PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2004

Clasele primare

P.74. *Descoperă regula de formare, apoi completează şirurile următoare:*
a) 1,2,3; 2,3,5; 3,□,□; 5,□,□.
b) 11,10,12; 13,12,14; 15,□,□; 17,□,□.
c) 2,6,4; 3,7,5; 4,8,6; 5,□,□; 6,□,□.
(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

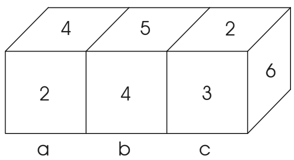
Soluţie. *a*) Numerele din şir se obţin astfel: 1, 2, 1+2; 2, 3, 2+3; 3, 5, 3+5; etc. Şirul se completează cu numerele: 5, 8, 8, 13.
b) Fiecare grupă se obţine din precedenta prin mărirea fiecărui număr cu 2.
c) Fiecare grupă se obţine din precedenta prin mărirea fiecărui număr cu 1.

P.75. *Răspundeţi la următoarele întrebări:*
a) *De câte suprafeţe este mărginit cubul?*
b) *Ce formă au feţele cuboidului?*
c) *Ce formă are un obiect care se aseamănă cu sfera?*
(*Clasa I*) **Aliona Loghin, elevă, Iaşi**

Soluţie. *a*) şase suprafeţe; *b*) dreptunghiuri; *c*) formă rotundă.

P.76. *Completaţi casetele din expresia* 6□5□4□3□2□1 *cu semnele grafice "+" sau "−" pentru a obţine cel mai mic rezultat posibil.*
(*Clasa a II-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

Soluţie. Nu putem obţine rezultatul zero, deoarece $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ este număr nepereche. Putem obţine rezultatul 1 astfel: $6 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 1$.



P.77. *Un corp este format din trei cuburi a, b, c ca în figura alăturată. Fiecare cub are feţele numerotate de la* 1 *la* 6*, iar suma numerelor de pe oricare două feţe opuse ale sale este* 7*. Ştiind că pe feţele lipite ale cuburilor a şi b este scris acelaşi număr şi că aceeaşi proprietate o au şi cuburile b şi c, să se afle suma tuturor numerelor scrise pe feţele corpului care nu se văd.*
(*Clasa a II-a*) **Oxana Pascal, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cuburile *b* şi *c* sunt lipite pe faţa numerotată cu 1, iar cuburile *a* şi *b* sunt lipite pe faţa numerotată cu 6. Suma numerelor de pe cele 6 feţe ale unui cub este $1+2+3+4+5+6 = 21$, iar suma numerelor de pe toate feţele celor trei cuburi este $21 + 21 + 21 = 63$. Suma căutată este

$$63 - (6 + 6) - (1 + 1) - (2 + 4) - (4 + 5) - (2 + 3) - 6 = 23.$$

Soluţia redacţiei. Suma căutată este

$$1 + (7 - 2) + (7 - 4) + (7 - 5) + (7 - 4) + (7 - 2) + (7 - 3) = 23.$$

P.78. *a*) *Verifică egalităţile:* $1+3+5+7 = 4\times 4$, $1+3+5+7+9+11 = 6\times 6$*;*
b) *Scrie rezultatul la fel ca la punctul a*) *pentru* $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 19$.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu, studentă, Iaşi**

Soluţie. a) $1+3+5+7 = 4+12 = 16 = 4\times4$; $1+3+5+7+9+11 = 4+12+20 = 16+20 = 36 = 6\times6$; b) Observăm la a) că $7 = 2\times4-1$, $11 = 2\times6-1$. Suma de la b) fiind de acelaşi tip şi $19 = 2\times10-1$, avem $1+3+5+7+\cdots+19 = 10\times10$.

P.79. *7 elevi mănâncă 7 îngheţate în 6 minute. Câţi elevi vor mânca 24 îngheţate în 36 minute?*
(*Clasa a III-a*) **Alexandru Tudorache, elev, Iaşi**

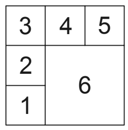
Soluţie. Deducem că un elev mănâncă o îngheţată în 6 minute. În 36 minute un elev mănâncă 6 îngheţate. 24 îngheţate pot fi mâncate în 36 minute de $24:6=4$ elevi.

P.80. *Două oraşe sunt legate printr-o linie de cale ferată. La fiecare oră pleacă un tren din fiecare oraş către celălalt. Toate trenurile merg cu aceeaşi viteză şi fiecare călătorie de la un oraş la altul durează 6 ore. De câte ori fiecare tren, care parcurge distanţa dintre oraşe, se întâlneşte cu trenuri care merg în sens opus?*
(*Clasa a IV-a*) **Alexandru Tudorache, elev, Iaşi**

Soluţie. Luăm un tren care pleacă din localitatea A spre localitatea B. Acesta întâlneşte un tren chiar în A (un tren care a plecat din B cu 6 ore înainte). Ultimul tren pe care îl întâlneşte este cel care va pleca din B în momentul sosirii sale. Între cele două momente s-au scurs 12 ore, timp în care au plecat 13 trenuri din B şi care întâlnesc trenul pe care l-am urmărit.

P.81. *Să se arate că din feţele unui cub confecţionat din carton putem construi, fără resturi, feţele a şase cuburi.*
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Descompunem în pătrate fiecare faţă a cubului astfel. Avem $6\times5=30$ pătrate din care putem confecţiona $30:6=5$ cuburi mici. Cu cele şase pătrate mari confecţionăm al şaselea cub.



P.82. *Să se afle cel mai mare număr natural de forma $\overline{abcd}$ cu proprietăţile: $a\neq d$, $b+c=5\,(a+d)$.*
(*Clasa a IV-a*) **Adrian Andronic, elev, Iaşi**

Soluţie. Din $b+c=5\,(a+d)$ rezultă că $b+c$ se împarte la 5. Cum b, c sunt cifre înseamnă că $b+c\leq18$. Avem $b+c=15$ şi $a+d=3$. Luăm $a=3$, $b=9$, $c=6$, $d=0$.

P.83. *Mircea împreună cu fratele său au un număr de bomboane mai mic decât* 30. *Mircea are de 3 ori mai multe decât fratele său. Aflaţi câte bomboane trebuie să îi dea Mircea fratelui său pentru a rămâne cu un număr de două ori mai mare decât al fratelui. Câte bomboane avea Mircea la început şi cu câte a rămas?*
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Tudor Tudorache, Craiova**

Soluţie. După ce Mircea îi dă un număr de bomboane fratelui său, avem figurarea:

Mircea: |———|———|—|—|
fratele: |———|—|

Înseamnă că figurarea iniţială este:

Mircea: |———|———|—|—|—|
fratele: |———|

Deoarece Mircea avea de trei ori mai multe bomboane, înseamnă că trei segmente mici reprezintă tot atâtea bomboane cât un segment mare. Obţinem că numărul total de bomboane trebuie să se împartă la 4 şi la 3. Putem avea 12 sau 24 bomboane.

În primul caz Mircea îi dă fratelui $3 : 3 = 1$ bomboane, iar în al doilea caz îi dă $6 : 3 = 2$ bomboane. În primul caz Mircea avea 9 bomboane şi a rămas cu 8 bomboane, iar în al doilea caz Mircea avea 18 bomboane şi a rămas cu 16 bomboane.

Clasa a V-a

V.51. *Între oricare două numere naturale definim operaţia* $a * b = a^b + a$.

a) Să se rezolve ecuaţia $2 * (x + 1) = 34$.

b) Este operaţia dată comutativă?

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

Soluţie. *a*) Ecuaţia de rezolvat este $2^{x+1} + 2 = 34$, cu soluţia $x = 4$.

b) Răspunsul este negativ: $1 * 2 = 1^2 + 1 = 2$, dar $2 * 1 = 2^1 + 2 = 4$.

V.52. *Un dreptunghi se poate descompune în 1344 pătrate de arie 25* cm^2. *Aflaţi perimetrul dreptunghiului dacă acesta este: a) maxim posibil; b) minim posibil.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Observăm că $1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$, iar latura fiecărui pătrat este 5 cm. Împărţind lăţimea dreptunghiului în n segmente de lungime 5 cm, iar lungimea în m astfel de segmente, obţinem că $n \cdot m = 1344$, iar perimetrul dreptunghiului este $P = 10\,(n + m)$. Avem $P_{\max} = 13450$ (pentru $n = 1$, $m = 1344$) şi $P_{\min} = 740$ (pentru $n = 32$, $m = 42$, care sunt cei mai "apropiaţi" divizori ai lui 1344).

V.53. *Determinaţi* $n \in \mathbb{N}$ *pentru care*

$$\frac{\frac{3}{2} - \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right)}{\frac{5}{4} - \left(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{2 + 6 + \cdots + 98}{1 + 3 + \cdots + 17}.$$

Viorel Cornea, Hunedoara

Soluţie. Dacă $S = 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^n}$, atunci $S \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^{n+1}}$, deci $S\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{1}{a^{n+1}} - 1$, de unde $S = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{a^{n+1} - 1}{a^{n+1}}$. În aceste condiţii, ecuaţia dată se scrie succesiv

$$\frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1}}\right)}{\frac{5}{4}\left(1 - \frac{5^{n+1} - 1}{5^{n+1}}\right)} = \frac{2 \cdot 5^4}{3^4} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 \Leftrightarrow n = 4.$$

V.54. *Să se arate că nu există numere raţionale pozitive a, b, c astfel încât* $\frac{a+b}{ab} = 2^{2003}$, $\frac{b+c}{bc} = 2^{2004}$ *şi* $\frac{c+a}{ca} = 2^{2005}$.

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iaşi

Soluţie. Relaţiile date se scriu: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2^{2003}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2^{2004}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 2^{2005}$, de unde, prin adunare, obţinem că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(2^{2003} + 2^{2004} + 2^{2005}\right) : 2 = 7 \cdot 2^{2002}$.

Însă $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=2^{2005}=8\cdot 2^{2002}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, absurd.

V.55. *Fie numărul raţional* $N=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{2004}{a_{2004}}$, *unde* $a_i\in\mathbb{N}^*$, $i=\overline{1,2004}$. *Să se arate că există* $a_1,a_2,\ldots,a_{2004}$ *astfel încât* $N=\dfrac{1}{2005}$. *Generalizare.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Considerând $a_1=2004\cdot 2005$, $a_2=2004\cdot 2005\cdot 2$, $\ldots$, $a_{2004}=2004\cdot 2005\cdot 2004$, vom obţine că

$$N=\frac{1}{2005}\left(\frac{1}{2004}+\frac{1}{2004}+\cdots+\frac{1}{2004}\right)=\frac{1}{2005}\cdot\frac{2004}{2004}=\frac{1}{2005}.$$

Generalizarea este imediată: Fie $N=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$, unde $a_i\in\mathbb{N}^*$, $i=\overline{1,n}$; atunci oricare ar fi $k\geq n$, $k\in\mathbb{N}$, există a_1, a_2, $\ldots$, a_n astfel încât $N=\dfrac{1}{k}$.

Clasa a VI-a

VI.51. *Pentru efectuarea unei lucrări, trei muncitori au fost retribuiţi cu sume de bani direct proporţionale cu numerele* 16, 14, 17. *Unul dintre muncitori constată că dacă sumele primite ar fi fost invers proporţionale cu numerele* 3, 4, 5, *el ar fi primit mai puţin cu* 1 000 000 *lei. Aflaţi ce sumă de bani a primit fiecare muncitor.*

Ion Vişan, Craiova

Soluţie. Fie S suma totală, a, b, c sumele primite de cei trei muncitori în prima situaţie, iar a', b', c' sumele primite în al doilea caz. Avem:

$$\frac{a}{16}=\frac{b}{14}=\frac{c}{17}=\frac{S}{47}\Rightarrow a=\frac{16S}{47},\ b=\frac{14S}{47},\ c=\frac{17S}{47};$$
$$\frac{a'}{1/3}=\frac{b'}{1/4}=\frac{c'}{1/5}=\frac{S}{47/60}\Rightarrow a'=\frac{20S}{47},\ b'=\frac{15S}{47},\ c'=\frac{12S}{47}.$$

Singurul muncitor care primeşte a doua oară o sumă mai mică este al treilea, deci $\dfrac{17S}{47}=\dfrac{12S}{47}+1\,000\,000$, adică $S=9\,400\,000$ lei, de unde $a=3\,200\,000$ lei, $b=2\,800\,000$ lei, $c=3\,400\,000$ lei.

