PROBLEME ŞI SOLUŢII

Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2003

Clasele primare

P.54. *Calculaţi a şi b dacă $46 - a = 36 + a$ şi $b - 3 = 17 - b$.*
(*Clasa I*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

Soluţie. $46 - a = 36 + a$ se scrie $36 + 10 - a = 36 + a$, de unde $10 - a = a$ şi $a + a = 10$, deci $a = 5$. Analog, $b - 3 = 17 - b$ se scrie $b = 3 + 17 - b$, de unde $b + b = 20$, deci $b = 10$.

P.55. *În câte moduri pot fi aranjate în linie dreaptă 9 mingi roşii şi una galbenă?*
(*Clasa I*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Toate mingile ocupă 10 locuri. Mingea galbenă poate ocupa fiecare loc din cele 10. Sunt 10 moduri.

P56. *Cu cinci ani în urmă, suma vârstelor a trei copii era de 11 ani. Care va fi suma vârstelor aceloraşi copii peste 6 ani?*
(*Clasa a II-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

Soluţie. In prezent suma vârstelor copiilor este $11 + 3 \cdot 5 = 26$ ani, iar peste 6 ani aceasta va fi $26 + 3 \cdot 6 = 44$ ani.

P.57. *În câte moduri pot fi împărţiţi 8 băieţi în două echipe de câte 4 jucători, dacă Petru vrea să fie în echipă cu Mihai şi Dan, dar nu vrea să fie cu Avram?*
(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, elevă, Iaşi**

Soluţie. În gruparea Petru, Mihai, Dan mai trebuie un singur băiat. Acesta poate fi luat din restul băieţilor, cu excepţia lui Avram. Al patrulea elev din echipă poate fi ales în patru moduri.

P. 58. *Să se arate că suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 100$ împărţită la 3 dă restul 1.*
(*Clasa a III-a*) **Alexandru - Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

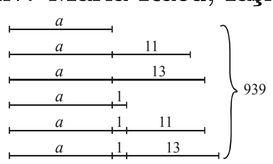
Soluţie. Suma se scrie $1 + (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \ldots + (3 \cdot 33 + 1)$. Restul împărţirii la 3 este acelaşi cu restul împărţirii sumei $\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{34 \text{ ori}}$ la 3, care este 1.

P.59. *Fie a şi b două numere consecutive. Suma acestor numere împreună cu numerele obţinute mărind cu 12 fiecare dintre vecinii lor este 939. Care sunt cele două numere?*
(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Considerăm $b = a + 1$. Folosim metoda figurativă. Primul număr este

$[939 - (11 + 13 + 1 + 1 + 11 + 1 + 13)] : 6 = 888 : 6 = 148$.

Al doilea număr este $148 + 1 = 149$.



P.60. *Din 16 bile, una este mai grea decât celelalte 15, care au mase egale. Care este cel mai mic număr de cântăriri prin care se poate stabili bila mai grea?*
(*Clasa a III-a*) **Carmen Ciolacu, elevă, Iaşi**

Soluţie. Aşezăm câte 8 bile pe fiecare taler. După prima cântărire se determină grupul de 8 bile care conţine bila mai grea. Din acestea aşezăm câte 3 pe fiecare taler. Dacă balanţa este în echilibru, atunci bila mai grea se află în perechea rămasă.

Printr-o nouă cântărire se află bila mai grea. Dacă balanţa nu este în echilibru, atunci bila mai grea se află într-o grupare de 3 bile. Aşezând câte o bilă pe fiecare taler se determină bila mai grea. Numărul minim de cântăriri este 3.

P.61. *Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs este* 3. *Diferenţa dintre cele două numere este* 7. *Care sunt cele două numere?*
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

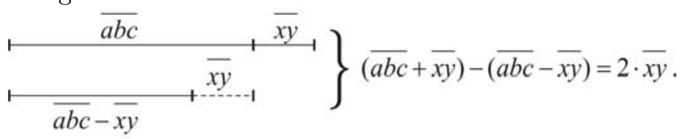
Soluţie. Suma celor două numere poate fi 13 sau 31. Cum diferenţa numerelor este 7, în primul caz numerele sunt 3 şi 10, iar în al doilea numerele sunt 12 şi 19.

P.62. *Două ceasuri au început să funcţioneze la aceeaşi oră. Se constată că la fiecare* 30 *minute (faţă de ora exactă) unul rămâne în urmă cu un minut iar celălalt avansează cu un minut. La un moment dat orele indicate de aceste ceasuri sunt:* 18 *h* 36 *min şi* 19 *h* 24 *min. La ce oră au început să funcţioneze?*
(*Clasa a IV-a*) **Felicia Amihăiesei, elevă, Iaşi**

Soluţie. Cele două ceasuri se abat cu acelaşi număr de minute faţă de ora exactă, unul prin lipsă iar celălalt prin adaos. În momentul citirii abaterea este (19 h 24 min – 18 h 36 min) : 2 = 48 min : 2 = 24 min. Ceasurile au fost citite la ora 19 h 24 min – 24 min = 19 h. Numărul de ore în care ceasurile au funcţionat este 24 : 2 = 12. Ceasurile au început să funcţioneze la ora $19 - 12 = 7$.

P.63. *Alege un număr format din trei cifre. Scrie la dreapta lui un număr format din două cifre. Scoate din numărul format de* 99 *ori numărul format din trei cifre. Din rezultat scoate diferenţa dintre numărul de trei cifre şi numărul de două cifre şi scrie rezultatul. Eu îţi ghicesc numărul format din două cifre. Cum se explică acest lucru?*
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Soluţie. Fie $\overline{abc}$ numărul de trei cifre şi $\overline{xy}$ numărul de două cifre. Avem $\overline{abcxy} = \overline{abc00} + \overline{xy} = 100 \cdot \overline{abc} + \overline{xy}$, $100 \cdot \overline{abc} + \overline{xy} - 99 \cdot \overline{abc} = \overline{abc} + \overline{xy}$. În continuare folosim metoda figurativă.



În urma efectuării operaţiilor indicate în problemă se obţine dublul numărului de două cifre.

