neq i, j$; nici acum nu putem evita existenţa unei linii sau coloane alcătuită numai din căsuţe de culori diferite, deoarece $5 + \max\{1, 2\} = 7 < 8$.

Rezultă că presupunerea făcută este falsă şi rămâne adevărată concluzia problemei.

G92. *Fie $\triangle ABC$, cu $[AB]$ cea mai scurtă latură. Bisectoarea unghiului C intersectează paralela dusă prin B la AC în M, iar latura AB în C'. Paralela prin C' la AC intersectează MA în P şi BC în Q. Arătaţi că înălţimile $\triangle ABC$ pot fi laturi ale unui triunghi dacă şi numai dacă $2AB > PQ$.*

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi



Soluţie. Cu notaţiile uzuale, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$, $h_c = \dfrac{2S}{c}$. Cum $c \leq \min\{a, b\}$, atunci h_c este cea mai lungă înălţime, prin urmare h_a, h_b, h_c pot fi laturi ale unui triunghi dacă şi numai dacă $h_c < h_a + h_b$. Însă

$$h_c < h_a + h_b \Leftrightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 2c > \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow 2\,AB > PQ.$$

Pentru ultima echivalenţă, am folosit faptul cunoscut că segmentul ce se spijină pe laturile neparalele ale unui trapez, paralel cu bazele şi care trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor, are ca lungime media armonică a bazelor.

G93. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) \geq 90°$, M – mijlocul lui $[BC]$, iar N punctul de contact al cercului înscris cu BC. Dacă $\widehat{BAN} \equiv \widehat{MAC}$, să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel.*

Doru Buzac, Iaşi

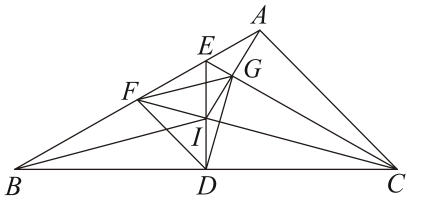
Soluţie. Dreptele AN şi AM fiind izogonale, putem utiliza relaţia lui Steiner: $\dfrac{BN}{NC} \cdot \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, de unde $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{c^2}{b^2}$. Pe de altă parte, $BN = p - b$ şi $CN = p - c$, deci

$$\frac{p-b}{p-c} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow b^2\,(a+c-b) = c^2\,(a+b-c) \Leftrightarrow$$
$$a\left(b^2 - c^2\right) + bc\,(b-c) - \left(b^3 - c^3\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(b-c)\left[a\,(a+b) + bc - \left(b^2 + bc + c^2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow (b-c)\left[a\,(b+c) - \left(b^2 + c^2\right)\right] = 0.$$

Cum $m(\widehat{A}) \geq 90°$, atunci $b^2 + c^2 < a^2$, iar $a^2 < a\,(b+c)$, prin urmare paranteza pătrată este strict pozitivă. Rămâne că $b - c = 0$, deci $\triangle ABC$ este isoscel.

G94. *Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 105°$, $m(\widehat{B}) = 30°$. Se consideră DE mediatoarea lui $[BC]$, $D \in BC$, $E \in AB$, $[CF$ bisectoarea lui $\widehat{BCE}$, $F \in AB$, iar $\{I\} = CF \cap DE$, $\{G\} = CE \cap AI$. Să se arate că $\triangle DFG$ este echilateral.*

Gabriel Mîrşanu, Iaşi



Soluţie. Evident că $m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{FCE}) = m(\widehat{ECA}) = 15°$. Apoi, $\triangle EBC$ este isoscel cu axa de simetrie ED şi $m(\widehat{B}) = 30°$, deci $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC}) = 60°$, de unde $m(\widehat{CEA}) = 60°$. Rezultă că $\triangle AEC \equiv \triangle IEC$ (U.L.U), prin urmare $EA = EI$ şi $AC = IC$. În $\triangle EAI$ isoscel, EG este bisectoare, deci va fi şi mediană: $AG = GI$. (1)