VI.52. *Determinaţi numerele întregi n care pot fi scrise sub forma* $n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$, *cu* a, b, $c\in\mathbb{Z}^*$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Deoarece $\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\right|\leq\dfrac{1}{|a|}+\dfrac{2}{|b|}+\dfrac{3}{|c|}\leq 1+2+3=6$, înseamnă că $n\in\{-6,-5,\ldots,6\}$. Însă $0=\dfrac{1}{-1}+\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{-3}$; $1=\dfrac{1}{-1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{3}$; $2=\dfrac{1}{-1}+\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{3}$; $3=\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{3}$; $4=\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{3}$; $5=\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{1}$; $6=\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{1}$, iar $-n=\dfrac{1}{-a}+\dfrac{2}{-b}+\dfrac{3}{-c}$, unde $n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$, $n\in\{1,2,\ldots,6\}$. Rezultă că numerele căutate sunt toate elementele mulţimii $\{-6,-5,\ldots,5,6\}$.

VI.53. *Se dă unghiul ascuţit* $\widehat{xOy}$ *şi punctele* $A,B\in(Ox$, $C,D\in(Oy$ *astfel încât* $A\in(OB)$, $C\in(OD)$, $AB\neq CD$ *şi* $t\cdot OA+s\cdot AB=t\cdot OC+s\cdot CD$, *cu*

$s, t \in \mathbb{R}^*$. *Atunci mediatoarele segmentelor* $[AB]$ *şi* $[CD]$ *şi bisectoarea lui* $\widehat{xOy}$ *sunt trei drepte concurente dacă şi numai dacă* $t = 2s$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Relaţia din ipoteză se scrie sub forma $OA - OC = \dfrac{s}{t}(CD - AB)$. Fie M, N mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CD]$, iar P intersecţia mediatoarelor lui $[AB]$ şi $[CD]$. Avem succesiv: $(OP$ bisectoare pentru $\widehat{xOy} \Leftrightarrow$

$$PM = PN \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow OA + \frac{AB}{2} = OC + \frac{CD}{2} \Leftrightarrow$$
$$OA - OC = \frac{1}{2}(CD - AB) \Leftrightarrow \frac{s}{t}(CD - AB) = \frac{1}{2}(CD - AB) \Leftrightarrow t = 2s.$$

VI.54. *Fie* $\triangle ABC$ *isoscel* $(AB = AC)$, N *mijlocul lui* $[AC]$, *iar* D *un punct pe prelungirea lui* $[BC]$ *astfel încât* $CD < BC$. *Să se arate că între triunghiurile* ABN *şi* NCD *nu există nici o congruenţă.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Mediana $[BN]$ împarte $\triangle ABC$ în două triunghiuri echivalente, deci $S_{ABN} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$. Pe de altă parte,

$$S_{NCD} = \frac{1}{2}CD \cdot d(N, CD) < \frac{1}{2}BC\frac{1}{2}d(A, BC) = \frac{1}{2}S_{ABC},$$

prin urmare $\triangle ABN$ şi $\triangle NCD$ au arii diferite, de unde concluzia.

VI.55. *Fie punctele* O, A_1, A_2, A_3, $\dots$ *astfel încât* $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \cdots = 1$ *cm, iar* $m(\widehat{A_1OA_2}) = 1^\circ$, $m(\widehat{A_2OA_3}) = 2^\circ$, $m(\widehat{A_3OA_4}) = 3^\circ$ *etc. (toate unghiurile se consideră în sens orar). Să se arate că există* $k \neq l$ *astfel încât* $A_k = A_l$.

Cristian Lazăr, Iaşi

Soluţie. Evident că $m(\widehat{A_1OA_k}) = \dfrac{k(k-1)}{2}$; problema cere să arătăm că există k, l (putem presupune $k > l$) astfel încât $\dfrac{k(k-1)}{2} - \dfrac{l(l-1)}{2} = M_{360}$, adică, după calcule, $(k - l)(k + l - 1) = 720m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$. Să observăm că nu trebuie determinate toate soluţiile acestei ecuaţii, ci demonstrată numai existenţa unei soluţii. Deoarece $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, pentru $m = 2$ putem încerca să găsim k, l cu $k - l = 32$, $k + l - 1 = 45$; obţinem soluţia $k = 39$, $l = 7$.

Clasa a VII-a

VII.51. *Fie* $a, b \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $n^{2004} - a$ *se divide cu* $n - b$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq b$. *Să se arate că* $a = b^{2004}$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Soluţie. Evident că $n^{2004} - b^{2004} \vdots\, n - b$, şi atunci $(n^{2004} - b^{2004}) - (n^{2004} - a) \vdots\, n - b$, adică $a - b^{2004}$ admite o infinitate de divizori întregi. Acest fapt se realizează dacă şi numai dacă $a - b^{2004} = 0$, i.e. $a = b^{2004}$.

VII.52. *Fie* a, b, $c \in \mathbb{R}$ *cu* $a + b + c = 0$; *să se arate că*

$$\left(a^3 - b^3\right)^3 + \left(b^3 - c^3\right)^3 + \left(c^3 - a^3\right)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ac\right)\left(c^2 - ab\right).$$

Anca Tuţescu, elevă, Craiova

Soluţie. Se ştie că, dacă $x+y+z=0$, atunci $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Considerăm $x=a^3-b^3$, $y=b^3-c^3$, $z=c^3-a^3$ numere cu suma nulă şi avem succesiv

$$\begin{aligned}\left(a^3-b^3\right)^3+\left(b^3-c^3\right)^3+\left(c^3-a^3\right)^3&=3\left(a^3-b^3\right)\left(b^3-c^3\right)\left(c^3-a^3\right)=\\&=3(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)=\\&=3(a-b)(b-c)(c-a)\left[(a+b)^2-ab\right]\left[(b+c)^2-bc\right]\left[(c+a)^2-ca\right]=\\&=3(a-b)(b-c)(c-a)\left(c^2-ab\right)\left(a^2-bc\right)\left(b^2-ca\right),\end{aligned}$$

deoarece $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$.

VII.53. *Determinaţi m, n, $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât soluţia inecuaţiei $|mx-1|\le n$ să fie $[p,p+m+1]$.*

Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. Pentru $m=0$, inecuaţia $1\le n$ admite ca soluţie $\mathbb{R}$ sau $\emptyset$, neconvenabil. Pentru $m\ge 1$, soluţia inecuaţiei este $\left[\dfrac{1-n}{m},\dfrac{1+n}{m}\right]$; impunem condiţiile $\dfrac{1-n}{m}=p$, $\dfrac{1+n}{m}=p+m+1$ şi obţinem că $\dfrac{2}{m}=2p+m+1\in\mathbb{Z}$, adică $m\in\{1,2\}$. Pentru $m=1$ găsim $p=0$, $n=1$, iar pentru $m=2$ găsim $p=-1$, $n=3$.

Deoarece $p\le p+m+1$, trebuie ca $m\ge -1$. Prin urmare, rămâne de studiat cazul $m=-1$, atunci când vom găsi $p=-1$, $n=0$.

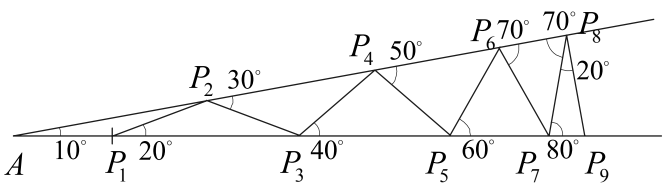
VII.54. *Se consideră unghiul $\widehat{xOy}$ de măsură 10° şi un segment $[MN]$ de lungime a. Să se construiască, folosind numai rigla şi compasul, un triunghi dreptunghic OAB, $A\in(Ox$, $B\in(Oy$, având cateta opusă unghiului de 10° de lungime a.*

Florin Asăvoaie, elev, Iaşi

Soluţia 1. Alegem un punct $P\in[Ox$, în care ridicăm perpendiculara pe Ox (construcţia acestei perpendiculare se poate realiza numai cu rigla şi compasul). Pe această dreaptă, de aceeaşi parte a lui Ox ca şi $[Oy$, fixăm punctul Q astfel încât $PQ=a$ (construcţia lui Q se face folosind doar compasul). Cu rigla şi compasul, ducem paralela prin Q la Ox, care taie $[Oy$ în B, apoi coborâm perpendiculara din B pe Ox; fie A piciorul acesteia. Evident că $\triangle OAB$ are proprietăţile dorite. Pentru orice valoare a lui a, *problema admite două soluţii*: triunghiul obţinut şi încă unul cu vârful unghiului drept pe $[Oy$.

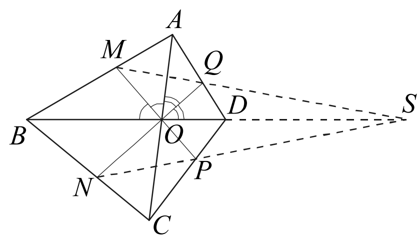
Soluţia 2 (a autorului). Considerăm $P_1\in[Ox$ astfel încât $AP_1=a$. Cu vârful compasului în P_1, găsim $P_2\in[Oy$ cu $P_1P_2=a$. În continuare, fixăm $P_3,P_5,P_7,P_9\in[Ox$, $P_4,P_6,P_8\in[Oy$ astfel încât $P_2P_3=P_3P_4=\cdots=P_8P_9=a$. Folosind teorema unghiului exterior şi faptul că unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente, obţinem că $m(\widehat{AP_8P_9})=90^\circ$, deci $\triangle AP_8P_9$ are proprietăţile dorite.

Să remarcăm faptul că a doua construcţie se efectuează utilizând numai compasul!



VII.55. *Fie $ABCD$ patrulater convex, iar $\{O\} = AC \cap BD$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$ taie laturile (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) în M, N, P, respectiv Q. Să se arate că dreptele MQ, NP şi BD sunt concurente sau paralele.*

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi



Soluţie. Dacă $BO = OD$, atunci $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AO}{DO}$, adică $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QD}$, prin urmare $MQ \parallel BD$ şi la fel se arată că $NP \parallel BD$. Presupunem că $BO \neq OD$ şi fie $\{S\} = MQ \cap BD$. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABD$ cu transversala $S - M - Q$ şi ţinând seama şi de teorema bisectoarei, obţinem că

$$\frac{SB}{SD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow \frac{SB}{SD} \cdot \frac{OD}{OA} \cdot \frac{OA}{OB} = 1 \Leftrightarrow \frac{SB}{SD} = \frac{OB}{OD}.$$

Dacă $\{S'\} = NP \cap BD$, analog găsim că $\dfrac{S'B}{S'D} = \dfrac{OB}{OD}$, deci $S = S'$ şi demonstraţia este încheiată.

Clasa a VIII-a

VIII.51. *Se consideră funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $h(x) = 3$. Notăm $\{A\} = G_g \cap G_h$, $\{B\} = G_f \cap G_h$, iar C şi D sunt punctele de intersecţie ale dreptei $x = 2$ cu G_f, respectiv G_g. Determinaţi măsurile unghiurilor, perimetrul şi aria patrulaterului $ABCD$.*

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

Soluţie. Avem că $A\left(3\sqrt{3}, 3\right)$, $B(3,3)$, $C(2,2)$, $D(2, \dfrac{2\sqrt{3}}{3})$, iar $\operatorname{tg} \widehat{BOB'} = 1$, $\operatorname{tg} \widehat{AOA'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, deci $m(\widehat{BOB'}) = 45^\circ$, $m(\widehat{AOA'}) = 30^\circ$ (am notat cu A', B', D' proiecţiile punctelor A, B, respectiv D pe Ox). Fie $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BB' \cap AD$; atunci $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{AOA'}) = 30^\circ$, $m(\widehat{BCD}) = 180^\circ - m(\widehat{BCP}) = 135^\circ$, $m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{DAA'}) = 60^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 180^\circ - m(\widehat{PBC}) = 135^\circ$.

Apoi, $S_{ABCD} = S_{APD} - S_{BPC} = \dfrac{AP \cdot PD}{2} - \dfrac{BP \cdot PC}{2} = \dfrac{31\sqrt{3} - 39}{6}$, iar $P_{ABCD} = 5 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$, lungimile laturilor calculându-se cu formula cunoscută.

VIII.52. *Fie $E(x,y) = 2004 - 2x^2 - 5y^2 + 2xy + 6y$, cu $x, y \in \mathbb{N}$. Determinaţi valoarea maximă a lui E.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Observăm că $2x^2 + 5y^2 - 2xy - 6y = \dfrac{(2x-y)^2}{2} + \dfrac{(3y-2)^2}{2} - 2$, deci $E(x,y) = 2006 - \dfrac{1}{2}\left[(2x-y)^2 + (3y-2)^2\right]$. Expresia îşi atinge valoarea maximă atunci când suma $(3x-y)^2 + (3y-2)^2$ este minimă. Nu există $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care

$(2x-y)^2+(3y-2)^2 \in \{0,1\}$, fapt care se verifică imediat. Pentru $(x,y)=(0,1)$ sau $(x,y)=(1,1)$ obţinem că $(2x-y)^2+(3y-2)^2=2$ şi $E_{\max}=2006-\frac{1}{2}\cdot 2=2005$.