Clasa a V-a

V.41. *Fie a număr natural compus astfel încât dacă* $p \mid a$, *cu p prim, atunci* $p+1 \mid a$. *Să se arate că* $12 \mid a$ *şi să se afle cel mai mare număr a de trei cifre.*

Ciprian Baghiu, Iaşi

Soluţie. Fie p un divizor prim al lui a, conform enunţului. Atunci $p+1 \mid a$, deci $p\,(p+1) \mid a$ şi, cum $p\,(p+1)$ este număr par, deducem că $2 \mid a$. Din $2 \mid a$ rezultă $3 \mid a$ şi apoi $4 \mid a$; prin urmare $12 \mid a$.

Cel mai mare număr de trei cifre divizibil cu 12 este $996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$; cum $84 \nmid 996$, deducem că 996 nu este soluţie. La fel 984 nu este soluţie. Numărul $972 = 2^2 \cdot 3^5$ verifică cerinţele problemei.

V.42. *Se dau numerele* $\overline{xy}$, $\overline{ab}$ *scrise în baza* 10 *astfel încât* $\overline{xy}$ *divide* $\overline{ab}$. *Să se* *arate că $x = y$ dacă şi numai dacă $a = b$.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $x = y$. Atunci din $\overline{xx} = 11x \mid \overline{ab}$ rezultă că $11 \mid \overline{ab}$, deci $\overline{ab} \in \{11, 22, 33, \ldots, 99\}$, adică $a = b$.

Fie $a = b$. Atunci $\overline{xy} \mid 11a$ şi, cum a este cifră nenulă, deducem că $\overline{xy}$ se divide la 11. Ca mai sus, avem $x = y$.

V.43. *Să se afle cifrele a şi b ştiind că $a \cdot b = \overline{cd}$ şi $a^b = \overline{dc}$.*

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. Evident, $a \in \{2, 3, \ldots, 9\}$. Dacă $a = 2$, atunci $b \geq 5$ şi cum $2 \cdot 5 = 10$ şi $2^5 = 32$, $2 \cdot 6 = 12$ şi $2^6 = 64$, iar $2^7 > 100$ rezultă că nu avem soluţii. Dacă $a = 3$, urmează $b \geq 4$ şi din $3 \cdot 4 = 12$ şi $3^4 = 81$, iar $3^5 > 100$ deducem că nici în acest caz nu avem soluţii. Considerând şi verificând toate posibilităţile, obţinem soluţia $a = 9$ şi $b = 2$.

V.44. *Să se afle $x, y, z \in \mathbb{Q}_+^*$ pentru care $x^n = yz$, $y^n = xz$, $z^n = xy$, cu $n \in \mathbb{N}$.*

N. N. Hârţan, Iaşi

Soluţie. Avem $x^{n+1} = y^{n+1} = z^{n+1} = xyz$, deci, în mod necesar, $x = y = z$. Condiţiile iniţiale se reduc la $x^n = x^2$, prin urmare, $x = y = z = 1$ dacă $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ şi $x = y = z \in \mathbb{Q}_+^*$ dacă $n = 2$.

V.45. *Se dau şase urne, unele conţinând bile. Fie operaţia: se aleg trei urne şi se pune câte o bilă în fiecare dintre ele.*

a) Compoziţia urnelor fiind $0, 0, 4, 6, 6, 8$, să se indice o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

b) Compoziţia urnelor fiind $0, 1, 2, 3, 4, 4$, să se arate că nu există o succesiune de operaţii în urma cărora toate urnele să conţină acelaşi număr de bile.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. *a*) O succesiune de operaţii ce atinge scopul este $(0, 0, 4, 6, 6, 8) \to (1, 1, 5, 6, 6, 8) \to (2, 2, 6, 6, 6, 8) \to (3, 3, 7, 6, 6, 8) \to (4, 4, 8, 6, 6, 8) \to (5, 5, 8, 7, 6, 8) \to (6, 6, 8, 8, 6, 8) \to (7, 7, 8, 8, 7, 8) \to (8, 8, 8, 8, 8, 8)$.

b) Presupunem că după n operaţii urnele conţin acelaşi număr m de bile, rezultă că numărul total de bile din urne este $6m = 3n + 14$, imposibil.

Clasa a VI-a

VI.41. *Pe opt cartonaşe sunt înscrise câte unul din numerele 1, 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 3^4. Dacă $P(k)$ este probabilitatea ca, extrăgând două cartonaşe, numerele obţinute să aibă în total k divizori distincţi, să se rezolve inecuaţia $P(k) \geq 1/7$.*

Dumitru Dominic Bucescu, Iaşi

Soluţie. Considerând cele 28 de posibilitaţi de extragere a cartonaşelor şi numărând divizorii distincţi ai numerelor extrase, obţinem: $P(1) = 0$; $P(2) = \dfrac{2}{28}$; $P(3) = \dfrac{5}{28}$; $P(4) = \dfrac{8}{28}$; $P(5) = \dfrac{7}{28}$; $P(6) = \dfrac{3}{28}$; $P(7) = \dfrac{2}{28}$; $P(8) = \dfrac{1}{28}$ şi $P(k) = 0$, $k \geq 9$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $P(k) \geq \dfrac{1}{7}$ este $S = \{3, 4, 5\}$.

VI.42. *Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$ pentru care $84x + 91y + 98z = 2002$. Să se afle valoarea maximă a sumei $x + y + z$.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $12x + 13y + 14z = 286$ sau $12(x+y+z) = 286 - (y+2z)$. De aici, rezultă că $x+y+z$ este maxim dacă $y+2z$ este minim şi 12 divide pe $286 - (y+2z)$. Obţinem $x+y+z$ maxim pentru $y+2z = 10$. Valoarea maximă a expresiei este 23 şi se obţine pentru $(x,y,z) \in \{(18,0,5);(17,2,4);(16,4,3);(15,6,2);(14,8,1);(13,10,0)\}$.