Aplicând teorema bisectoarei în $\triangle EBC$, cum $ED = \dfrac{1}{2}BE$ ($\triangle DEB$ dreptunghic, $m(\widehat{B}) = 30°$), obţinem:

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EC}{BC} = \frac{2\,ED}{2\,BD} = \frac{ED}{BD}.$$

Reciproca teoremei bisectoarei în $\triangle EDB$ arată că DF este bisectoare, deci $m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{FDB}) = 45°$. Cum $\widehat{BDF} \equiv \widehat{ACB}$, atunci $FD \parallel AC$. Punctul D este mijlocul lui $[BC]$, prin urmare DF va fi linie mijlocie în $\triangle BAC$: $DF = \dfrac{1}{2}AC$ (2) şi $AF = FB$ (3). În plus, $m(\widehat{BFD}) = m(\widehat{A}) = 105°$.Din (1) şi (3) rezultă că FG este linie mijlocie în $\triangle ABI$, deci $FG = \dfrac{1}{2}BI$ şi $m(\widehat{AFG}) = m(\widehat{ABI}) = 15°$. Punctul

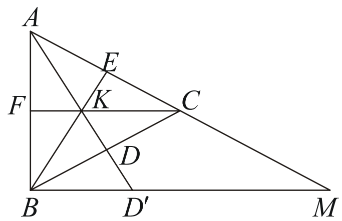
I se află pe mediatoarea lui $[BC]$, deci $BI = IC$ şi am arătat că $IC = AC$; rezultă că $FG = \dfrac{1}{2}AC$. Conform (2), urmează că $FG = FD$, adică $\triangle FGD$ este isoscel. În plus,

$$m(\widehat{DFG}) = 180^\circ - m(\widehat{BFD}) - m(\widehat{AFG}) = 180^\circ - 105^\circ - 15^\circ = 60^\circ,$$

deci $\triangle FGD$ este echilateral.

G95. *Fie $\triangle ABM$ dreptunghic în B. Fie C pe $[MA]$ astfel încât $MC = AB$. Să se arate că în $\triangle$ ABC, bisectoarea AD, mediana BE şi înălţimea CF sunt concurente.*

Dan Brânzei, Iaşi



Soluţiea 1 (a autorului). Fie $\{K\} = AD \cap CF$; vom arăta că punctele B, K, E sunt coliniare, de unde rezultă concluzia. Conform reciprocei teoremei lui Menelaus în $\triangle ADC$, coliniaritatea punctelor B, K, E revine la $\dfrac{KA}{KD} = \dfrac{BC}{BD}$ (1). Fie $\{D'\} = AD \cap BM$; atunci

$$\frac{KA}{KD} = \frac{KA}{KD'} \cdot \frac{KD'}{KD} = \frac{CA}{CM}\left(1 + \frac{DD'}{KD}\right) =$$

$$= \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{BD'}{KC}\right) = \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{BD'}{D'M} \cdot \frac{D'M}{KC}\right) =$$

$$= \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AM}{AC}\right) = \frac{AC}{AB}\left(1 + \frac{AB}{AC}\right) = \frac{AM}{AB}.$$

Pe de altă parte, $\dfrac{BC}{BD} = 1 + \dfrac{DC}{BD} = 1 + \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AM}{AB}$, ceea ce încheie justificarea egalităţii (1).

Soluţia 2 (dată de **Marius Tiba**, elev, Iaşi)**.** Notăm $\{T\} = EB \cap CF$, $\{U\} = EB \cap AD$. Cum $CF \parallel BM$, cu teorema lui Thales în $\triangle EBD$ obţinem că $\dfrac{ET}{TB} = \dfrac{EC}{CM}$. Din teorema bisectoarei în $\triangle AEB$ avem că $\dfrac{EU}{UB} = \dfrac{AE}{AB}$. Însă $EC = AE$, $CM = AB$ şi atunci $T = U$, de unde concluzia problemei.