VIII.53. *Să se arate că pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$, are loc inegalitatea*

$$a^4+b^4+c^4+3a^2b^2+3a^2c^2+3b^2c^2 \geq 2\left(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3\right).$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Inegalitatea dorită este echivalentă cu relaţia evidentă $(a-b)^4+(a-c)^4+(b-c)^4\geq 0$.

Interesant la această inegalitate este că, dacă a, b, c sunt pozitive, avem $a^3b+ab^3=ab\left(a^2+b^2\right)\geq 2a^2b^2$ şi analoagele, astfel încât

$$2\left(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3\right)\geq 4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2,$$

adică se vine în sprijinul cunoscutei $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$.

VIII.54. *Pentru $a,b,c\in(0,\infty)$, să se demonstreze inegalitatea*

$$a+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2+c^2}<\frac{2a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}<a+\sqrt{b^2+c^2}.$$

Radu Frunză şi Mircea Coşbuc, elevi, Iaşi

Soluţia I (**Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani). Notăm $x=a$, $y=\sqrt{b^2+c^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; ca urmare, $x,y,z>0$ şi $z^2=x^2+y^2$. Inegalitatea de demonstrat se scrie

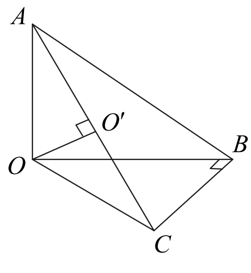
$$x+y-z<\frac{2xy}{z}<x+y.$$

Pentru prima inegalitate avem:

$$x+y-z<\frac{2xy}{z}\Leftrightarrow xz+yz-z^2<2xy\Leftrightarrow z\left(x+y\right)<x^2+y^2+2xy\Leftrightarrow$$
$$z<x+y\Leftrightarrow z^2<x^2+y^2+2xy\Leftrightarrow 2xy>0,$$

evident. Pentru a doua, $\frac{2xy}{z}<x+y\Leftrightarrow\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{x^2+y^2}$, care este adevărată, deoarece $\frac{2xy}{x+y}\leq\sqrt{xy}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}<\sqrt{x^2+y^2}$.

Soluţia a II-a (**Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani). Considerăm $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A})=90^\circ$, $AB=a$, $AC=\sqrt{b^2+c^2}$, deci $BC=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Inegalitatea devine $AB+AC-BC<\frac{2\,AB\cdot AC}{BC}<AB+AC$ sau $AB+AC-BC<2h_a<AB+AC$, h_a fiind lungimea corespunzătoare ipotenuzei BC. Cum $h_a<AB$ şi $h_a<AC$, rezultă că $2h_a<AB+AC$. Notând cu D piciorul înălţimii din vârful A, avem: $AB<h_a+BD$, $AC<h_a+DC$; prin adunare $AB+AC<2h_a+BC$, adică partea din stânga a inegalităţii de demonstrat.



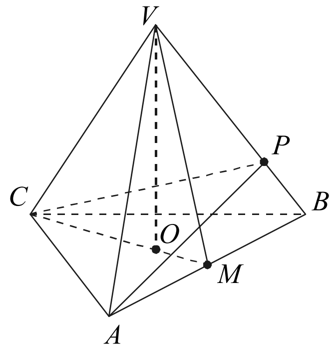
Soluţia a III-a (a autorilor). Ca în figură, fie $OA\perp(OBC)$, $OB\perp BC$, cu $OA=a$, $OB=b$, $BC=c$, iar O' proiecţia pe AC a punctului O. Avem că

$$OA+OC<(OO'+O'A)+(OO'+O'C)=$$
$$=2\,OO'+(O'A+O'C)=2\,OO'+AC,$$

deci $OA + OC - AC < 2\,OO'$; exprimând lungimile segmentelor funcţie de a, b, c, obţinem inegalitatea din stânga. A doua inegalitate revine la faptul că $2\,OO' < OA + OC$, evident adevărat.

VIII.55. *O piramidă triunghiulară regulată este tetraedru regulat dacă şi numai dacă unghiurile făcute de o faţă laterală cu planul bazei, respectiv cu o altă faţă laterală, sunt congruente.*

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi



Soluţie. Dacă $VABC$ este tetraedru regulat, unghiurile oricăror două feţe sunt congruente. Reciproc, fie $VABC$ piramidă triunghiulară regulată cu proprietatea din enunţ. Fie $AP \perp VB$ şi M mijlocul lui $[AB]$; atunci ipoteza se scrie $\widehat{VMO} \equiv \widehat{APC}$ şi în particular $\cos\widehat{VMC} = \cos\widehat{APC}$. Notăm $AB = a$, $VA = m$ şi avem că $VM = \dfrac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{2}$, $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AP = \dfrac{VM \cdot AB}{VB} = \dfrac{a\sqrt{4m^2 - a^2}}{2m}$, prin urmare $\cos\widehat{VMO} = \dfrac{OM}{VM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{4m^2 - a^2}}$, iar $\cos\widehat{APC} = \dfrac{2\,AP^2 - AC^2}{2\,AP^2} = \dfrac{2m^2 - a^2}{4m^2 - a^2}$. Rezultă că $a = m$, deci $VABC$ este tetraedru regulat.

Clasa a IX-a

IX.51. *Fie şirul* $(a_n)_{n \geq 1}$ *definit prin:* $a_1 = 1 + 2 - 3$*;* $a_2 = a_1 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8$*;* $a_3 = a_2 + 9 + 10 + 11 + 12 - 13 - 14 - 15$ *etc.*

a) Să se determine semnele cu care apar 100 *în* a_{100}*, respectiv* 91 *în* a_{91}*.*

b) Să se afle formula termenului general al şirului.

Lidia Nicola, Craiova

Soluţie. *a)* Se observă că $a_{n+1} = a_n + \left[\sum\limits_{i=0}^{n}\left(n^2 + i\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\left(n^2 + n + i\right)\right]$, grupul de termeni din paranteza pătrată debutând cu un pătrat perfect. Deoarece $100 = 10^2$, rezultă că 100 apare în a_k, pentru $k \geq 0$ (deci şi în a_{100}), cu semnul "+". Apoi, 91 corespunde grupei $\{81, 82, \ldots, 99\}$, cu primii 10 termeni pozitivi şi următorii 9 negativi, prin urmare va avea semnul "−" în orice a_k, $k \geq 9$, deci şi în a_{91}.

b) Deoarece $a_1 = 0$, se demonstrează imediat prin inducţie matematică faptul că $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

IX.52. *Să se determine funcţiile* $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile:* $f(0) = 2004$, f *este pară,* g *este impară şi există* $a, b \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $f(x) = f\left(x^2 + x + a\right)$, $g(x) = g\left(x^2 + x + b\right)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Soluţie. Avem că $f(x) = f\left(x^2 + x + a\right) = f\left((-x-1)^2 + (-x-1) + a\right) = f(-(x+1)) = f(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, deci f este periodică de perioadă 1, adică este constantă. Prin urmare, $f(x) = 2004$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

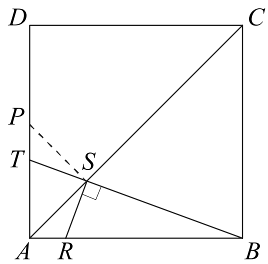
Analog, $g(x) = g(-(x+1)) = -g(x+1) = g(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, adică g este periodică de perioadă 2. Deoarece $g(0) = 0$ (din imparitate), avem că $g(2n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, apoi $g(2n+1) = -g(2n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, prin urmare $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

IX.53. *Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care*

$$|f(x+y+z+t) + \cos x + \cos y + \cos z + \cos t| < 4, \quad \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}?$$

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Pentru $x = \pi$, $y = 3\pi$, $z = 5\pi$, $t = 7\pi$, obţinem că $|f(16\pi) - 4| < 4$, deci $f(16\pi) \in (0, 8)$. Pentru $x = y = z = t = 4\pi$, obţinem că $|f(16\pi) + 4| < 4$, deci $f(16\pi) \in (-8, 0)$. Prin urmare, nu există funcţii cu proprietatea din enunţ.



IX.54. *Fie $ABCD$ un pătrat de latură a, iar $T \in (AD)$ astfel încât $m(\widehat{ABT}) = \alpha$. Notăm $\{S\} = AC \cap BT$ şi fie R punctul în care perpendiculara în S pe BT intersectează AB.*

a) Să se arate că $\triangle RST$ este isoscel.

b) Să se exprime RS funcţie de a şi α.

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţia I. *a*) Construim $SP \parallel BD$, $P \in AD$; atunci $\triangle ASP$ va fi dreptunghic isoscel, deci $m(\widehat{SPT}) = m(\widehat{SAR}) = 45°$ şi $SP = SA$. Însă $\widehat{PST} \equiv \widehat{ASR}$ ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, aşadar $\triangle STP \equiv \triangle SRA$ (U.L.U.), prin urmare $ST = SR$.

b) În $\triangle ABT$, lungimile laturilor sunt $AB = a$, $AT = a \operatorname{tg} \alpha$, $BT = \dfrac{a}{\cos \alpha}$. Cu teorema bisectoarei, $\dfrac{ST}{SB} = \dfrac{AT}{AB}$, de unde $ST = \dfrac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = RS$.

Bineînţeles, punctul *a*) putea fi soluţionat şi calculatoriu, din asemănarea $\triangle BSR \sim \triangle BAT$.

Soluţia a II-a (**Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani). Din $\triangle SRB \sim \triangle ATB$ deducem $RS = \dfrac{TA \cdot SB}{AB}$. În $\triangle ATB$, avem $ST = \dfrac{TA \cdot SB}{AB}$ (teorema bisectoarei). Ca urmare, $RS = ST$, ceea ce arată că $\triangle RST$este isoscel. Pentru *b*) se procedează ca mai sus.

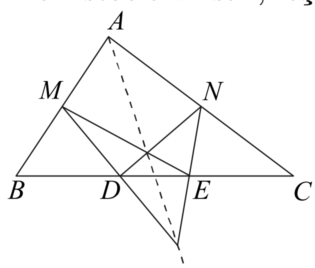
IX.55. *Fie ABC un triunghi cu $c < b$. Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ şi cu D şi E punctele de tangenţă a cercurilor înscris şi respectiv A-exînscris triunghiului cu latura $[BC]$. Arătaţi că*

(i) ME şi ND se intersectează pe mediana din vârful A;

(ii) $MD \parallel NE \Leftrightarrow a = 2(b-c)$;

(iii) dacă $a \neq 2(b-c)$, atunci MD şi NE se intersectează pe prelungirea medianei din A.

Temistocle Bîrsan, Iaşi



Soluţie. Fie A' mijlocul laturii $[BC]$. Din $c < b$ rezultă că punctul D este între B şi A', iar punctul E între A' şi C, căci E este izotomicul lui D.

Cum $MN \parallel BC$, avem: $MD \parallel NE \Leftrightarrow DEMN$ este paralelogram $\Leftrightarrow MN = DE \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} = b - c \Leftrightarrow a = 2(b-c)$ (am folosit faptul că $DE = DC - EC = = DC - DB = (p-c) - (p-b) = b - c$).

Dacă $a \neq 2(b-c)$, atunci patrulaterul $DEMN$ este trapez şi afirmaţiile (i) şi (iii) decurg din următoarea proprietate a trapezelor: dreapta care uneşte punctul de intersecţie a diagonalelor cu punctul de intersecţie a laturilor neparalele trece prin mijloacele bazelor.

Clasa a X-a

X.51. *Fie $OABC$ un tetraedru cu $OA \perp OB \perp OC$, circumscris unei sfere de rază r. Dacă R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci* $\dfrac{R}{r} \leq \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Cezar Lupu, elev, Constanţa

Soluţie. Cu notaţiile $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, obţinem că

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad \text{iar} \quad R = \frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Pe de altă parte, raza sferei înscrisă în tetraedru se calculează exprimând volumul acestuia în două moduri:

$$3V_{OABC} = OA \cdot S_{OBC} = r\left(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} + S_{ABC}\right) \Rightarrow$$

$$r = \frac{abc}{ab + bc + ac + \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

Rezultă de aici, folosind Cauchy-Buniakowski, că

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} + \frac{ab + bc + ac}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

X.52. *Fie polinomul* $P(X) = \left(1 + X + X^2\right)^{6n+1} = \sum\limits_{k=0}^{12n+2} a_k X^k$, $n \in \mathbb{N}$. *Să se arate că* $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_{6k} = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{6k+2}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Fie $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ rădăcina primitivă de ordin 3 a unităţii, deci $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Din ipoteză, $P(\varepsilon) = 0$, iar

$$P(-\varepsilon) = \left(1 - \varepsilon + \varepsilon^2\right)^{6n+1} = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{6n+1} = 2^{6n}\left(1 - i\sqrt{3}\right),$$

prin urmare $P(\varepsilon) + P(-\varepsilon) = 2^{6n}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$. Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) + P(-\varepsilon) &= 2\left(a_0 + a_6 + \cdots + a_{12n}\right) + 2\varepsilon\left(a_4 + a_{10} + \cdots + a_{12n-2}\right) + \\ &+ 2\varepsilon^2\left(a_2 + a_8 + \cdots + a_{12n+2}\right) = \\ &= \left[2\left(a_0 + a_6 + \cdots + a_{12n}\right) - \left(a_2 + a_4 + a_8 + \cdots + a_{12n+2}\right)\right] - \\ &- i\sqrt{3}\left[\left(a_2 + a_8 + \cdots + a_{12n+2}\right) - \left(a_4 + a_{10} + \cdots + a_{12n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Identificând părţile reale şi părţile imaginare şi eliminând apoi pe 2^{6n} între relaţiile obţinute, urmează concluzia.