Notă. D-l **Titu Zvonaru**, Comăneşti (Bacău), stabileşte valoarea minimă a sumei $x+y+z$. Într-adevăr, dacă $x+y+z \leq 19$, atunci $y+2z \leq 57$ şi am avea $12(x+y+z)+y+2z \leq 12 \cdot 19 + 57 = 285$; prin urmare, $x+y+z \geq 20$. Dacă $x+y+z = 20$, atunci $y+2z = 46$. Pentru $y < 15$, $z < 15$, avem $y+2z < 45$. Pentru $16 \leq y \leq 20$, avem că $z \leq 4$, deci $y+2z \leq 28$. Pentru $16 \leq z \leq 20$, avem $y \leq 4$, deci $y+2z \leq 44$. Rezultă că valoarea minimă a sumei $x+y+z$ este 21, care se obţine, de exemplu, pentru $x=2$, $y=4$, $z=15$.

VI.43. *Fie* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^*$ *pentru care* $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\exists i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i \neq j$, *astfel încât* $a_k = a_i + a_j$. *Să se arate că* $n \geq 6$.

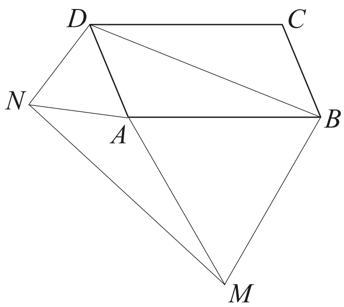
Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Putem presupune că $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Considerând numărul a_n, există $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i \neq j$, astfel ca $a_n = a_i + a_j$. Dacă $a_i < 0$, $a_j < 0$, atunci $a_n < a_i$, imposibil. La fel, $a_i < 0$, $a_j > 0$ implică $a_n < a_j$, imposibil. Deci a_i şi a_j sunt pozitive şi atunci mulţimea conţine cel puţin trei numere pozitive. Considerând numărul a_1 deducem că mulţimea conţine cel puţin trei numere negative, prin urmare $n \geq 6$.

Un exemplu de mulţime cu 6 elemente este $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ iar una cu $n \geq 6$ elemente este $\{-3,-2,-1,1,2,3,\ldots,n-3\}$.

VI.44. *Fie* $ABCD$ *un paralelogram şi* MAB, NAD *triunghiuri echilaterale construite în exteriorul acestuia. Demonstraţi că* $[MN] \equiv [BD]$ *dacă şi numai dacă* $ND \parallel MB$.

Ciprian Baghiu, Iaşi



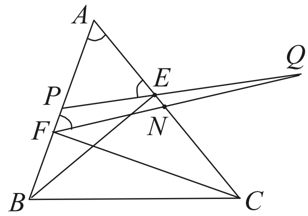
Soluţie. Presupunem $[MN] \equiv [BD]$. Din congruenţa triunghiurilor BAD şi MAN deducem că $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{MAN}) = \dfrac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$, deci $m(\widehat{BAN}) = 180^\circ$, adică punctele B, A, N sunt coliniare. Cum $\widehat{MBN} \equiv \widehat{DNB}$, rezultă $MB \parallel ND$.

Presupunem $MB \parallel ND$. Ca urmare, $m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ADB}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, deci $m(\widehat{BAD}) = 120^\circ$; totodată $m(\widehat{MAN}) = 120^\circ$ şi atunci triunghiurile MAN şi BAD sunt congruente, de unde rezultă că $[BD] \equiv [MN]$.

VI.45. *Fie* E, F *picioarele înălţimilor din* B *şi* C *ale triunghiului ascuţitunghic* ABC. *Dacă* P, N *sunt mijloacele laturilor* $[AB]$, *respectiv* $[AC]$, *iar* $\{Q\} = PE \cap FN$, *să se arate că* $m(\widehat{PQF}) = \left|180^\circ - 3 \cdot m(\widehat{A})\right|$. *(În legătură cu Q1086 din* ***Parabola****, nr. 3/2000)*

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţie. Fie Q exterior triunghiului ABC. Din $\triangle AEB$ dreptunghic în E, cu (EP) mediană, deducem că triunghiul AEP este isoscel cu $\widehat{AEP} \equiv \widehat{PAE}$; deci $m(\widehat{QPF}) = 2m(\widehat{A})$. La fel, din triunghiul dreptunghic AFC cu mediana (FN) deducem $\widehat{NFA} \equiv \widehat{FAN}$. Din $\triangle PQF$ rezultă că $m(\widehat{PQF}) = 180° - 3m(\widehat{A})$. Să remarcăm că punctul Q este exterior dacă $m(\widehat{A}) < 60°$. Cazul în care Q este interior triunghiului ABC, ce corespunde situaţiei $m(\widehat{A}) > 60°$, se tratează folosind aceleaşi argumente. Dacă $m(\widehat{A}) = 60°$, dreptele PE şi FN sunt paralele şi putem considera că $m(\widehat{PQF}) = 0°$.



Clasa a VII-a

VII.41. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}^2$ *ecuaţia* $\dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} = 1$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

Notă. Mai multe soluţii ale acestei probleme sunt date în articolul prezent în acest număr la p. 109.

VII.42. *Să se arate că* $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq (|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|+|a|)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluţie. Notând $|a| = x$, $|b| = y$, $|c| = z$, $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, inegalitatea este echivalentă cu $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) \geq (x+y)(y+z)(z+x)$, $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ .Avem $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = x^2y^2+x^2+y^2+1 \geq x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$, deci $\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \geq$ $\geq x+y$. La fel, au loc: $\sqrt{(x^2+1)(z^2+1)} \geq x+z$ şi $\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)} \geq y+z$. Prin înmulţirea ultimelor trei relaţii se obţine inegalitatea dorită.

Egalitate se obţine pentru $xy = 1$, $yz = 1$, $zx = 1$, deci pentru $x = y = z = 1$ sau $|a| = |b| = |c| = 1$.