A. Nivel liceal

L86. *Cercurile de centre I_a, I_b, I_c exînscrise $\triangle ABC$ sunt tangente laturilor $[BC]$, $[AC]$ respectiv $[AB]$ în D, E, F. Bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BI_aC}$ intersectează latura BC în M; fie $\{P\} = FE \cap AM$, iar $Q \in FD$, $S \in DE$ analog definite. Arătaţi că dreptele DP, EQ şi FS sunt concurente.*

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

Soluţie. Cu notaţiile uzuale, avem: $BD = AE = p - c$, $CD = AF = p - b$, $BF = CE = p - a$. Teorema bisectoarei şi teorema sinusurilor în $\triangle BI_aC$ dau $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{I_AB}{I_aC} = \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$. Aplicăm acum relaţia (R_1) din nota *Rapoarte determinate* *de o ceviană şi o secantă într-un triunghi* din *RecMat* 1/2005; obţinem:

$$\frac{AF}{AB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{AC}{AE}\cdot\frac{PE}{PF}=1\Leftrightarrow\frac{PE}{PF}=\frac{AB}{AF}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{AE}{AC}\Leftrightarrow$$

$$\frac{PE}{PF}=\frac{c}{p-b}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{p-c}{b}\Leftrightarrow\frac{PE}{PF}=\frac{c(p-c)}{b(p-b)}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}\Leftrightarrow\frac{PE}{PF}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.$$

Analog, $\dfrac{QF}{QD}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$, $\dfrac{SD}{SE}=\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$, prin urmare $\dfrac{PE}{PF}\cdot\dfrac{QF}{QD}\cdot\dfrac{SD}{SE}=1$ şi concluzia rezultă din reciproca teoremei lui Ceva.

Notă. Vlad Emanuel, elev, Sibiu, evaluează rapoartele necesare pentru aplicarea reciprocei teoremei lui Ceva prin considerente de arii.

L87. *Să se arate că un tetraedru cu muchiile în progresie geometrică şi în care perechile de muchii opuse sunt perpendiculare, este regulat.*

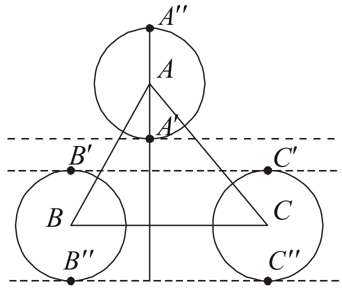
Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

Notă. Ulterior publicării în revista noastră, problema a apărut cu nr. O:1088 în G.M. 6/2005. Soluţia ei poate fi găsită în G.M. 12/2005, pp. 640.

Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L88. *Fie $\triangle ABC$ de arie S, perimetru $2p$, având razele cercurilor circumscris şi înscris R, respectiv r. Notăm $k=\dfrac{8+3\sqrt{3}}{12}p+\dfrac{3}{4}r$. Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ discuri de centru A, B, C şi aceeaşi rază $\delta<r$. Pentru punctele $D\in\mathcal{A}$, $E\in\mathcal{B}$, $F\in\mathcal{C}$, fie T aria $\triangle DEF$. Să se arate că, dacă $\varepsilon=k\delta$, atunci $|T-S|<\varepsilon$.*

Dan Brânzei, Iaşi



Soluţie. Înălţimea din A taie cercul frontieră a lui $\mathcal{A}$ în A', A'', iar paralelele la ea prin B, C taie celelalte două cercuri frontieră $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ în B', B'', C', C'', notate aşa încât $A'B''B'A''$ şi $A'C''C'A''$ să fie paralelograme. Înălţimea din D a $\triangle DEF$, notată h_D, satisface $h_A-2\delta\leq h_D\leq h_A+2\delta$. Avem şi că $a-2\delta\leq EF\leq a+2\delta$. Înmulţind aceste şiruri de inegalităţi între numere pozitive şi notând $L_a=a+h_A$, obţinem:

$$(h_A-2\delta)(a-2\delta)<2T<(h_A+2\delta)(a+2\delta)\Leftrightarrow$$
$$S-\delta L_a<T<S+\delta L_a\Leftrightarrow|S-T|<\delta L_a.$$