X.53. *Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $a + b + c = 9$. Să se arate că*

$$\log_a\left(2b^3 + c^3\right) + \log_b\left(2c^3 + a^3\right) + \log_c\left(2a^3 + b^3\right) \geq 12.$$

Angela Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Pentru $a,b \geq 0$, are loc inegalitatea $2a^3+b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6b^3} = 3a^2b$, prin urmare membrul stâng al inegalităţii din concluzie este cel puţin egal cu

$$\begin{aligned}\log_a 3b^2c + \log_b 3c^2a + \log_c 3a^2b &= (\log_a 3 + \log_b 3 + \log_c 3) + \\ &+ 2(\log_a b + \log_b c + \log_c a) + (\log_a c + \log_b a + \log_c b) \geq \\ &\geq (\log_a 3 + \log_b 3 + \log_c 3) + 2\cdot 3\cdot \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} + \\ &+ 3\sqrt[3]{\log_a c \cdot \log_b a \cdot \log_c b} = \\ &= \left(\frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_3 b} + \frac{1}{\log_3 c}\right) + 9.\end{aligned}$$

Deoarece funcţia $f : (1,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \log_3 x$ este concavă şi pozitivă, funcţia $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ este convexă, deci $g\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) \leq \dfrac{1}{3}[g(a)+g(b)+g(c)]$, adică $\dfrac{1}{\log_3 a} + \dfrac{1}{\log_3 b} + \dfrac{1}{\log_3 c} \geq 3\cdot \dfrac{1}{\log_3 \frac{a+b+c}{3}} = 3$. Astfel, inegalitatea dorită este demonstrată; egalitatea se atinge pentru $a=b=c=3$.

X.54. *Definim mulţimile A_k, $k \geq 1$, prin*

$$A_1 = \left\{\frac{n}{2003} \mid n = 1,2,\ldots,10000\right\} \setminus \{1\}; \quad A_k = (A_{k-1} \setminus \{a,b\}) \cup \left\{a^{2\lg b}\right\},$$

cu $a,b \in A_{k-1}$ arbitrare, $k \geq 2$. Să se determine A_{9999}.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie. Se observă faptul că A_{9999} are un singur element. Fie $B_k = \{\lg a \mid a \in A_k\}$, $k = \overline{1,9999}$ şi fie $N_k = \prod_{a\in B_k} a$. Dacă $B_k = \{\lg a_1, \lg a_2, \lg a_3, \ldots\}$ şi alegem $a = a_1$, $b = a_2$, atunci $B_{k+1} = \left\{\lg a_1^{2\lg a_2}, \lg a_3, \ldots\right\} = \{2\lg a_1 \lg a_2, \lg a_3, \ldots\}$, deci $N_{k+1} = 2N_k$. Folosind acest lucru, se arată uşor prin inducţie că $N_k = 2^{k-1}\prod_{a\in B_1} a$, prin urmare, cum B_{9999} are un singur element, acesta va fi $2^{9998}\prod_{a\in A_1}\lg a$. Rezultă că $A_{9999} = \left\{10^{2^{9998}\prod_{a\in A_1}\lg a}\right\}$.

X.55. *Fie $a,b \in \mathbb{Z}$ cu $a^2-4b<0$, iar ε o soluţie a ecuaţiei $x^2+ax+b=0$. Definim funcţia $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x^2 - axy + by^2$. Pentru orice pereche $(x,y) \in f^{-1}(1)$, să se arate că $(x+\varepsilon y)^{\operatorname{card} f^{-1}(1)} = 1$.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Fie $(x,y) \in f^{-1}(1)$; atunci

$$x^2 - axy + by^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4axy + 4by^2 = 4 \Leftrightarrow (2x-ay)^2 = 4 + y^2\left(a^2-4b\right).$$

Deoarece $a^2-4b<0$, urmează că $y^2\left(a^2-4b\right) \in \{0,-3,-4\}$. Pentru $y=0$, obţinem $x=\pm1$, deci $\{(-1,0),(1,0)\} \subset f^{-1}(1)$. Dacă $y^2\left(4b-a^2\right) = 3$, găsim $y=\pm1$ şi $4b-a^2=3$; în particular, a este impar şi urmează că $2x-ay=\pm1$, deci $x = \dfrac{\pm1+ay}{2}$. În sfârşit, dacă $y^2\left(4b-a^2\right) = 4$, obţinem fie $y=\pm1$, $4b-a^2=4$, fie $y=\pm2$, $4b-a^2=1$. Al doilea caz conduce la contradicţia $a^2=4b-1$, iar în primul obţinem $2x-ay=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{ay}{2}$ (a este par, deoarece $a^2=4b-4$).

Prin urmare, deosebim trei cazuri:

1) Dacă a, b nu satisfac niciuna dintre condiţiile $4b = a^2 + 3$ sau $4b = a^2 + 4$, atunci $f^{-1}(1) = \{(-1, 0); (1, 0)\}$ şi concluzia problemei revine la $(\pm 1)^2 = 1$, fapt evident adevărat.

2) Dacă $4b = a^2 + 3$, atunci

$$f^{-1}(1) = \left\{(-1,0);(1,0);\left(\frac{1+a}{2},1\right);\left(\frac{1-a}{2},-1\right);\left(\frac{-1+a}{2},1\right);\left(\frac{-1-a}{2},-1\right)\right\},$$

deci $\operatorname{card} f^{-1}(1) = 6$. Pe de altă parte, $\varepsilon = \dfrac{-a \pm i\sqrt{3}}{2}$ şi se verifică imediat că $(x + \varepsilon y)^6 = 1$, $\forall (x, y) \in f^{-1}(1)$.

3) Dacă $4b = a^2 + 4$, atunci $f^{-1}(1) = \left\{(-1,0);(1,0);\left(\frac{a}{2},1\right);\left(-\frac{a}{2},-1\right)\right\}$, deci $\operatorname{card} f^{-1}(1) = 4$. În plus, $\varepsilon = -\dfrac{a}{2} \pm i$ şi din nou se verifică cerinţa problemei.

Clasa a XI-a

XI.51. *Să se calculeze determinantul unei matrice pătratice de ordinul patru care are toţi minorii de ordin trei egali.*

Lucian - Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Notând cu δ_{ij} complementul algebric al elementului a_{ij} de pe poziţia (i, j) în matricea A, avem că $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} m$, unde m este valoarea comună a minorilor de ordin 3. Se ştie că $\sum\limits_{i=1}^{4} a_{1i}\delta_{ki} = 0$, $\forall k \in \{2, 3, 4\}$, deci $a_{11}m - a_{12}m + a_{13}m - a_{14}m = 0$. Pe de altă parte, dezvoltând $\det A$ după prima linie, obţinem că $\det A = a_{11}m - a_{12}m + a_{13}m - a_{14}m$, adică $\det A = 0$.

XI.52. *Fie funcţia* $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$, $f(A) = \det\left(A^2 + I_2\right)$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $f(A) = (\det A - 1)^2 + (\operatorname{tr} A)^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Să se demonstreze că f *este surjectivă, dar nu este injectivă.*

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. *a*) Bineînţeles, se poate demonstra cerinţa prin calcul brut. Altfel, fie $g_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$ polinomul caracteristic al matricei A. Avem:

$$f(A) = \det(A + i\, I_2)\det(A - i\, I_2) = g_A(i)\, g_A(-i) =$$
$$= [(\det A - 1) - i \operatorname{tr} A]\,[(\det A - 1) + i \operatorname{tr} A] = (\det A - 1)^2 + (\operatorname{tr} A)^2 .$$

b) Fie $\alpha \in [0, \infty)$; vom arăta că există o infinitate de matrice cu determinantul 1 şi urma $\sqrt{\alpha}$, a căror imagine prin f este α, de unde cerinţa problemei. Într-adevăr, dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietăţile descrise, atunci $A^2 - \sqrt{\alpha}A + I_2 = O_2$, ceea ce conduce la $a^2 + bc - a\sqrt{\alpha} + 1 = 0$, $b(a + d - \sqrt{\alpha}) = 0$, $c(a + d - \sqrt{\alpha}) = 0$, $d^2 + bc - d\sqrt{\alpha} + 1 = 0$. Putem lua $a + d - \sqrt{\alpha} = 0$, $c = -1$ şi atunci, pentru $b = a^2 - a\sqrt{\alpha} + 1$, toate cele patru relaţii sunt verificate, de unde concluzia.

XI.53. *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$; pentru $n \geq 3$, definim*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \cos\left(\alpha + \dfrac{2k\pi}{n}\right) - \cos\alpha & \sin\left(\alpha + \dfrac{2k\pi}{n}\right) - \sin\alpha \\ \cos\left(\alpha + \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\alpha & \sin\left(\alpha + \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 3}$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-2} |\Delta_k|$.

Gheorghe Croitoru şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Să observăm că

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\left(\alpha + \dfrac{2k\pi}{n}\right) & \sin\left(\alpha + \dfrac{2k\pi}{n}\right) & 1 \\ \cos\left(\alpha + \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right) & \sin\left(\alpha + \dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right) & 1 \end{vmatrix}.$$

Notând $A_k\Big(\cos\left(\alpha+\dfrac{2k\pi}{n}\right), \sin\left(\alpha+\dfrac{2k\pi}{n}\right)\Big)$, $k = \overline{0, n-2}$, atunci $|\Delta_k| = 2S_{A_0A_kA_{k+1}}$, prin urmare $a_n = 2\left(S_{A_0A_1A_2} + S_{A_0A_2A_3} + \cdots + S_{A_0A_{n-2}A_{n-1}}\right) = 2S_{A_0A_1\cdots A_{n-1}}$. Deoarece $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ este poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate, pentru $n \to \infty$ aria sa devine aria discului unitate. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\pi$.

XI.54. *Fie $k \in \mathbb{N}^*$; să se arate că ecuaţia $x^{n+k} - x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = 0$ are o singură soluţie pozitivă, pe care o notăm x_n. Să se arate apoi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent; ce se poate spune despre limita sa?*

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Evident că ecuaţia are o singură soluţie pozitivă, aflată în intervalul $(1, 2)$. Dacă arătăm că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton, rezultă şi convergenţa lui. Avem:

$$x_n^{n+k} - x_n^n - x_n^{n-1} - \cdots - x_n - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x_n^k} + \frac{1}{x_n^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x_n^{k+n}}.$$

Analog,

$$1 = \frac{1}{x_{n+1}^k} + \cdots + \frac{1}{x_{n+1}^{k+n}} + \frac{1}{x_{n+1}^{k+n+1}} > \frac{1}{x_{n+1}^k} + \cdots + \frac{1}{x_{n+1}^{k+n}}.$$

Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{t^k} + \cdots + \dfrac{1}{t^{k+n}}$, $\forall t \in (0, \infty)$ este strict descrescătoare, prin urmare $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Fie $h_n(x) = x^{n+k} - x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$, $\forall x \in (0, \infty)$; atunci $h_n(x_n) = 0 \Rightarrow (x_n - 1) h_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^{n+k+1} - x_n^{k+n} - x_n^{n+1} + 1 = 0 \Rightarrow x_n^k - x_n^{k-1} - 1 + \dfrac{1}{x_n^{n+1}} = 0$, $\forall n \geq 1$. Fără dificultate se obţine că $0 < \dfrac{1}{x_n^{n+1}} \leq \left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{n+1}$ şi, cum $x_1 > 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n^{n+1}} = 0$. Trecând la limită în relaţia de mai sus, rezultă că limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $x^k - x^{k-1} - 1 = 0$.

XI.55. *Determinaţi toate funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care*
$$f\left(x^{2n+1}+x\right)\le x\le f^{2n+1}(x)+f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R},$$
unde $n\in\mathbb{N}$. (În legătură cu problema 2811 din *Crux Mathematicorum*, nr. 1/2003)

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Se arată uşor că ecuaţia $x^{2n+1}+x=a$ admite o singură soluţie reală, fie aceasta α. În aceste condiţii, paranteza pătrată a descompunerii
$$x^{2n+1}+x-\alpha^{2n+1}-\alpha=(x-\alpha)\left[x^{2n}+\alpha x^{2n-1}+\cdots+\alpha^{2n-1}x+\alpha^{2n}+1\right]$$
are semn constant. Pentru $x=0$, ea devine $\alpha^{2n}+1>0$, prin urmare această paranteză pătrată este pozitivă pentru orice x.