VII.43. *Pentru* $n \in \mathbb{N}$, *notăm cu* $s(n)$ *numărul de reprezentări distincte ale lui* n *ca sumă de două numere naturale* ($n = a + b$ *şi* $n = b + a$ *constituie aceeaşi reprezentare*). *Să se arate că:*

a) $s(m+n) = s(m) + s(n) - \dfrac{1}{2}\left[1 + (-1)^{mn}\right]$; *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s(k) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. Arătăm că $s(n) = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$. Într-adevăr, pentru n par, $n = 2k$, avem: $n = 0 + n = 1 + (n-1) = \ldots = k + k$, deci $s(n) = k + 1 = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$. Pentru n impar, $n = 2k+1$, avem: $n = 0 + n = 1 + (n-1) = \ldots = k + (k+1)$, deci $s(n) = k + 1 = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

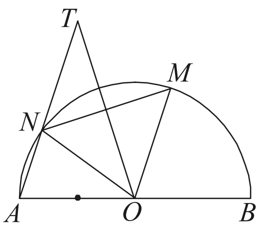
a) Relaţia se demonstrează analizând paritatea numerelor m şi n.

b) Dacă $n = 2k+1$, avem: $s(0) + s(1) + \ldots + s(n) = 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots +$ $+ k + k = k(k+1) = \left[\dfrac{n}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$. Dacă $n = 2k$, avem $s(0) + s(1) + \ldots + s(n) =$ $= 2(1 + 2 + \ldots + (k-1)) + k = k^2 = \left[\dfrac{n}{2}\right] \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

VII.44. *Fie $[AB]$ diametru al cercului $\mathcal{C}$ de centru O; $N, M \in \mathcal{C}$ astfel încât $m(\widehat{AON}) = 36°$, iar $[OM$ este bisectoare pentru $\widehat{NOB}$. Dacă T este simetricul lui O faţă de MN, să se arate că proiecţia lui T pe AB este mijlocul lui $[AO]$.*

Valentina Blendea, Iaşi

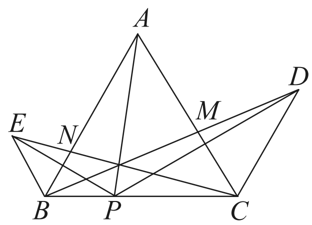
Soluţie. În triunghiul TNO isoscel, $m(\widehat{TNO}) = 180° - 2m(\widehat{NOT}) = 180° - \dfrac{1}{2}m(\widehat{NOB}) = 108°$. În triunghiul isoscel OAN, $m(\widehat{ANO}) = \dfrac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$, deci $m(\widehat{TNO}) + m(\widehat{ANO}) = 180°$, prin urmare T, N, A sunt coliniare. Cum $m(\widehat{TAO}) = m(\widehat{TOA}) = 72°$, triunghiul TAO este isoscel şi concluzia este imediată.



VII.45. *Fie $\triangle ABC$ echilateral, iar $P \in (BC)$. Notăm cu D, E simetricele lui P faţă de AC, respectiv AB. Să se arate că dreptele AP, BD şi CE sunt concurente.*

Constantin Cocea şi Julieta Grigoraş, Iaşi

Soluţie. Fie $\{M\} = BD \cap AC$, $\{N\} = CE \cap AB$; $AB = a$, $BP = x$, $PC = a - x$. Din asemănarea triunghiurilor DMC şi BMA găsim $\dfrac{CM}{MA} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{a-x}{a}$, iar din asemănarea triunghiurilor BEN şi ACN găsim $\dfrac{BE}{AC} = \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{x}{a}$.



În triunghiul ABC avem $\dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CM}{MA} \cdot \dfrac{AN}{NB} = 1$; conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AP, BM, CN sunt concurente.

Clasa a VIII-a

VIII.41. *Fie f_1, f_2, f_3 funcţii liniare ale căror grafice sunt drepte concurente două câte două. Cele trei drepte sunt concurente dacă şi numai dacă există unic $\beta \in \mathbb{R}$ şi există $u \neq v \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$\frac{f_1(u) - \beta}{f_1(v) - \beta} = \frac{f_2(u) - \beta}{f_2(v) - \beta} = \frac{f_3(u) - \beta}{f_3(v) - \beta}, \quad \text{cu} \quad f_i(v) \neq \beta, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = a_i x + b_i$, $i = \overline{1,3}$. Graficele funcţiilor sunt concurente două câte două dacă şi numai dacă a_1, a_2, a_3 sunt distincte.

Prin proporţii derivate relaţia din enunţ este echivalentă cu $\dfrac{b_1 - \beta}{a_1} = \dfrac{b_2 - \beta}{a_2} = \dfrac{b_3 - \beta}{a_3}$, cu convenţia că, dacă unul dintre numerele a_i este zero, atunci şi $b_i - \beta$ este zero.

Graficele funcţiilor f_i sunt concurente dacă şi numai dacă există (α, β), β-unic, astfel încât $f_i(\alpha) = \beta$, $i = \overline{1,3}$, adică $a_1\alpha + b_1 = a_2\alpha + b_2 = a_3\alpha + b_3 = \beta$ sau încă $-\alpha = \dfrac{b_1 - \beta}{a_1} = \dfrac{b_2 - \beta}{a_2} = \dfrac{b_3 - \beta}{a_3}$, ceea ce încheie rezolvarea problemei.

VIII.42. *Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că*

$$\frac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx}}+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-xz}}+$$
$$+\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz}}\leq 2.$$

Lucian Tuţescu, Craiova

Soluţie. Avem $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0$ deci $x^2+y^2+z^2-yz-zx\geq xy$ şi atunci $\dfrac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-yz-zx}}\leq\dfrac{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}$. Sumând aceasta cu încă două inegalităţi asemănătoare, obţinem concluzia problemei.

VIII.43. *Dacă un triunghi dreptunghic are laturile numere naturale, iar suma catetelor este pătrat perfect, atunci suma cuburilor catetelor este sumă de două pătrate perfecte.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Fie (a,b,c) un triplet de numere naturale nenule care satisfac relaţia $a^2+b^2=c^2$. Urmează că toate trei sunt pare sau numai unul este par; deci $\dfrac{c-b+a}{2},\dfrac{c+b-a}{2}\in\mathbb{N}^*$.

Avem $a^2+b^2-ab=\left[\dfrac{1}{2}(c-b+a)\right]^2+\left[\dfrac{1}{2}(c+b-a)\right]^2$. Deoarece $a+b=p^2$ şi $a^3+b^3=(a+b)\big(a^2+b^2-ab\big)$, rezultă că $a^3+b^3=\left[\dfrac{p}{2}(c-b+a)\right]^2+\left[\dfrac{p}{2}(c+b-a)\right]^2$.