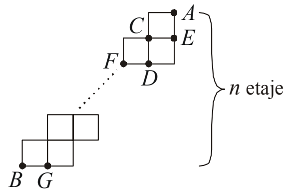
Rămâne de demonstrat că $L_a\leq K$; de fapt, ar trebui arătat că unul dintre numerele L_a, L_b sau L_c (L_b, L_c construindu-se analog cu L_a) poate fi ales $\leq K$. Avem:

$$L=L_a+L_b+L_c=a+b+c+h_A+h_B+h_C=2p++2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$
$$=2p+\frac{2S}{abc}(ab+bc+ac)=2p+\frac{p^2+r^2+4rR}{2R}=\left(2+\frac{p}{2R}\right)\cdot p+\left(2+\frac{r}{2R}\right)\cdot r.$$

Vom fi asiguraţi că putem face alegerea anunţată dacă arătăm că $L\leq 3K$, inegalitate la care se ajunge uşor folosind cunoscutele $2p\leq 3\sqrt{3}R$ ($\Leftrightarrow\dfrac{p}{2R}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$) şi

$R \geq 2r$ ($\Leftrightarrow \dfrac{r}{2R} \leq \dfrac{1}{4}$).

L89. *Câte drumuri de la A la B există, dacă din orice punct de pe traseu ne putem deplasa doar spre stânga sau în jos?*



Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

Soluţie. Notăm cu a_n numărul drumurilor de la A la B şi încercăm să găsim o relaţie de recurenţă pentru a_n. Notăm cu b_{n-1} numărul drumurilor de la E la B; numărul drumurilor de la C, F, respectiv D, până la B va fi a_{n-1}, a_{n-2}, respectiv b_{n-2}. De la A la C putem ajunge în două moduri, iar de la A la D putem ajunge într-un singur mod fără a trece prin C, prin urmare

$$a_n = 2a_{n-1} + b_{n-2}. \tag{1}$$

Cum din E putem pleca fie spre C, fie în jos, apoi stânga, spre D, atunci

$$b_{n-1} = 2a_{n-1} + b_{n-2}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$a_n = 2_{n-1} + b_{n-2} = 2a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-3} = \ldots = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + 1.$$

(Acel 1 din final reprezintă singurul drum posibil de la G la B.) Trecem $n \to n+1$ şi scădem egalităţile obţinute; găsim:

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}.$$

Se verifică uşor că $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, obţinând astfel o recurenţă liniară omogenă de ordin II pentru a_n. Mai mult, se demonstrează imediat prin inducţie că $a_n = F_{2n+1}$, unde F_k este al k-lea termen din şirul lui Fibonacci.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L90. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea $A = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ se poate partiţiona în trei submulţimi, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă n este multiplu de 3, $n \geq 6$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Pentru ca A să poată fi partiţionată în trei clase având aceeaşi sumă a elementelor, trebuie ca suma elementelor sale, care este $\dfrac{n(3n+1)}{2}$, să fie multiplu de 3, ceea ce conduce la $3 \mid n$. Pentru $n = 3$, evident că $A = \{4, 5, 6\}$ nu se poate partiţiona cum cere enunţul, deci $n \geq 6$.

Fie acum $n = 3k$, $k \geq 2$; dacă k este par, $k = 2p$, $p \geq 1$, atunci $A = \{6p+1, 6p+2, \ldots, 12p\}$. Scriem

$$A = \{6p+1, 12p\} \cup \{6p+2, 12p-1\} \cup \cdots \cup \{9p, 9p+1\},$$

numărul de submulţimi fiind $3p$, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor. Clasele partiţiei se obţin reunind p dintre aceste submulţimi (prima clasă), apoi alte p şi la urmă cele p care au rămas.