În inegalitatea $f\left(x^{2n+1}+x\right)\le x$ facem $x=\alpha$ şi obţinem $f\left(\alpha^{2n+1}+\alpha\right)\le\alpha\Leftrightarrow f(a)\le\alpha$. Apoi, în inegalitatea $x\le f^{2n+1}(x)+f(x)$ facem $x=a$ şi obţinem
$$f^{2n+1}(a)+f(a)\ge a\Leftrightarrow f^{2n+1}(a)+f(a)-\alpha^{2n+1}-\alpha\ge 0\Leftrightarrow$$
$$(f(a)-\alpha)\left[f^{2n}(a)+\alpha f^{2n-1}(a)+\cdots+\alpha^{2n-1}f(a)+\alpha^{2n}+1\right]\ge 0\Leftrightarrow f(a)\ge\alpha.$$
Rezultă că $f(a)=\alpha$, deci $f(x)=\alpha_x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde α_x este unica soluţie reală a ecuaţiei în y: $y^{2n+1}+y=x$.

Clasa a XII-a

XII.51. *Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge1}$, $a_n=\displaystyle\int_{1/n}^{1}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$, $p<2$, este convergent.*

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

Soluţie. Şirul este monoton crescător: $a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_{1/(n+1)}^{1/n}\frac{\sin x}{x^p}dx>0,\forall n\ge1$. Apoi:
$$0<a_n<\int_{1/n}^{1}\frac{x}{x^p}\,dx=\left.\frac{x^{2-p}}{2-p}\right|_{1/n}^{1}=\frac{1}{2-p}\left[1-\frac{1}{n^{2-p}}\right]<\frac{1}{2-p},\quad\forall n\ge2,$$
iar $a_1=0$, deci şirul este mărginit. Prin urmare, şirul $(a_n)_{n\ge1}$ este convergent.

XII.52. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât $f(x)+f'(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$. Să se arate că*
$$\int_0^1 f(x)\,dx\le\frac{(2e-5)\,f(1)}{5}+\frac{4}{e}\int_1^2\frac{xe^xf(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx.$$

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Deoarece $e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}$, atunci $f'(x)+f(x)=\dfrac{\left(f(x)\cdot e^x\right)'}{e^x}\le$ $\le\dfrac{2\left(f(x)\cdot e^x\right)'}{x^2+2x+2}$, prin urmare
$$\int_0^1 f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx\le 2\int_0^1\frac{\left(f(x)\,e^x\right)'}{x^2+2x+2}\,dx=$$
$$=2\left.\frac{f(x)\,e^x}{x^2+2x+2}\right|_0^1+4\int_0^1\frac{(x+1)\,f(x)\,e^x}{[(x+1)^2+1]^2}\,dx$$

şi făcând în ultima integrală schimbarea de variabilă $t = x + 1$, urmează concluzia.

XII.53. *Prove that*

$$\frac{2\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}+1} \le \int_{-x}^{x} \frac{\sqrt{e^{t}}}{e^{t}+1}\, dt \le x, \quad \forall x \ge 0.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Montenegro

Soluţie. În inegalitatea mediilor $\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$, înlocuim $a = \dfrac{1}{e^{t}+1}$, $b = \dfrac{e^{t}}{e^{t}+1}$ şi apoi integrăm pe intervalul $[-x, x]$; se obţine astfel concluzia. Egalitatea se atinge pentru $x = 0$.

XII.54. *Să se afle funcţiile continue $u = u\,(t)$, soluţii ale ecuaţiei*

$$u\,(t) = \alpha + \int_0^t b\,(s)\, u\,(s)\, ds + \int_0^a b\,(s)\, u\,(s)\, ds, \quad 0 \le t \le a,$$

unde α este constantă, iar $b = b\,(t)$ este continuă pe $[0, a]$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Evident, eventualele soluţii sunt de forma $u\,(t) = c + \int_0^t b\,(s)\, u\,(s)\, ds$, în care trebuie determinată constanta c. Avem că $u'(t) = b(t)\, u(t)$, deci $u(t) = c\, e^{\int_0^t b(s)ds}$ şi înlocuim în ecuaţie:

$$c\, e^{\int_0^t b(s)ds} = \alpha + c\int_0^t b\,(s)\, e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds + c\int_0^a b\,(s)\, e^{\int_0^s b(\tau)d\tau} ds \Leftrightarrow$$

$$c\, e^{\int_0^t b(s)ds} = \alpha + c\left[e^{\int_0^t b(s)ds} - 1\right] + c\left[e^{\int_0^a b(s)ds} - 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 2c + c\, e^{\int_0^a b(s)ds} = 0 \Leftrightarrow c\left[e^{\int_0^a b(s)ds} - 2\right] = -\alpha.$$

Prin urmare, dacă $e^{\int_0^a b(s)ds} \ne 2$, atunci $c = \dfrac{\alpha}{2 - e^{\int_0^a b(s)ds}}$, deci ecuaţia are soluţie unică. Dacă $\alpha \ne 0$ şi $e^{\int_0^a b(s)ds} = 2$, nu există soluţii, iar dacă $\alpha = 0$, $e^{\int_0^a b(s)ds} = 2$, atunci orice funcţie de forma $u\,(t) = c\, e^{\int_0^t b(s)ds}$, $c \in \mathbb{R}$, este soluţie.

XII.55. *Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există monoizi care nu sunt grupuri şi care conţin exact n elemente inversabile.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Considerăm grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ să fie $\alpha \notin \mathbb{Z}_n$. Pe mulţimea $M = \mathbb{Z}_n \cup \{\alpha\}$ extindem adunarea din $\mathbb{Z}_n$ prin $i + \alpha = \alpha + i = \alpha$, $\forall i \in \mathbb{Z}_n$, iar $\alpha + \alpha = \alpha$. Această operaţie pe M se verifică imediat a fi asociativă, iar $\hat{0}$ este element neutru, prin urmare $(M, +)$ este monoid, fără să fie grup deoarece α nu este inversabil. Evident că M are exact n elemente inversabile, anume cele din $\mathbb{Z}_n$.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 2 / 2004

A. Nivel gimnazial

G66. *Se consideră mulţimea* $A = \{1, n+1, 2n+1, \ldots, mn+1\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$. *Să se afle câte valori distincte poate lua suma* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, *unde* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Cea mai mică valoare a sumei este

$$1 + (n+1) + (2n+1) + \cdots + [n(n-1)+1] = n\left[\frac{n(n-1)}{2} + 1\right],$$

iar cea mai mare valoare posibilă este

$$[(m-n+1)n+1] + [(m-n+2)n+1] + \cdots + (mn+1) = n\left[mn - \frac{n(n-1)}{2} + 1\right].$$

În şirul $0, 1, 2, \ldots, n-1, n, \ldots, m$, primele n numere au suma $\frac{n(n-1)}{2}$, iar ultimele n au suma $mn - \frac{n(n-1)}{2}$. Vom arăta că suma poate lua orice valoare intermediară între aceste două extreme: în suma minimă $0+1+\cdots+(n-1)$ înlocuim $(n-1)$, pe rând, cu $n, (n+1), \ldots, m$; ultima sumă obţinută este $0+1+\cdots+(n-2)+m$. În această sumă înlocuim $(n-2)$, pe rând, cu $(n-1), n, (n+1), \ldots, (m-1)$, obţinând următoarele $m-n+1$ numere naturale consecutive, iar procedeul continuă.

În concluzie, numărul sumelor distincte care se pot forma este

$$mn - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + 1 = n(m-n+1) + 1.$$

G67. *Fie* $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. *Spunem că un număr natural este* decompozabil *dacă se poate scrie ca suma a două numere cu aceeşi sumă a cifrelor în baza* b. *Să se arate că există o infinitate de numere care nu sunt decompozabile.*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. I. Dacă b este par, fie $x = b-1$; vom demonstra că pentru orice k impar, numărul $N_k = \underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{k \text{ cifre}}$ nu este decompozabil. Să presupunem prin absurd că $N_k = m + n$, cu $s(m) = s(n)$, unde cu $s(a)$ am notat suma cifrelor din scrierea în baza b a numărului natural a. Se observă uşor că în adunarea $m+n$ nu există treceri peste ordin, deci $2s(m) = s(m) + s(n) = s(N_k) = kx$, imposibil (deoarece x, k sunt ambele impare).

II. Dacă b este impar, vom arăta că orice număr impar nu este decompozabil. Fie $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0}$ scrierea în baza b a numărului $n \in \mathbb{N}^*$; demonstrăm întâi că $b-1$ divide $n - s(n)$. Într-adevăr,

$$n - s(n) = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_0 - a_k - a_{k-1} - \cdots - a_0 = a_k\left(b^k - 1\right) + \cdots + a_1(b-1),$$

care este multiplu de $b-1$. În particular, $b-1$ este par, deci $n - s(n)$ este par, adică n şi $s(n)$ au aceeaşi paritate cu $s(x) + s(y) = 2s(x)$, deci n este par, q.e.d.

G68. *Fie* $N \in \mathbb{N}^*$; *să se arate că există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât factorialul niciunui număr natural să nu se termine cu* $n, n+1, \ldots, n+N$ *zerouri.*

Iuliana Georgescu, Iaşi

Soluţie. Conform formulei lui Legendre, exponentul la care un număr prim p apare în produsul $n!$ este $\exp_{n!}(p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$. Numărul de zerouri în care se termină $n!$ va fi $\min\{\exp_{n!}(2), \exp_{n!}(5)\} = \exp_{n!}(5)$. Dacă $m \geq 5^{N+2}$, atunci $m!$ se termină în cel puţin $\left[\frac{5^{N+2}}{5}\right] + \cdots + \left[\frac{5^{N+2}}{5^{N+2}}\right] = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ zerouri. Dacă $m < 5^{N+2}$, atunci $m!$ se termină în cel mult $\left[\frac{5^{N+2}-1}{5}\right] + \cdots + \left[\frac{5^{N+2}-1}{5^{N+2}}\right] = \frac{N(N+1)}{2}$ zerouri. În concluzie, factorialul niciunui număr natural nu se termină cu $\frac{N(N+1)}{2} + 1, \ldots, \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1$ zerouri, o alegere posibilă pentru n cerut fiind $n = \frac{N(N+1)}{2} + 1$.

G69. *Fie $E(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$. Dacă $a + b + c \in \mathbb{Z}$, arătaţi că există o infinitate de numere întregi n astfel încât $E(n)$ să fie număr întreg.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$, $c = \frac{c_1}{c_2}$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$, $a_2, b_2, c_2 \neq 0$, $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) = (c_1, c_2) = 1$. Atunci

$$E(n) - (a + b + c) = \frac{a_1}{a_2}\left(n^2 - 1\right) + \frac{b_1}{b_2}(n-1) = (n-1)\frac{a_1 b_2 (n+1) + b_1 a_2}{a_2 b_2},$$

deci pentru $n_k = 1 + k a_2 b_2$, $k \in \mathbb{Z}$, rezultă că $E(n_k) \in \mathbb{Z}$.

G70. *Să se arate că ecuaţia $x^2 + y^2 + 3x + y - 707 = 0$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}^2$.*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Ecuaţia se scrie $(2x+3)^2 + (2y+1)^2 = 2838$, iar solvabilitatea sa în $\mathbb{Q}^2$ revine la faptul că ecuaţia $a^2 + b^2 = 2838c^2$ are soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Presupunând prin absurd existenţa soluţiilor pentru ultima ecuaţie, fie (a_0, b_0, c_0) soluţia cu proprietatea că $|a_0| + |b_0| + |c_0|$ ia valoarea minimă. Deoarece $3 \mid a^2 + b^2$, rezultă că $3 \mid a$ şi $3 \mid b$, deci $3 \mid c$, ceea ce conduce la faptul că tripleta $\left(\frac{a_0}{3}, \frac{b_0}{3}, \frac{c_0}{3}\right)$ este soluţie a ecuaţiei menţionate, cu $\left|\frac{a_0}{3}\right| + \left|\frac{b_0}{3}\right| + \left|\frac{c_0}{3}\right| < |a_0| + |b_0| + |c_0|$. Contradicţie.