VIII.44. *Pe laturile $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ şi $[BD]$ ale tetraedrului $ABCD$ se iau respectiv punctele M, N, P, Q, R, S astfel ca $\dfrac{BP}{BC}=\dfrac{AQ}{AD}$, $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{DN}{DC}$, $\dfrac{AR}{AC}=\dfrac{DS}{BD}$. Notăm cu V_1, V_2, V_3, V_4, V respectiv volumele tetraedrelor $AMRQ$, $BPMS$, $CPNR$, $DNQS$ şi $ABCD$. Să se arate că $2^{12}V_1V_2V_3V_4\leq V^4$.*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Notând cele trei rapoarte cu α, β, γ, avem: $\dfrac{V_1}{V}=\alpha\beta\gamma$, $\dfrac{V_2}{V}=\alpha(1-\beta)\cdot(1-\gamma)$, $\dfrac{V_3}{V}=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, $\dfrac{V_4}{V}=(1-\alpha)\beta\gamma$. Atunci

$$\frac{V_1V_2V_3V_4}{V^4}=\alpha^2(1-\alpha)^2\beta^2(1-\beta)^2\gamma^2(1-\gamma)^2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2^{12}},$$

unde am folosit inegalitatea $x(1-x)\leq\dfrac{1}{4}$, $x\in[0,1]$.

VIII.45. *Fie $A_1,A_2,\ldots,A_k$ puncte pe un cerc $\mathcal{C}$. Să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru a putea înscrie în $\mathcal{C}$ un poligon regulat ce admite punctele date ca vârfuri (nu neapărat consecutive).*

Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

Soluţie. Presupunem că P este un poligon regulat cu n laturi ce are punctele A_1, A_2, $\ldots$, A_k ca vârfuri. Dacă între A_i şi A_{i+1} sunt m_i laturi ale lui P, cum unghiul la centru dintre două vârfuri consecutive ale lui P este $\dfrac{2\pi}{n}$, deducem că

$m(\widehat{A_iOA_{i+1}}) = m_i \cdot \dfrac{2\pi}{n}$, deci $\dfrac{m(\widehat{A_iOA_{i+1}})}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, $i = \overline{1,k}$ (cu convenţia $A_{k+1} = A_1$).

Să arătăm că această condiţie este şi suficientă. Fie $\dfrac{m(\widehat{A_iOA_{i+1}})}{2\pi} = \dfrac{m_i}{n_i}$, $(m_i, n_i) = 1$, $i = \overline{1,k}$. Alegând n multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$ rezultă că $A_1B_2 \ldots B_n$ este poligon regulat care conţine vârfurile $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (deoarece în această situaţie $m(\widehat{A_1OA_2}) = \dfrac{m_1}{n_1} \cdot 2\pi = \dfrac{nm_1}{n_1} \cdot \dfrac{2\pi}{n}$ şi $\dfrac{nm_1}{n_1} \in \mathbb{N}$, deci $A_2 \in P$ etc.).

Clasa a IX-a

IX.41. *Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, notăm cu $u_2(n)$ numărul format din ultimele două cifre ale lui n. Să se arate că:*

a) $u_2\left(a^{20k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{4, 5, \ldots, 23\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{2, 3, 8\}$;

b) $u_2\left(a^{10k+p}\right) = u_2(a^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{4, 9\}$;

c) $u_2(5^n) = 25$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

d) $u_2\left(6^{5k+p}\right) = u_2(6^p)$, $p \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, $k \in \mathbb{N}$;

e) $u_2\left(7^{4k+p}\right) = u_2(7^p)$, $p \in \{2, 3, 4, 5\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. În rezolvarea problemei vom folosi faptul că $u_2(a) = u_2(b)$ dacă şi numai dacă $a - b$ se divide cu 100.

a) $2^{20k+p} = \left(2^{10}\right)^{2k} \cdot 2^p = 1024^{2k} \cdot 2^p = (1025 - 1)^{2k} \cdot 2^p = (\mathcal{M}25 + 1) \cdot 2^p = \mathcal{M}100 + 2^p$;

$3^{20k+p} = 9^{10k} \cdot 3^p = \left(81^5\right)^k \cdot 3^p = \overline{\cdots 01}^{\,k} \cdot 3^p = (\mathcal{M}100 + 1) \cdot 3^p = \mathcal{M}100 + 3^p$;

$8^{20k+p} = 2^{60k+3p} = 1024^{6k} \cdot 2^{3p} = (\mathcal{M}25 - 1)^{6k} \cdot 8^p = (\mathcal{M}25 + 1) \cdot 8^p = \mathcal{M}100 + 8^p$.

Egalităţile $b) - e)$ se demonstrează analog.

IX.42. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Să se afle numerele a, b, c, dacă $|abc| = 1$. (enunţ scurtat)*

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

Soluţie. Ecuaţia $|abc| = 1$ este echivalentă cu $a^2b^2c^2 = 1$. Observăm că

$$(1 - ab)(1 - bc)(1 - ca) = 1 - ab - bc - ca + abc(a + b + c) - a^2b^2c^2 = 1 - a^2b^2c^2$$

(s-a ţinut seama de relaţia din enunţ). Ca urmare, suntem conduşi la ecuaţia $(1 - ab)(1 - bc)(1 - ca) = 0$. Dacă $ab = 1$, găsim $c = \pm 1$ şi, deci, tripletele $(x, 1/x, \pm 1)$, $x \in \mathbb{R}^*$, sunt soluţii ale problemei. Celelalte soluţii se obţin din acestea prin permutări circulare.

IX.43. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $a \in (1, \infty)$. Ştiind că*

$$f\left(x^2 + ax - a\right) \geq f^2\left(\tfrac{1}{x}\right) - f\left(\tfrac{1}{x}\right) + 1, \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

să se arate că f nu este injectivă.

Titu Zvonaru, Bucureşti

Soluţie. Ecuaţia $x^2 + ax - a = \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ este echivalentă cu $(x - 1) \cdot \left(x^2 + ax + x + 1\right) = 0$ sau cu $x^2 + x(a + 1) + 1 = 0$, $x \in (-\infty, 0)$. Cum $\Delta > 0$, $S < 0$, $P > 0$ ea are două rădăcini reale, distincte, negative x_1, x_2.