Pentru k impar, $k = 2m+1$, $m \geq 1$, avem de partiţionat mulţimea $A = \{6m+4, 6m+5, \ldots, 12m+6\}$. Remarcăm că suma tuturor elementelor lui A este $3(2m+1)\cdot$ $\cdot(9m+5)$, iar suma elemntelor lui A care dau restul 2 la împărţirea cu 3 este

$$(6m+5) + (6m+8) + \cdots + (12m+5) = (2m+1)(9m+5),$$

prin urmare o clasă a partiţiei poate fi construită din numerele care dau restul 2 împărţirea cu 3; fie P această mulţime. Mai notăm cu M mulţimea elementelor lui A ce dau restul 1 la împărţirea cu 3 şi cu N mulţimea elementelor lui A ce sunt multipli de 3. Suma elementelor lui M este $(2m+1)(9m+5)-(2m+1)$, iar suma elementelor lui N este $(2m+1)(9m+5)+(2m+1)$; vom încerca să schimbăm între ele elemente din N cu elemente din M astfel încât să egalizăm sumele. Întâi, efectuăm schimbarea $12m+1 \leftrightarrow 12m+6$, care creşte suma elementelor lui M cu 5. Apoi, efectuăm $m-2$ schimbări, fiecare mărind suma elementelor lui M cu 2 (şi micşorând corespunzător suma elementelor lui N):

$$12m-2 \leftrightarrow 12m;\ 12m-5 \leftrightarrow 12m-3;\ \ldots\ ;\ 9m+7 \leftrightarrow 9m+9.$$

Cu aceasta, soluţia problemei este încheiată.

Notă. O frumoasă soluţie prin inducţie matematică s-a primit de la **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L91. *Punctele planului se colorează în 3 culori astfel încât fiecare culoare să fie folosită cel puţin o dată. Spunem despre un triunghi că este* aproape echilateral *dacă măsurile unghiurilor sale sunt cel mult* $60,001°$. *Arătaţi că există un triunghi aproape echilateral cu vârfurile de culori diferite.*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Să numim albastru, roşu şi verde cele 3 culori. Vom scrie $M(a)$, $M(r)$ sau $M(v)$ după cum este punctul M albastru, roşu sau verde. Fie $A(a)$, $B(r)$ şi $C(v)$ şi $\mathcal{D}_1$ un disc de centru O_1 şi rază $r>0$ astfel încât $A,B,C\in\mathcal{D}_1$. Fie $d>1000000r$. Fie $\mathcal{D}$ discul de centru O_1 şi rază $d+r$.

Să luăm mai întâi cazul când mulţimea de puncte $\bar{\mathcal{D}}$ nu este monocromatică, unde am notat cu $\bar{T}$ complementara mulţimii T (faţă de plan). Fie $P,Q\in\bar{\mathcal{D}}$ de culori diferite. Este clar că există o înşiruire finită de puncte $P=M_0,M_1,\ldots,M_n=Q$ astfel încât $[M_iM_{i+1}]\subset\bar{\mathcal{D}}$ şi $|M_iM_{i+1}|\le 2r$, $i=\overline{0,n-1}$. Cum M_0 şi M_n au culori diferite, rezultă că există $i\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ astfel încât M_i şi M_{i+1} au culori diferite. În concluzie, există $T,S\in\bar{\mathcal{D}}$ cu culori diferite, să zicem $T(a)$, $S(r)$ astfel încât $[TS]\subset\bar{\mathcal{D}}$ şi $|TS|\le 2r$. Fie $\mathcal{D}_2$ discul de rază r şi centru O_2, unde O_2 este mijlocul lui $[TS]$. Este clar că $T,S\in\mathcal{D}_2$ şi că $|O_1O_2|\ge d$. Fie un punct O_3 astfel încât triunghiul $O_1O_2O_3$ să fie echilateral. Să demonstrăm acum următoarea

Lemă. *Fie O_1, O_2 şi O_3 vârfurile unui triunghi echilateral de latură $l\ge 1000000r$ şi $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ şi $\mathcal{D}_3$, 3 discuri de rază r şi centre O_1, O_2, respectiv O_3. Dacă $X\in\mathcal{D}_1$, $Y\in\mathcal{D}_2$ şi $Z\in\mathcal{D}_3$, atunci măsurile unghiurilor $\triangle XYZ$ sunt cel mult* $60,001°$.