G71. *Fie $(m, n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{a}{(m+n)a^2 + mb^2 + nc^2} + \frac{b}{(m+n)b^2 + mc^2 + na^2} + \frac{c}{(m+n)c^2 + ma^2 + nb^2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2(m+n)}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \forall a, b, c \in (0, \infty).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluţie. Deoarece

$$(m+n)a^2 + mb^2 + nc^2 = m\left(a^2 + b^2\right) + n\left(a^2 + c^2\right) \geq m \cdot 2ab + n \cdot 2ac =$$
$$= 2a(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{m} + \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n}) \geq 2a(m+n)\sqrt[m+n]{b^m \cdot c^n},$$

este suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{\sqrt[m+n]{b^m \cdot c^n}} + \frac{1}{\sqrt[m+n]{c^m \cdot a^n}} + \frac{1}{\sqrt[m+n]{a^m \cdot b^n}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

care cu substituţiile $\frac{1}{a} = x^{m+n}$, $\frac{1}{b} = y^{m+n}$, $\frac{1}{c} = z^{m+n}$, se scrie

$$x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n} \geq x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n.$$

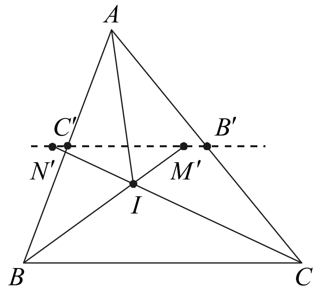
Această ultimă inegalitate rezultă din

$$\frac{x^{m+n} + \cdots + x^{m+n} + y^{m+n} + \cdots + y^{m+n}}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{x^{m(m+n)} \cdot y^{n(m+n)}}$$

şi cele analoage, prin sumare.

G72. *Fie $\triangle ABC$ circumscris cercului de centru I. Cercul de diametru $[AI]$ intersectează bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$ în M, respectiv N. Să se arate că M şi N se află pe dreapta suport a liniei mijlocii paralele cu BC.*

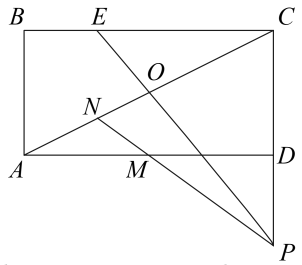
Doru Buzac, Iaşi



Soluţie. Fie $B'C'$ linia mijlocie paralelă cu BC şi fie $\{M'\} = BI \cap B'C', \{N'\} = CI \cap B'C'$. Atunci $\widehat{M'BC} \equiv \widehat{C'M'B}$ (alterne interne), iar $\widehat{C'BM'} \equiv \widehat{M'BC}$, deci $\widehat{C'BM'} \equiv \widehat{C'M'B}$, adică $\triangle C'BM'$ este isoscel cu $C'M' = C'B$. Atunci mediana $[M'C']$ din $\triangle M'AB$ este egală cu jumătatea laturii $[AB]$, prin urmare $m(\widehat{BM'A}) = 90°$ şi deci M' se află pe cercul de diametru $[AI]$. Rezultă că $M' = M$; analog se arată că $N' = N$, de unde concluzia.

G73. *Fie $ABCD$ un dreptunghi de centru O. Considerăm $N \in (AO)$, M mijlocul lui $[AD]$, $\{P\} = MN \cap CD$, $\{E\} = OP \cap BC$. Să se arate că $NE \perp BC$.*

Andrei Nedelcu, Iaşi



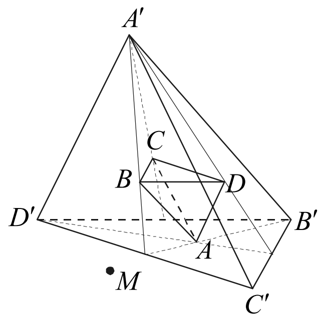
Soluţia 1 (**a autorului**). Fie $NE' \perp BC$, $E' \in BC$. Atunci $\frac{E'N}{AB} = \frac{NC}{AC}$, deci $\frac{E'N}{OM} = \frac{NC}{OC}$. Dar $\frac{NC}{OC} = \frac{NP}{MP}$, prin urmare $\frac{OM}{E'N} = \frac{PM}{PN}$. Cum $OM \parallel E'N$, obţinem că $\triangle PMO \sim \triangle PNE'$, deci $\widehat{MPO} \equiv \widehat{MPE'}$, adică P, O, E' sunt coliniare. Atunci $E = E'$, deci $NE \perp BC$.

Soluţia 2 (**Bogdan Posa**, elev, Motru (Gorj)). Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle ACD$ cu transversala $N - M - P$; obţinem că $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{MD}{MA} = 1$, deci $\frac{AN}{NC} = \frac{PD}{PC}$ (1). Apoi, tot cu Menelaus în $\triangle BCD$ cu transversala $E - O - P$, găsim că $\frac{OD}{OB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PD} = 1$, deci $\frac{PD}{PC} = \frac{BE}{CE}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{NA}{NC} = \frac{EB}{EC}$, prin urmare $NE \parallel AB$ şi atunci $NE \perp BC$.

G74. *Fie n puncte în spaţiu astfel încât oricare patru să formeze tetraedre de volum cel mult 1. Să se arate că există un tetraedru de volum cel mult 27 care să conţină în interior toate cele n puncte.*

Tudor Chirilă, elev, Iaşi

Soluţie. Dintre tetraedrele care se pot forma cu câte patru dintre punctele date, fie $ABCD$ tetraedrul de volum maxim. Prin vârfurile acestuia ducem plane paralele cu feţele opuse, obţinând astfel tetraedrul $A'B'C'D'$ care admite, conform unei proprietăţi cunoscute, ca centre de greutate ale feţelor tocmai punctele A, B, C, D. Tetraedrele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ sunt asemenea, cu raportul de asemănare $1:3$; rezultă că volumul lui $A'B'C'D'$ este cel mult 27. Să presupunem prin absurd că există un punct M, dintre cele n iniţiale, în exteriorul lui $A'B'C'D'$. Urmează că există o faţă a lui $ABCD$ (să presupunem că aceasta este (BCD)) astfel încât $d\,(M,(BCD)) > d\,(A,(BCD))$; evident atunci că $V_{MBCD} > V_{ABCD}$, ceea ce contrazice ipoteza de maximalitate şi încheie soluţia.



G75. *Fie $A_1A_2\dots A_n$ un poligon regulat de latură 1, $n \geq 4$. Pe latura $[A_1A_2]$ se consideră punctul P_1 cu $P_1A_1 = a \in (0,1)$. Din punctul P_1 se propagă o rază de lumină care se reflectă de laturile $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, ... , generând pe laturi punctele de incidenţă P_2, P_3, ... (presupunând că raza de lumină nu ajunge niciodată într-un vârf al poligonului) astfel încât $m(\widehat{A_2P_1P_2}) = \alpha \in \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right)$. Să se afle valoarea minimă a lui l pentru care P_l şi P_{l+1} nu aparţin la două laturi consecutive.*

Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

Soluţie. Să presupunem că $P_1, P_2, \dots, P_n$ sunt situate pe laturi consecutive. Deoarece unghiul de incidenţă este totdeauna egal cu unghiul de reflexie, avem
$$m(\widehat{P_{2k-1}P_{2k}}A_{2k}) = m(\widehat{P_{2k+1}P_{2k}A}_{2k+1}) = \frac{2\pi}{n} - \alpha, \quad \text{iar}$$
$$m(P_{2k}\widehat{P_{2k+1}A}_{2k+1}) = m(P_{2k}\widehat{P_{2k-1}A}_{2k-1}) = \alpha$$
pentru $2k+1 \leq m$.

De aici, $\triangle P_{i-1}A_iP_i \sim \triangle P_{i+1}A_iP_i$ pentru $i \leq m$, deci $\dfrac{P_{i-1}A_i}{P_iA_{i+1}} = \dfrac{P_iA_i}{P_iA_{i+1}}$. Să notăm $\dfrac{2\pi}{n} - \alpha = \alpha'$. Conform teoremei sinusurilor, $\dfrac{P_{2k-1}A_{2k}}{P_{2k}A_{2k}} = \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}$, în timp ce $\dfrac{P_{2k}A_{2k+1}}{P_{2k+1}A_{2k+1}} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$. De aici, $P_{2k+1}A_{2k+1} = P_{2k-1}A_{2k-1} + \left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 1\right)$, în timp ce, în mod similar, $P_{2k}A_{2k} = P_{2k-2}A_{2k-2} + \left(\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} - 1\right)$. Deoarece $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} > 1$, avem
$$P_{2k+1}A_{2k+1} > P_{2k-1}A_{2k-1} > \dots > P_1A_1, \quad \text{iar}$$
$$P_{2k}A_{2k} < P_{2k-2}A_{2k-2} < \dots < P_2A_2.$$

Determinăm cel mai mic k pentru care$P_{2k+1}A_{2k+1} > 1$. Deoarece $P_{2k+1}A_{2k+1} = P_1A_1 + k\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 1\right)$, acea valoare este $k_0 = \left[\dfrac{1-a}{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 1}\right] + 1$, deci valoarea căutată pentru l este $l = 2k_0$.

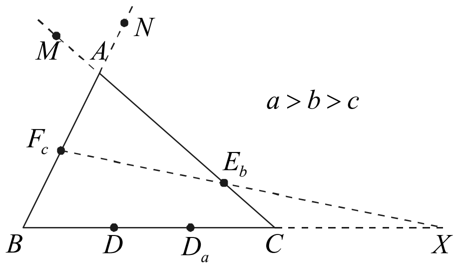
B. Nivel liceal

L66. *Fie ABC un triunghi, D şi D_a punctele în care cercurile înscris şi A-exînscris sunt tangente la BC şi E_b, F_c punctele în care cercurile B-exînscris şi*

C-exînscris sunt tangente la AC şi respectiv AB. Să se arate că punctele D, D_a, E_b, F_c sunt conciclice dacă şi numai dacă $AB = AC$ sau $m(\widehat{A}) = 90°$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Vom utiliza următoarele relaţii binecunoscute: $BD = CD_a = p - b$, $CD = BD_a = p - c$, $DD_a = b - c$, $BF_c = CE_b = p - a$, $AF_c = p - b$, $AE_b = p - c$.



Dacă $\triangle ABC$ este isoscel, cu $b = c$, atunci $BD = CD_a$ şi, deci, punctele D şi D_a coincid. Ca urmare D, D_a, E_b, F_c sunt conciclice (fiind, în acest caz, numai trei la număr).

Dacă $m(\widehat{A}) = 90°$, vom arăta că D, D_a,E_b, F_c sunt conciclice stabilind relaţia

$$XD \cdot XD_a = XF_c \cdot XE_b, \tag{1}$$

unde $\{X\} = DD_a \cap F_cE_b$. Mai întâi, aplicând teorema lui Menelaus pentru $\triangle ABC$ şi transversala F_cE_b, obţinem

$$\frac{XC}{XB} = \frac{CE_b}{AE_b} \cdot \frac{AF_c}{BF_c} = \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = \frac{p-b}{p-c},$$

de unde, ţinând seama că $XB = XC + a$, deducem că $XC = \dfrac{a\,(p-b)}{b-c}$.

Aceeaşi teoremă aplicată $\triangle XBF_c$ şi transversalei AC conduce la

$$\frac{XE_b}{E_bF_c} = \frac{AB}{AF_c} \cdot \frac{CX}{CB} = \frac{c}{p-b} \cdot \frac{a\,(p-b)}{a\,(b-c)} = \frac{c}{b-c}.$$

Cu teorema lui Pitagora obţinem $(E_bF_c)^2 = (AE_b)^2 + (AF_c)^2 = (p-b)^2 + (p-c)^2$ şi, ca urmare, $XE_b = \dfrac{c}{b-c}\sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2}$. Cu aceste pregătiri, avem

$$(1) \Leftrightarrow (XC + CD) \cdot (XC + CD_a) = (XE_b + E_bF_c) \cdot XE_b \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a\,(p-b)}{b-c} + p - c\right) \cdot \left(\frac{a\,(p-b)}{b-c} + p - b\right) =$$

$$= \left(\frac{c}{b-c}\sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2} + \sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2}\right) \frac{c}{b-c}\sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a\,(p-b) + (b-c)\,(p-c)}{b-c} \cdot \frac{(p-b)\,(a+b-c)}{b-c} = \frac{b}{b-c}\,\frac{c}{b-c}\left[(p-b)^2 + (p-c)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$[a\,(p-b) + (b-c)\,(p-c)] \cdot 2\,(p-b)\,(p-c) = bc\left[a^2 - 2\,(p-b)\,(p-c)\right] \Leftrightarrow$$

$$2\,(p-b)\,(p-c)\,[a\,(p-b) + (b-c)\,(p-c) + bc] = a^2bc \Leftrightarrow$$

$$[(a-b+c)\,(a+b-c)]\,[a\,(a-b+c) + (b-c)\,(a+b-c) + 2bc] = 4a^2bc \Leftrightarrow$$

$2bc \cdot 2a^2 = 4a^2bc$.