Pentru $x = x_1$, relaţia din enunţ devine $f\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq f^2\left(\frac{1}{x_1}\right) - f\left(\frac{1}{x_1}\right) + 1$, deci

$\left(f\left(\frac{1}{x_1}\right)-1\right)^2 \le 0$, de unde deducem $f\left(\frac{1}{x_1}\right)=1$. La fel $f\left(\frac{1}{x_2}\right)=1$. Prin urmare $f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{1}{x_2}\right)$, $x_1 \ne x_2$; deci f nu este injectivă.

IX.44. *Dacă $\triangle ABC$ este ascuţitunghic, să se găsească maximul expresiei $E=\sin A\cdot\sqrt{\cos A}+\sin B\cdot\sqrt{\cos B}+\sin C\cdot\sqrt{\cos C}$.*

Cezar Lupu, elev, şi Tudorel Lupu, Constanţa

Soluţie. Putem presupune $A\le B\le C$, deci $\sin A\le\sin B\le\sin C$ şi $\sqrt{\cos A}\ge \ge\sqrt{\cos B}\ge\sqrt{\cos C}$. Folosind inegalitatea lui Cebâşev, vom avea

$$E\le\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\cdot\left(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\right).$$

Dar $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt3}{2}$, $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\sqrt{3(\cos A+\cos B+\cos C)}$ $\le\sqrt{3\cdot\frac32}=\frac{3}{\sqrt2}$. Deci $E\le\frac{3\sqrt6}{4}$. Cum pentru $A=B=C=60^\circ$ obţinem $E=\frac{3\sqrt6}{4}$, deducem că maximul lui E este $\frac{3\sqrt6}{4}$.

IX.45. *Demonstraţi că $\triangle ABC$ în care are loc egalitatea*

$$\sum\frac{h_ah_bm_c}{m_am_bm_c+h_ah_bm_c+m_am_bi_c}=1,$$

suma fiind obţinută prin permutări circulare, iar notaţiile fiind cele uzuale, este echilateral.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Avem $h_a\le i_a\le m_a$ şi analoagele; deci suma din enunţ este mai mică sau egală cu $S'=\sum\frac{h_ah_bm_c}{m_am_bm_c+h_ah_bm_c+m_am_bh_c}$. Notând $x=\frac{h_a}{m_a}$, $y=\frac{h_b}{m_b}$, $z=\frac{h_c}{m_c}$, avem $0\le x,y,z\le1$ şi $S'=\sum\frac{xy}{1+xy+z}$.

Cum $1+xy\ge x+y$ pentru $x,y\in[0,1]$ şi analoagele, avem $S'\le\sum\frac{xy}{x+y+z}\le \le\sum\frac{x}{x+y+z}=1$; egalitate are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=1$, deci $h_a=m_a$, $h_b=m_b$, $h_c=m_c$, adică dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Clasa a X-a

X.41. *Prove the inequality $\frac{F_{2n}^2}{F_{n-1}\cdot F_n}\le\binom{2n}{n}$, where the Fibonacci numbers F_n are defined by $F_0=F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\ge1$.*

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Montenegro

Soluţie. Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz, avem

$$\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\right]\left(F_0^2+F_1^2+\cdots+F_n^2\right)\ge\left[\binom{n}{0}F_0+\binom{n}{1}F_1+\cdots+\binom{n}{n}F_n\right]^2.$$

Deoarece $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}F_k^2=F_n\cdot F_{n+1}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n}$ (v. RecMat - 2/2002, p. 70), obţinem $\binom{2n}{n}F_nF_{n+1}\ge F_{2n}^2$. Egalitate apare pentru $n=1$.

X.42. *Să se rezolve ecuaţia* $2^{[x]} + 6^{[x]} + 7^{[x]} = 3^{[x]} + 4^{[x]} + 8^{[x]}$.

Daniel Jinga, Piteşti

Soluţie. Notăm $[x] = y$, $y \in \mathbb{Z}$. Avem de rezolvat în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $2^y + 6^y + 7^y = 3^y + 4^y + 8^y$. Dacă $y < 0$ avem $7^y > 8^y$ şi $2^y + 6^y > 3^y + 4^y$ (deoarece aceasta este echivalentă cu $(2^y - 1)(3^y - 2^y) > 0$, $y < 0$). Prin urmare nu avem soluţii cu $y < 0$. Se verifică uşor faptul că $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ sunt soluţii.

Pentru $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, demonstrăm că $3^n + 4^n + 8^n > 2^n + 6^n + 7^n$. Este suficient să arătăm prin inducţie că $8^n + 4^n > 6^n + 7^n$, $n \geq 3$, care este un exerciţiu de rutină.

Prin urmare $y \in \{0, 1, 2\}$ şi atunci $x \in [0, 1) \cup [1, 2) \cup [2, 3)$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este intervalul $[0, 3)$.

X.43. *Fie* f *o funcţie reală nenulă cu proprietatea că*

$$f(x + y - xy) = f(x + y) - f(x) f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right)$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Rezolvăm problema în mai multe etape.

1. Pentru $x = y = 0$, din relaţia dată găsim $f(0) = 0$.

2. Pentru $y = -x = 1$, deducem $f(1) + f(1) f(-1) = 0$, adică $f(1) = 0$, sau $f(-1) = -1$. Dacă $f(1) = 0$, pentru $y = 1$ relaţia dată implică $f(x + 1) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $f = 0$, contrar ipotezei.

3. Ne ocupăm de cazul $f(-1) = -1$ şi $f(1) = a \neq 0$. Pentru $y = 1$, găsim

$$f(x + 1) = af(x) + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Pentru $y = -1$ şi $x \to x + 1$, obţinem $f(2x + 1) = f(x + 1) + f(x)$ sau încă $af(2x) + a = af(x) + a + f(x)$, deci

$$f(2x) = \frac{a + 1}{a} f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) pentru $x = 1$, deducem $f(2) = a^2 + a = a + 1$, de unde $a = \pm 1$. Dacă $a = -1$, relaţia (2) implică $f(2x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fals. Prin urmare $a = f(1) = 1$.