Demonstraţie. Avem $XY\le XO_1+O_1O_2+O_2Y\le l+2r$ şi $O_2O_3\le O_2Y+YZ+ZO_3\le YZ+2r$, sau $YZ\ge l-2r$. Atunci

$$\frac{XY}{YZ}\le\frac{l+2r}{l-2r}\le\frac{1000002}{999998}<1,00001\Rightarrow\frac{\sin Z}{\sin X}<1,00001.$$

Relaţiile analoage se demonstrează într-o manieră asemănătoare etc.

Să revenim la problemă. Fie $\mathcal{D}_3$ discul de centru O_3 şi rază r. Fie $W\in\mathcal{D}_3$, oarecare. Dacă W este albastru, conform lemei, triunghiul CSW este aproape echilateral. Dacă W este roşu, triunghiul CTW este aproape echilateral. În fine, dacă W este verde, triunghiul ASW este aproape echilateral şi demonstraţia pentru primul caz se încheie.

Să luăm acum cazul când mulţimea de puncte $\bar{\mathcal{D}}$ este monocromatică, să zicem că toate punctele ei sunt albastre. Fie $L = \{|RV| : R(r), V(v) \in \mathbb{R}^2\}$. Din presupunerea că toate punctele din exteriorul discului $\bar{\mathcal{D}}$ sunt albastre, rezultă că mulţimea L este mărginită. Atunci există $l \in L$ astfel încât $1{,}000001l > l'$ pentru orice $l' \in L$. Fie punctele $R_1\,(r)$, $V_1\,(v)$ astfel încât $|R_1V_1| = l$. Fie punctul Q astfel încât $QR_1 = QV_1 = 1{,}000001l$. Dacă Q este roşu, $OV_1 = 1{,}000001l$ contrazice alegerea lui l. Analog, Q verde ne conduce la o contradicţie. Rezultă că Q este albastru. Se verifică imediat că triunghiul QR_1V_1 este aproape echilateral şi problema este rezolvată.

L92. *Dacă $a_i \in (1, \infty)$, $\forall i = \overline{1,n}$, $n \geq 3$, iar $m, p \in N$ cu $m > p \geq 1$, să se demonstreze inegalitatea*

$$\log_{a_1} \frac{a_2^m + \cdots + a_n^m}{a_2^{m-p} + \cdots + a_n^{m-p}} + \log_{a_2} \frac{a_1^m + a_3^m \cdots + a_n^m}{a_1^{m-p} + a_3^{m-p} \cdots + a_n^{m-p}} + \cdots +$$
$$+ \log_{a_n} \frac{a_1^m + \cdots + a_{n-1}^m}{a_1^{m-p} + \cdots + a_{n-1}^{m-p}} \geq np.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

Soluţie. Considerăm o ordonare a numerelor $a_i \in (1, \infty)$; putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Atunci $a_1^p \geq a_2^p \geq \cdots \geq a_n^p$ şi $a_1^{m-p} \geq a_2^{m-p} \geq \cdots \geq a_n^{m-p}$, $\forall m > p \geq 1$. Aplicăm inegalitatea lui Cebâşev şi inegalitatea mediilor:

$$\frac{a_2^m + a_3^m + \cdots + a_n^m}{n-1} = \frac{a_2^{m-p}a_2^p + a_3^{m-p}a_3^p + \cdots + a_n^{m-p}a_n^p}{n-1} \geq$$
$$\geq \frac{a_2^{m-p} + a_3^{m-p} + \cdots + a_n^{m-p}}{n-1} \cdot \frac{a_2^p + a_3^p + \cdots + a_n^p}{n-1} \geq$$
$$\geq \frac{a_2^{m-p} + a_3^{m-p} + \cdots + a_n^{m-p}}{n-1} \cdot \sqrt[n-1]{a_2^p a_3^p \cdots a_n^p} \Rightarrow$$
$$\frac{a_2^m + a_3^m + \cdots + a_n^m}{a_2^{n-p} + a_3^{m-p} + \cdots + a_n^{m-p}} \geq \sqrt[n-1]{(a_2 a_3 \cdots a_n)^p}.$$