Reciproc, presupunem că punctele D, D_a, E_b, F_c sunt conciclice şi fie $\mathcal{C}$ cercul determinat de acestea. Notăm $\{M\} = \mathcal{C} \cap AC$ şi $\{N\} = \mathcal{C} \cap AB$. Exprimând puterile punctelor B şi C faţă de $\mathcal{C}$, obţinem relaţiile:

$$BF_c \cdot BN = BD \cdot BD_a, \quad \text{deci} \quad BN = \frac{(p-b)(p-c)}{p-a};$$
$$CE_b \cdot CM = CD_a \cdot CD, \quad \text{deci} \quad CM = \frac{(p-b)(p-c)}{p-a}.$$
Ca urmare, exprimând puterea lui A faţă de $\mathcal{C}$, vom avea
$$AE_b \cdot AM = AF_c \cdot AN \Leftrightarrow AE_b \cdot (CM - CA) = AF_c \cdot (BN - BA) \Leftrightarrow$$
$$(p-c)\left(\frac{(p-b)(p-c)}{p-a} - b\right) = (p-b)\left(\frac{(p-b)(p-c)}{p-a} - a\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}(p-c-(p-b)) = b(p-c) - c(p-b) \Leftrightarrow$$
$$\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}(b-c) = p(b-c) \Leftrightarrow b = c \quad \text{sau} \quad (p-b)(p-c) = p(p-a) \Leftrightarrow$$
$$b = c \quad \text{sau} \quad \sin^2\frac{A}{2} = \cos^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow b = c \quad \text{sau} \quad m(\widehat{A}) = 90^\circ.$$

Notă. O soluţie parţială, trigonometrică, s-a primit de la dl. **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea.

L67. *Dreptele paralele t_1 şi t_2 sunt tangente cercului $\mathcal{C}$ de centru O. Cercul $\mathcal{C}_1$ de centru O_1 este tangent la t_1 şi $\mathcal{C}$, iar cercul $\mathcal{C}_2$ de centru O_2 este tangent la t_2, $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_1$; cele trei cercuri sunt exterioare unul celuilalt. Să se arate că unghiul $\widehat{O_1OO_2}$ este ascuţit şi să se afle valoarea maximă a măsurii acestuia.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul OO_1O_2 avem că
$$\cos(\widehat{O_1OO_2}) = \frac{OO_1^2 + OO_2^2 - O_1O_2^2}{2 \cdot OO_1 \cdot OO_2} = \frac{(r+r_1)^2 + (r+r_2)^2 - (r_1+r_2)^2}{2(r+r_1)(r+r_2)} =$$
$$= \frac{r^2 + rr_1 + rr_2 - r_1r_2}{r^2 + rr_1 + rr_2 + r_1r_2} > 0,$$
de unde se deduce că $\widehat{O_1OO_2}$ este ascuţit.

Deci $\cos(\widehat{O_1OO_2}) = 1 - 2\dfrac{r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)} = 1 - 2\dfrac{1}{\left(1+\frac{r}{r_1}\right)\left(1+\frac{r}{r_2}\right)}$. Unghiul $\widehat{O_1OO_2}$ are măsură maximă atunci când produsul $\left(1+\dfrac{r}{r_1}\right)\left(1+\dfrac{r}{r_2}\right)$ este minim.

Aplicând teorema lui Casey pentru cercurile A, B, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$ (A, B degenerate) tangente exterior cercului $\mathcal{C}$ obţinem: $d_{AO_1} \cdot d_{O_2B} + d_{O_1O_2} \cdot d_{AB} = d_{AO_2} \cdot d_{BO_1}$. Evaluând distanţele tangenţiale se obţine imediat relaţia: $r = 2\sqrt{r_1r_2}$.

Apoi: $\left(1+\dfrac{r}{r_1}\right)\left(1+\dfrac{r}{r_2}\right) \geq \left(1+\dfrac{r}{\sqrt{r_1r_2}}\right)^2 = 9$ cu egalitate când $r_1 = r_2$.

Deci valoarea maximă a unghiului $\widehat{O_1OO_2}$ este $\arccos\dfrac{7}{9}$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Emanuel Vlad**, Sibiu, şi **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea. M. Olteanu a considerat $\cos(\widehat{O_1OO_2})$ sub forma
$$\cos(\widehat{O_1OO_2}) = 1 - \frac{2r_1r_2}{r^2 + r(r_1+r_2) + r_1r_2} \geq 1 - \frac{2r_1r_2}{\left(r+\sqrt{r_1r_2}\right)^2},$$

cu egalitate pentru $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$. Apoi, studiind variaţia funcţiei $f(t) = \frac{2t^2}{(r+t)^2}$, unde $t = \sqrt{r_1 r_2}$, observă că f este crescătoare, deci $f_{\max}(t) = f(t_{\max}) = f\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{2}{9}$, de unde $\cos(\widehat{O_1 O O_2}) \geq 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

L68. *a) Pentru $x, y, z \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea*

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

b) Folosind eventual a), să se arate că în orice triunghi, cu notaţiile uzuale, are loc inegalitatea

$$\sqrt{1 + 4 \cdot \frac{R}{r}} \geq 1 + \sqrt{\frac{p-a}{p-b}} + \sqrt{\frac{p-b}{p-a}}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. *a)* Prin ridicare la pătrat inegalitatea este echivalentă cu:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}},$$

adevărat conform inegalităţii mediilor. Egalitatea are loc când $xy = z^2$.

b) Cu notaţiile $x = p-a$, $y = p-b$ şi $z = p-c$ inegalitatea se scrie:

$$\sqrt{1 + \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz}} \geq 1 + \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{xyz + (x+y)(x+z)(y+z)} \geq \sqrt{xyz} + (x+y)\sqrt{z} \Leftrightarrow$$

$$xyz + (x+y)(x+z)(y+z) \geq xyz + (x+y)^2 \cdot z + 2z(x+y)\sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

$$(x+z)(y+x) \geq z(x+y) + 2z\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy + z^2 \geq 2z\sqrt{xy},$$

adevărat conform inegalităţii mediilor, cu egalitate când: $z = \sqrt{xy} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c(a+b)$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Emanuel Vlad**, Sibiu, şi **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea.

L69. *Pentru ce numere naturale $n \geq 3$, există în plan n puncte albastre şi n puncte roşii, oricare trei necoliniare, astfel încât în interiorul oricărui triunghi cu vârfurile albastre să existe cel puţin un punct roşu, iar în interiorul oricărui triunghi cu vârfurile roşii să existe cel puţin un punct albastru?*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Răspuns: $n = 3, 4$. Pentru $n = 3$, luăm, de exemplu, punctele albastre $A_1(0,0)$, $A_2(2,0)$, $A(1,2)$ şi punctele roşii $R_1(1,1)$, $R_2(0,3)$, $R_3(2,3)$. Pentru $n = 4$, luăm punctele albastre $A_1(0,0)$, $A_2(1,2)$, $A_3(3,2)$, $A_4(4,0)$ şi punctele roşii $R_1(1,1)$, $R_2(3,1)$, $R_3(0,3)$, $R_4(4,3)$.

Vom arăta că n nu poate fi mai mare decât 4 utilizând următoarea lemă:

Fie $A_1A_2\ldots A_k$ ($k \geq 3$) un poligon convex şi $B_1, B_2, \ldots, B_p \in \mathrm{Int}(A_1A_2\ldots A_k)$. Fie mulţimea $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_p\}$. Ştiind că oricare 3 puncte din

M sunt necoliniare, poligonul $A_1A_2\ldots A_k$ poate fi împărţit în $k+2p-2$ triunghiuri cu vârfurile în M.

Demonstraţie. Fixăm k şi folosim inducţia după $p\geq 0$. Pentru $p=0$, unim un vârf al poligonului cu toate celelalte şi obţinem $k-2$ triunghiuri. Presupunem afirmaţia adevărată pentru p şi o demonstrăm pentru $p+1$, adăugând punctul B_{p+1}. Dacă $T_1T_2T_3$ este triunghiul din partiţie care-l conţine pe B_{p+1}, unindu-l pe acesta cu T_1, T_2, T_3 vom obţine trei triunghiuri "noi", iar numărul de triungiuri creşte cu 2. Astfel lema este demonstrată.

Revenind la problemă, dacă $A_1A_2\ldots A_m$ este poligonul convex care conţine în interior şi în vârfuri toate punctele albastre, atunci în interiorul său vor fi $n-m$ puncte albastre. Deci există $2n-m-2$ triunghiuri disjuncte cu vârfurile albastre care conţin cel puţin $2n-m-2$ puncte roşii. Aplicând din nou lema pentru cele $2n-m-2$ puncte roşii obţinem că în interiorul lui $A_1A_2\ldots A_n$ există cel puţin $2n-m-4$ puncte albastre. Urmează că $2n-m-4\leq n-m$, deci $n\leq 4$ şi problema este rezolvată.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Emanuel Vlad**, Sibiu.

L70. *Fie $k,p\in\mathbb{N}^*$ şi un dreptunghi de dimensiuni $82k\times 2p$, acoperit complet şi fără suprapuneri cu dreptunghiuri 7×5 şi 6×4. Să se arate că numărul pătrăţelelor (x,y), x par, y impar, ale dreptunghiului mare, care sunt colţuri în dreptunghiuri 7×5, este egal cu numărul de dreptunghiuri 7×5. (Prin dreptunghiuri 7×5 înţelegem dreptunghiuri cu lungimea egală cu 7 şi lăţimea egală cu 5.)*

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie. Colorăm dreptunghiul mare în patru culori: roşu, galben, albastru, verde, folosind pătrăţele 2×2 ca în figura $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{R} & \mathrm{G}\\\hline \mathrm{A} & \mathrm{V}\\\hline\end{array}$, care să-l acopere. Fiecărei combinaţii de tip "x par, y impar" sau analoagele îi va corespunde, deci, una din culori.

Pentru fiecare dreptunghi 7×5 avem 4 moduri de coloane posibile, corespunzătoare culorii pătrăţelului din vârful său din stânga sus (se observă că aceasta determină în mod unic culoarea întregului dreptunghi): fie R, G, A, V numărul de dreptunghiuri 7×5 colorate în fiecare mod, numite în continuare R-dreptunghiuri sau similar.

Observăm că dreptunghiul mare conţine câte $41kp$ pătrăţele de fiecare culoare, iar un dreptunghi 6×4 conţine câte 6 pătrăţele de fiecare culoare. De asemenea, un R-dreptunghi conţine 12 pătrăţele roşii, 9 galbene, 9 albastre şi 6 verzi, pentru celelalte tipuri de dreptunghiuri 7×5 obţinându-se permutările ciclice respective de numere.

Scriind numărul total de pătrăţele în 2 moduri, obţinem că

$$164kp=35\,(R+G+A+V)+24z,$$

unde z este numărul de dreptunghiuri 6×4. De aici, $R+G+A+V=4n$, $n\in\mathbb{N}$ şi deci $35\,(kp-n)=6\,(z-kp)$, de unde $kp-n=6j$, $z-kp=35j$, $j\in\mathbb{Z}$. Obţinem că $z=n+41j$, $j\in\mathbb{Z}$.

Numărând pătrăţelele roşii din toate dreptunghiurile, obţinem că $12R+9G+$

$8A + 6V + 6z = 41kp$, ceea ce conduce la

$$27R + 21G + 19A + 15V = 82\,(kp - 6j)\,. \tag{1}$$

Numărând şi celelalte pătrăţele, obţinem că

$$21R + 27G + 15A + 19V = 82\,(kp - 6j) \tag{2}$$

$$19R + 15G + 27A + 21V = 82\,(kp - 6j) \tag{3}$$

$$15R + 19G + 21A + 27V = 82\,(kp - 6j) \tag{4}$$

Rezolvând acest sistem obţinem că $R = G = A = V = kp - 6j$.

Dar numărul pătrăţelelor (x, y) cu x par, y impar colţuri reprezintă tocmai numărul de colţuri colorate cu una dintre culori, adică unul dintre numerele R, G, A, V înmulţit cu 4, deoarece fiecare dreptunghi de unul din cele 4 tipuri are toate colţurile de o aceeaşi culoare. Cum numărul total de dreptunghiuri 7×5 este de asemenea unul dintre R, G, A, V înmulţit cu 4, deoarece $R = G = A = V$, rezultă concluzia.

L71. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fixat. Să se determine cea mai tare inegalitate de forma*

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + n^2 - 1} \leq m \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + M,$$

unde m, M nu depind de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, valabilă pentru orice numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitive şi cu produsul 1.

Gabriel Dospinescu, Bucureşti

Soluţie. Luând $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, obţinem că $mn + M \geq n^2$ (1). Luând $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{x}$ şi $a_1 = x^{n-1}$, $x > 0$, obţinem

$$\sqrt{x^{2n-2} + n^2 - 1} + (n-1)\sqrt{\frac{1}{x^2} + n^2 - 1} \leq m\left(x^{n-1} + \frac{n-1}{x}\right) + M, \quad \forall x > 0$$

$$\sqrt{1 + \frac{n^2 - 1}{x^{2n-2}}} + (n-1)\sqrt{\frac{1}{x^n} + \frac{n^2 - 1}{x^{2n-1}}} \leq m\left(1 + \frac{n-1}{x^n}\right) + \frac{M}{x^{n-1}}, \quad \forall x > 0$$

de unde deducem că $m \geq 1$.