4. Din (1), găsim $f(x + 1) = f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin inducţie, găsim $f(x + k) = f(x) + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall k \in \mathbb{Z}$. Pentru $x = 0$ deducem că $f(k) = k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

5. În relaţia dată înlocuim x cu $\dfrac{p}{q}$ şi y cu q ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) şi găsim $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}$, adică $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. Prin urmare, $f\left(\dfrac{2003}{2002}\right) = \dfrac{2003}{2002}$.

X.44. *Urnele* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *conţin fiecare câte* a *bile albe şi* b *bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă care se depune într-o altă urnă* U. *Din urna* U *se scoate o bilă şi se constată că este albă. Care este compoziţia cea mai probabilă a urnei* U?

Petru Minuţ, Iaşi

Soluţie. Notăm cu E_k evenimentul constând în faptul că în U ar fi depuse k bile albe (şi $n - k$ bile negre). Avem $P(E_k) = C_n^k \left(\dfrac{a}{a + b}\right)^k \left(\dfrac{b}{a + b}\right)^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$. Fie E evenimentul ca bila extrasa din U sa fie albă. Conform formulei lui Bayes

$$P_E(E_k) = \frac{P(E_k) P_{E_k}(E)}{\sum_{i=1}^n P(E_i) P_{E_i}(E)} = \frac{kC_n^k a^k b^{n-k}}{\sum_{i=1}^n iC_n^i a^i b^{n-i}} = \frac{kC_n^k a^k b^{n-k}}{na(a+b)^{n-1}}.$$

Această probabilitate este maximă când $f(k) = kC_n^k a^k b^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$ este maximă. Observăm că $\dfrac{f(k+1)}{f(k)} > 1 \Leftrightarrow k < \dfrac{na}{a+b}$ şi $\dfrac{f(k+1)}{f(k)} < 1 \Leftrightarrow k > \dfrac{na}{a+b}$. Dacă k_0 este punctul de maxim pentru $f(k)$, avem $f(k_0+1) \leq f(k_0)$ şi $f(k_0) \geq f(k_0-1)$, din care deducem $k_0 \in \left[\dfrac{na}{a+b}, \dfrac{na}{a+b}+1\right]$. Prin urmare, $k_0 = \dfrac{na}{a+b}$, dacă $\dfrac{na}{a+b} \in \mathbb{N}$ şi $k_0 = \left[\dfrac{na}{a+b}\right] + 1$, dacă $\dfrac{na}{a+b} \notin \mathbb{N}$.

X.45. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC. Să se arate că există un triunghi $A'B'C'$ astfel încât $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$, iar $m(\widehat{AC'B'}) = m(\widehat{BA'C'}) = m(\widehat{CB'A'}) = \alpha \in (0, 90]$. Dacă în plus $\triangle ABC$ este echilateral, să se calculeze lungimile laturilor $\triangle A'B'C'$ în funcţie de $a = BC$ şi α. (În legătură cu o problemă propusă la O. N. M., 2002)*

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Fie D proiecţia punctului C pe AB, deci $D \in (AB)$. Fie $C'' \in (DA)$ şi $E \in (AC)$ încât $m(\widehat{EC''A}) = \alpha$ şi $A'' \in (BC)$ încât $m(\widehat{C''A''B}) = \alpha$. De asemenea, fie A_1 şi C_1, $A \in (BA_1)$, $C \in (BC_1)$ şi $F \in (A_1C_1)$ cu $A_1C_1 \parallel AC$ şi $m(\widehat{A''FC_1}) = \alpha$.

În aceste condiţii, $(C''E \cap (A''F = \{B''\}$, $(BB'' \cap (AC) = \{B'\}$, iar omotetia de centru B şi raport λ, raport definit de $\overrightarrow{BB'} = \lambda \overrightarrow{BB''}$, transformă A'' în $A' \in (BC)$ şi C'' în $C' \in (AB)$. Prin urmare $A'B'C'$ satisface enunţul.

În cazul în care triunghiul ABC este echilateral se deduce relativ uşor că $\triangle A'B'C'$ este echilateral şi $(AB') \equiv (CA') \equiv (BC')$. Cu teorema sinusurilor în $\triangle AB'C'$ deducem $B'C' = \dfrac{a}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}$.

Clasa a XI-a

XI.41. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\sum\limits_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(k)} = I_n$, unde S_k este mulţimea permutărilor de ordin k. Să se arate că $n \,\vdots\, k!$.*

Vladimir Martinuşi, Iaşi

Soluţie. Deoarece $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(C)$, inductiv se arată că $\operatorname{tr}\left(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k)$, $\forall \sigma \in S_k$. Ţinând cont că $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(C)$ deducem că

$$\operatorname{tr}\left(\sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{tr}(I_n) \Rightarrow \operatorname{tr}\left(\sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{tr}\left(A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(k)}\right) = n \Rightarrow k! \operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k) = n$$

şi cum $\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_k) \in \mathbb{Z}$, concluzia problemei este imediată.

XI.42. *Prin punctele M_1 şi M_2 ale unei elipse se duc normalele la elipsă, care intersectează una din axele de simetrie ale acesteia în M_1', respectiv M_2'. Să se arate că mediatoarea segmentului $[M_1M_2]$ trece prin mijlocul lui $[M_1'M_2']$. Rămâne proprietatea adevărată pentru hiperbolă sau pentru parabolă?*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Fie curba de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2}+\varepsilon\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\varepsilon=\pm1$ şi $M_i\left(x_i,y_i\right)$ pe curbă, $i=1,2$. Normala în M_i la curbă are ecuaţia $y-y_i=\varepsilon\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{y_i}{x_i}\left(x-x_i\right)$, $i=1,2$, şi intersectează una din axele simetrie, de exemplu Ox, în $M_i'\left(\dfrac{\varepsilon a^2-b^2}{\varepsilon a^2}x_i,0\right)$, $i=1,2$. Mijlocul M' al segmentului $[M_1',M_2']$ are coordonatele $\left(\dfrac{\varepsilon a^2-b^2}{2\varepsilon a^2}\left(x_1+x_2\right),0\right)$. Mediatoarea segmentului M_1M_2 are ecuaţia $y-\dfrac{y_1+y_2}{2}=-\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$. Se verifică uşor că M' este situat pe mediatoarea segmentului $[M_1M_2]$.