Dacă notăm cu S membrul stâng al inegalităţii din enunţ, folosind această inegalitate şi analoagele obţinem:

$$S \geq \frac{p}{n-1} \left[\log_{a_1}(a_2a_3 \cdots a_n) + \log_{a_2}(a_1a_3 \cdots a_n) + \log_{a_n}(a_1a_2 \cdots a_{n-1})\right] \Leftrightarrow$$
$$S \geq \frac{p}{n-1} \sum_{i \neq j} \left(\log_{a_i} a_j + \log_{a_j} a_i\right).$$

Cum $\log_{a_i} a_j > 0$, atunci $\log_{a_i} a_j + \log_{a_j} a_i \geq 2$. Numărul grupelor de forma $(\log_{a_i} a_j + \log_{a_j} a_i)$ este $\dfrac{n(n-1)}{2}$ şi concluzia problemei urmează imediat.

Notă. Pentru $n = 3$, $m = 4$, $p = 3$, obţinem problema 22814 din G.M. 5-6/1993. Pentru $n = 3$, $m = 2$, $p = 1$ obţinem problema C:1605 din G.M. 11/1994.

Principial aceeaşi soluţie a dat **Vlad Emanuel**, elev, Sibiu.

L93. *Există vreun polinom $f\,(X, Y)$ în două nedeterminate astfel încât*

$$\{f\,(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^* = \left\{x_k^{2004} \mid k \geq 1\right\},$$

unde $x_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}$ *?*

Gabriel Dospinescu, Paris

Soluţie. Răspunsul este afirmativ! De exemplu, putem considera $f(X,Y) = X^{2004}(2-(X^2-2Y^2)^2)$ şi atunci, pentru $m,n \in \mathbb{Z}$,

$$f(m,n) > 0 \Leftrightarrow 2 > (m^2-2n^2)^2 \Leftrightarrow |m^2-2n^2| = 1.$$

Obţinem astfel două ecuaţii Pell; rezolvându-le, obţinem că, de fapt,

$$\{m^{2004} \mid \text{există } n \text{ a.î. } |m^2-2n^2| = 1\} = \{x_k^{2004} \mid k \geq 1\},$$

ceea ce arată că $\{f(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^* = \{x_k^{2004} \mid k \geq 1\}$.

L94. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *o matrice cu coeficienţi întregi, inversabilă şi astfel încât mulţimea* $\left\{A^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ *este finită. Să se demonstreze că această mulţime are cel mult* 3^{n^2} *elemente. Rămâne rezultatul adevărat dacă suprimăm condiţia ca elementele matricei să fie întregi?*

Gabriel Dospinescu, Paris

Soluţie. Din ipoteză rezultă că există $p \geq 1$ astfel încât $A^p = I_n$. Să luăm p cel mai mic cu această proprietate şi să observăm că dacă $p \leq 3^{n^2}$ atunci am terminat prima parte a problemei. Să presupunem deci contrariul şi să considerăm matricele din mulţimea $H = \{I, A, \ldots, A^{p-1}\}$. Ele sunt în mod evident diferite oricare două şi, mai mult, fiecare element al lui H are proprietatea că $X^p = I_n$. Să observăm că din faptul că H are cel puţin $3^{n^2}+1$ elemente, există două elemente în H a căror diferenţă este o matrice cu toate elementele multipli de 3 (principiul lui Dirichlet, observând că există 3^{n^2} matrice cu elemente 0, 1 sau 2). Deci există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ şi $1 \leq i < j \leq p-1$ astfel încât $A^j - A^i = 3B$. Avem atunci $A^{j-1} - I_n = 3BA^{p-1}$. Notând $s = j-i$, $X = BA^{p-1}$ avem $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ şi $(I_n+3X)^p = I_n$. Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valorile proprii ale lui X. Avem $(1+3\lambda_i)^p = 1$ de unde $|\lambda_i| \leq \dfrac{2}{3}$; atunci $|\operatorname{tr} X^m| = \left|\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^m\right| \leq n\left(\dfrac{2}{3}\right)^m < 1$ de la un rang m_0. Ţinând cont că $\operatorname{tr} X^m$ este întreg, obţinem că de la acel rang el este 0 şi deci $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i^m = 0$ de la acel rang. Din formulele lui Newton rezultă imediat că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Pe de altă parte, din $(I_n+3X)^p = I_n$ obţinem $X\left(3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}\right) = O_n$. Din faptul că $\lambda_i = 0$ rezultă că $\det\left(3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}\right) = (3p)^n \neq 0$, deci matricea $3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}$ este inversabilă şi cum $X\left(3pI_n + \binom{p}{2}3^2X + \cdots + 3^pX^{p-1}\right) = O_n$, avem în mod necesar $X = O_n$, adică $A^{j-1} = I_n$, contradicţie cu minimalitatea lui p. Am justificat astfel prima parte a problemei.