Acum:

$$m\sum_{k=1}^{n} a_k + M \geq m\sum_{k=1}^{n} a_k + n^2 - mn \geq \sum_{k=1}^{n} a_k + n^2 - n.$$

Mai rămâne de verificat că pentru $m = 1$ şi $M = n^2 - n$ are loc inegalitatea din enunţ. Să arătăm că:

$$\sqrt{x^2 + n^2 - 1} \leq x + \frac{n\,(n-1)}{x + n - 1}, \quad x > 0.$$

Aceasta se scrie echivalent $\dfrac{n^2 - 1}{x + \sqrt{x^2 + n^2 - 1}} \leq \dfrac{n\,(n-1)}{x + n - 1}$ şi rezultă din faptul că $\sqrt{x^2 + n^2 - 1} = \sqrt{x^2 + \dfrac{n^2 + \cdots + 1^2}{n^2 - 1}} \geq \dfrac{x + n^2 - 1}{n}$. Deci

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + n^2 - 1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k + n\,(n-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k + n - 1}.$$

Este suficient să arătăm că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k+n-1} \le 1$. Să notăm $a_i = x_i^n$, avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+a_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+\frac{x_k^{n-1}}{x_1x_2\cdots x_{k-1}x_{k+1}\cdots x_n}} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-1+\frac{(n-1)x_k^{n-1}}{x_1^{n-1}+\cdots+x_{k-1}^{n-1}+x_{k+1}^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_1^{n-1}+\cdots+x_{k-1}^{n-1}+x_{k+1}^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}}{x_1^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}} = 1$$

(am aplicat inegalitatea mediilor). Aşadar cea mai tare inegalitate se obţine pentru $m = 1$ şi $M = n(n-1)$.

L72. *Fie a, b numere raţionale, pozitive, distincte, astfel încât $a^n - b^n \in \mathbb{Z}$ pentru o infinitate de numere naturale n. Să se arate că a şi b sunt întregi.*

Gabriel Dospinescu, Bucureşti

Soluţie. Să scriem $a = \dfrac{x}{z}$, $b = \dfrac{y}{z}$ cu x, y, z naturale distincte şi $(x, y, z) = 1$. Avem deci $z^n \mid x^n - y^n$ pentru o infinitate de numere n. Fie M mulţimea acestor numere n. Să presupunem că $z > 1$ şi fie p un factor prim al lui z. Presupunem că p nu divide pe x, deci nici pe y. Studiem separat două cazuri:

(i) Dacă $p = 2$. Fie n pentru care $2^n \mid x^n - y^n$ şi fie $n = 2^{u_n} v_n$, cu v_n impar. Notăm $v_q(s)$ exponentul numărului prim q din descompunerea lui s. Are loc:

$$x^{2^n v_n} - y^{2^n v_n} = (x^{v_n} - y^{v_n})(x^{v_n} + y^{v_n})\cdots\left(x^{2^{u_n-1}v_n} + y^{2^{u_n-1}v_n}\right).$$

Cum $v_n(x^{v_n} - y^{v_n}) = v_2(x-y)$ şi $v_2(x^{v_n} + y^{v_n}) = v_2(x+y)$, iar pentru $k > 0$ avem $x^{2^k v_n} + y^{2^k v_n} \equiv 2 \pmod 4$, urmează că:

$$n = 2^{u_n} v_n \le v_2(x^n - y^n) \le v_2(x-y) + v_2(x+y) + u_n - 1.$$

Dar această relaţie se întâmplă numai dacă şirul $(2^{u_n})_{n\in M}$ este mărginit, de unde $(v_n)_{n\in M}$ este mărginit, adică M este finită, fals.

(ii) Dacă p este impar. Fie $d > 0$ cel mai mic astfel ca $p \mid x^d - y^d$. Pentru orice $n \in M$ vom avea $p \mid x^n - y^n$. Fie $x = t_n$, $y = t_n$, cu $(u, v) = 1$. Atunci $p \mid \left(u^d - v^d, u^n - v^n\right) = u^{(n,d)} - v^{(n,d)} \mid x^{(n,d)} - y^{(n,d)}$ şi din alegerea lui d rezultă că $d \mid n$. Fie $n \in M$, putem scrie $n = md$, $n \in \mathbb{N}$. Fie $A = x^d$ şi $B = y^d$. Rezultă că $p^m \mid p^n \mid x^n - y^n = A^m - B^m$ pentru o infinitate de numere m, pe care o notăm cu R. În plus, $p \mid A - B$. Pentru $m \in R$, avem $m \le v_p(A^m - B^m)$.

Să scriem $m = p^i j$, cu j prim cu p. Atunci

$$A^m - B^m = \left(A^j - B^j\right)\frac{A^{pj} - B^{pj}}{A^j - B^j}\cdots\frac{A^{ip^i} - B^{jp^i}}{A^{jp^{i-1}} - B^{jp^{i-1}}}$$

(am presupus că $i > 1$, căci concluzia la care vom ajunge se menţine trivial pentru $i = 0, 1$). Să observăm că nu putem avea $p^2 \mid \dfrac{A^{ip^i} - B^{jp^i}}{A^{jp^{i-1}} - B^{jp^{i-1}}}$, pentru $k > 1$. Dacă ar fi aşa, am avea $p^2 \mid A^{jp^k} - B^{jp^k} \Rightarrow p^2 \mid A^{pj} - B^{pj}$ (teorema lui Euler). Însă mai avem şi $p^2 \mid A^j p^{k-1(p-1)} + A^{jp^{k-1}(p-2)} B^{jp^{k-1}} + \cdots + B^{jp^{k-1}(p-1)}$. Din $p^2 \mid A^j - B^j$, deducem că $A^{jp^{k-1}(p-1)} + A^{jp^{k-1}(p-2)} B^{jp^{k-1}} + \cdots + B^{jp^{k-1}(p-1)} \equiv pA^{jp^{k-1}(p-1)} \left(\bmod p^2\right)$, deci ar urma $p \mid A$, adică $p \mid x$, fals.

Nu putem avea nici $p^2 \mid \dfrac{A^{pj} - B^{pj}}{A^j - B^j}$. Dacă ar fi aşa, cum $p \mid A - B$ putem scrie $A^j = B^j + wp$ şi atunci un calcul simplu cu binomul lui Newton arată că

$$\frac{A^{pj} - B^{pj}}{A^j - B^j} = A^{j(p-1)} + A^{j(p-2)} B^j + \cdots + B^{j(p-1)} \equiv$$
$$\equiv pB^{j(p-1)} + \frac{p-1}{2} B^{j(p-2)} p^2 \equiv pB^{j(p-1)} \left(\bmod p^2\right)$$

şi ar urma că $p \mid B$, adică $p \mid y$, fals.

Rezultă din toate aceste observaţii că $m \le v_p\left(A^m - B^m\right) \le v_p\left(A^j - B^j\right) + C$. Tot din faptul că $A \equiv B \left(\bmod p\right)$, urmează că $v_p\left(A^j - B^j\right) = v_p\left(A - B\right)$. Prin urmare $m \le v_p\left(A - B\right) + [\log_2 m]$, pentru o infinitate de numere naturale m, ceea ce este imposibil. Am arătat aşadar că $p \mid x$ şi $p \mid y$, contrazicând faptul că $(x, y, z) = 1$. Deci $z = 1$ şi a, b sunt întregi.

L73. *Fie $k \in \mathbb{N}^*$, $k \ge 3$. Să se determine $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ pentru care*

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_k}}} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_k}, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_k \in [0, \infty).$$

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Fie $a_1 = x^2$, $a_2 = x^4$, $\ldots$, $a_k = x^{2^k}$. Atunci

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_k}}} = x\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{2}}},$$

iar $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_k} = x^{\frac{2\left(2^k - 1\right)}{n}}$, deci ar trebui ca $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{2}}} \ge x^{\frac{2\left(2^k - 1\right)}{n} - 1}$ pentru orice $x \in [a, \infty)$.

Dacă $n < 2\left(2^k - 1\right)$, inegalitatea este falsă pentru x suficient de mare, în timp ce dacă $n > 2\left(2^k - 1\right)$ inegalitatea este falsă pentru x suficient de mic.

Fie acum $n = 2\left(2^k - 1\right)$. Rămâne deci să demonstrăm că

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_k}}} \ge \sqrt[2\left(2^k - 1\right)]{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_k \in [0, \infty)$.

În acest scop, demonstrăm următoarea inegalitate

$$\left(a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_m}}\right)^{2^m - 1} \ge \prod_{i=1}^{m} \left(2^i - 1\right) a_i, \quad \forall m \ge 3,\ \forall a_1, a_2, \ldots, a_m \in [0, \infty).$$

Pentru $m = 3$, avem de demonstrat că $\left(a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}\right)^7 \ge 21 a_1 a_2 a_3$. Dar

$$\left(a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}\right)^7 \ge 7a_1\left(\sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}\right)^6 = 7a_1\left(a_2 + \sqrt{a_3}\right)^3 \ge 7a_1 \cdot 3a_2\left(\sqrt{a_3}\right)^2 = 21 a_1 a_2 a_3,$$

q.e.d.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru m numere şi o demonstrăm pentru $m + 1$. Observăm că

$$\left(a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_m}}\right)^{2^{m+1}-1}\geq\left(2^{m+1}-1\right)a_1\left(\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_m}}\right)^{2^{n+1}-2}=$$

$$=\left(2^{m+1}-1\right)a_1\left(a_2+\sqrt{a_3+\cdots+\sqrt{a_n}}\right)^{2^n-1}\geq$$

$$\geq\left(2^{n+1}-1\right)a_1\prod_{i=1}^{n}\left(2^i-1\right)a_{i+1}=\prod_{i=1}^{n+1}\left(2^i-1\right)a_i,$$

q.e.d. Utilizând inegalitatea de mai sus rezultă imediat concluzia problemei.

L74. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ şi $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă şi $\int_a^b x^k f(x)\,dx=0$ pentru $0\leq k\leq n$, atunci f are cel puţin $n+1$ zerouri distincte în (a,b).*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Din enunţ se observă că $\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx=0$ pentru orice polinom $p\in\mathbb{R}[X]$ de grad mai mic sau egal cu n. Facem de asemenea observaţia că dacă $a=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_h<\beta_{h+1}=b$, $h\geq 1$, atunci polinomul $(X-\beta_1)(X-\beta_2)\cdots\cdot(X-\beta_n)$ are semn constant pe $\left(\beta_k,\beta_{k+1}\right)$, $k=\overline{0,h-1}$, iar pe orice două intervale consecutive $\left(\beta_k,\beta_{k+1}\right)$, $\left(\beta_{k+1},\beta_{k+2}\right)$ polinomul are semne contrare.

Deoarece f este continuă, iar $\int_a^b f(x)\,dx=0$, rezultă că f are cel puţin un zero pe (a,b). Presupunem prin reducere la absurd că f are numai k zerouri distincte în (a,b), $1\leq k\leq n$; fie acestea $a<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k<b$. Notăm de asemenea $\alpha_0=0$, $\alpha_{k+1}=b$.

Fie $\left(\beta_i,\beta_{i+1}\right)$ intervalele pe care f are semn constant (exceptând eventual unul sau mai multe zerouri situate în interior), $i=\overline{0,h}$, $\beta_0=a$, $\beta_{h+1}=b$, $h\leq k$. Atunci există un polinom p de grad h cu acelaşi semn cu f pe fiecare interval $\left(\beta_i,\beta_{i+1}\right)$, conform unei observaţii anterioare. Cum $\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx=0$, iar $p(x)\,f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, rezultă că $f\equiv 0$ pe $[a,b]$, contradicţie. De aici rezultă că f are cel puţin $n+1$ zerouri distincte.

L75. *Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care este adevărată inegalitatea*

$$\cos\varphi<\frac{1}{\sqrt[8]{1+n\sin^4\varphi}},\quad\forall\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Notând $\sin^2\varphi=t\in(0,1]$, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $(1-t)^4\left(1+nt^2\right)<1$, $\forall t\in(0,1]$.

Fie $f(t)=(1-t)^4\left(1+nt^2\right)$, $t\in(0,1]$. Atunci $f(t)=2(t-1)^3\left(3nt^2-nt+2\right)$, iar dacă $0\leq n\leq 23$, atunci $f(t)<0$, $\forall t\in(0,1]$, deci f strict descrescătoare pe $(0,1]$ şi $f(t)<f(0)=1$. Dacă $n\geq 24$, atunci maximul funcţiei f pe $(0,1]$ se atinge pentru $t_{\max}=\dfrac{n+\sqrt{n^2-24n}}{6n}$. Se observă că maximul funcţiei depinde strict crescător de n, pentru $n=34$, $f(t_{\max})=0,001$, iar pentru $n=35$, $f(t_{\max})=-0,009$. De aici, $n\in\{0,1,\ldots,34\}$.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la **Marius Olteanu**, Rm. Vâlcea.