Pentru a doua parte, mai mult o glumă, raspunsul este evident nu. Este suficient să luăm o matrice diagonală ce are ca elemente pe diagonală o rădăcină primitivă de ordinul $3^{n^2}+2$ a unităţii.

L95. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodică, mărginită şi astfel încât există* $x_0 \in \mathbb{R}$ *pentru care* $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ *există, sunt finite şi distincte. Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *pentru care nu există* $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x (f(t)+a)\,dt$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $T \in \mathbb{R}_+^*$ o perioadă a lui f şi notăm $F(x) = \int\limits_0^x (f(t) + a)dt$; atunci

$$F\left(x + (n+1)\,T\right) - F\left(x + nT\right) = \int_{x+nT}^{x+(n+1)T} \left(f\left(t\right) + a\right) dt = \int_0^T f\left(t\right) dt + aT \Rightarrow$$

$$F\left(x + nT\right) = F\left(x\right) + n\left(\int_0^T f\left(t\right) dt + aT\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, T).$$

Cum f este mărginită, rezultă că F este mărginită pe $[0, T]$, iar dacă $\int\limits_0^T f(t)dt + aT \neq 0$, rezultă imediat că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = (+\infty)\,\mathrm{sgn}\left(\int\limits_0^T f\left(x\right) dt + aT\right)$.

Fie acum $a = -\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(t\right) dt$; atunci

$$F(x+T) = \int_0^{x+T} \left(f\left(t\right) + a\right) dt = F\left(x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

deci F este periodică de perioaă T. Presupunem prin absurd că F este constantă. Atunci $F(x_1) = F(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, deci $\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f\left(t\right) + a\right) dt = 0$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon > 0$ fixat, putem găsi $\delta > 0$ astfel ca

$$\left(l_s - \varepsilon + a\right)\left(x_2 - x_1\right) \leq \int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(t\right) + a\right) dt \leq \left(l_s + \varepsilon + a\right)\left(x_2 - x_1\right)$$

pentru $x_0 - \delta \leq x_1 < x_2 < x_0$, deci $l_s - \varepsilon + a \leq 0 \leq l_s + \varepsilon + a$. Cum ε era arbitrar, obţinem că $l_s(x_0) + a = 0$. Analog, $l_d(x_0) + a = 0$, deci $l_s(x_0) = l_d(x_0) = -a$, contradicţie cu ipoteza. Rămâne că F este periodică şi neconstantă şi deci nu are limită la $+\infty$ în cazul în care $\int\limits_0^T f\left(t\right) dt + aT = 0$.

Recreaţii ... matematice

Rezolvarea aritmogrifului de la pag. 129.

	S	V								**ARITMOGRIF**									M	F	
	C	I	R															K	I	R	
	H	E	I	F		P									H		A	L	H	E	
	U	T	C	E	H	F	S	M	W			G	S	F	A	I	R	E	O	G	
A	R	E	C	R	E	A	T	I	I	*	M	A	T	E	M	A	T	I	C	E	B
			I	R	S	F	O	R	L			U	U	I	E	C	I	N			
				O	S	F	L	O	E			S	R	G	L	O	N				
					E		Z	N	S			S	M	L		B					