Prin calcul se verifică că proprietatea rămâne valabilă şi pentru parabolă.

XI.43. *Considerăm şirul de funcţii* $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=nx+\ln x-(n-1)$ *şi fie* x_n *soluţia unică a ecuaţiei* $f_n(x)=0$. *Să se calculeze limitele şirurilor* $(x_n)_{n\geq1}$ *şi* $((x_n)^n)_{n\geq1}$.

Angela Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Evident, funcţiile f_n sunt strict crescătoare şi surjective, ceea ce asigură existenţa şi unicitatea soluţiei x_n.

Folosim în continuare inegalităţile $\dfrac{x-1}{x}\leq\ln x\leq x-1$, $\forall x\in(0,\infty)$. Avem:

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}-1=0\quad\text{şi}$$
$$f_n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\ln\frac{n+1}{n+2}+\frac{2}{n+2}\geq\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)\frac{n+2}{n+1}+\frac{2}{n+2}>0,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\leq f_n(x_n)\leq f_n\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ şi atunci $\dfrac{n}{n+1}\leq x_n\leq\dfrac{n+1}{n+2}$, $n\geq1$. Găsim $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\dfrac{1}{e}$.

XI.44. *Să se determine funcţiile continue* $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ *pentru care* $f(x)=f\left(\sqrt{2x^2-2x+1}\right)$, $\forall x>0$.

Marian Ursărescu, Roman

Soluţie. Fie $x_0\in(0,1]$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\leq0}$ definit prin $x_{n+1}=\sqrt{2x_n^2-2x_n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Se verifică faptul că $x_n\in(0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $(x_n)_{n\geq0}$ este crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Pentru $x=x_n$, relaţia din enunţ devine $f(x_n)=f\left(\sqrt{2x_n^2-2x_n+1}\right)=f(x_{n+1})$, $\forall n\in\mathbb{N}$, deci $f(x_0)=f(x_n)$. Ca urmare, $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$. Rezultă că $f(x)=$ $=f(1)$, $\forall x\in(0,1]$.

Fie $x_0>1$ şi şirul definit prin $x_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{2x_n^2-1}}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. Se arată că $x_n>1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $(x_n)_{n\geq0}$ este descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Cum relaţia de recurenţă se poate scrie şi în forma $x_n=\sqrt{2x_{n+1}^2-2x_{n+1}+1}$, obţinem $f(x_{n+1})=$ $=f\left(\sqrt{2x_{n+1}^2-2x_{n+1}+1}\right)=f(x_n)$, apoi $f(x_0)=f(x_n)$ şi $f(x)=f(1)$, $\forall x>1$.

În concluzie, $f(x)=f(1)$, $\forall x\in(0,\infty)$, deci f este funcţie constantă.

XI.45. *Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ cu $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Definim $x_n = \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \ldots + b_k a_k^n}$.*

a) Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_k$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(x_n - a_k) = a_k \ln b_k$;

c) Dacă $b_k = 1$, are loc $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = a_k b_{k-1}$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. *a*) Avem $a_k \sqrt[n]{b_k} \leq \sqrt[n]{a_1^n b_1 + \cdots + a_k^n b_k} \leq a_k \sqrt[n]{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}$, $n \in \mathbb{N}$. Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 a_1^n + b_2 a_2^n + \cdots + b_k a_k^n} = a_k$.

b)

$$\lim_{n\to\infty} n\,(x_n - a_k) = a_k \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{a_k} - 1\right) = a_k \lim_{n\to\infty} n \frac{e^{\ln \frac{x_n}{a_k}} - 1}{\ln \frac{x_n}{a_k}} \ln \frac{x_n}{a_k} = a_k \lim_{n\to\infty} \ln \left(\frac{x_n}{a_k}\right)^n =$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty} \ln \left(b_1 \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + b_2 \left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + b_{k-1} \left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^n + b_k\right) = a_k \ln b_k.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n (x_n - a_k) = \lim_{n\to\infty} a_k n \left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n \frac{e^{\ln \frac{x_n}{a_k}} - 1}{\ln \frac{x_n}{a_k}} \ln \frac{x_n}{a_k} =$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n \ln \left(b_1 \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + b_2 \left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + b_{k-1} \left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^n + 1\right) =$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^n \left(b_1 \left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + b_2 \left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + b_{k-1} \left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^n\right) =$$

$$= a_k \lim_{n\to\infty} \left(b_1 \left(\frac{a_1}{a_{k-1}}\right)^n + b_2 \left(\frac{a_2}{a_{k-1}}\right)^n + \cdots + b_{k-1}\right) = a_k b_{k-1}\ .$$

Clasa a XII-a

XII.41. *Să se calculeze* $\displaystyle\int \frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}}\,dx$, *unde* $x \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Oana Marangoci, studentă, Iaşi

Soluţie. Pentru $x \in (1, \infty)$, avem $(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right) =$

$$= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^{2^2}}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x^{2^n}}{1-x^{2^{n-1}}} = \frac{1-x^{2^n}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2^n - 1} \text{ şi atunci}$$

$$\frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^n}} = \frac{1}{x^{2^n}} + \frac{1}{x^{2^n-1}} + \cdots + \frac{1}{x},$$

relaţie care se verifică şi pentru $x = 1$. Primitivele funcţiei sunt

$$\frac{-1}{(2^n - 1)\, x^{2^n - 1}} + \frac{-1}{(2^n - 2)\, x^{2^n - 2}} + \cdots + \frac{-1}{x} + \ln x + C.$$

XII.42. *Fie* $f\colon \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pentru care* $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f(x) \sin 2x\, dx = \frac{\pi}{4}$.

Să se arate că există $c \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ *astfel încât* $f(c) \in (1,2)$.

Mihai Haivas, Iaşi

Soluţie. Avem

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx = -\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{(\cos 2x)'}{1+\cos^2 2x}\,dx = -\operatorname{arctg}(\cos 2x)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\ .$$

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\sin 2x\,dx = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\,dx \Leftrightarrow \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \left(f(x) - \frac{2}{2-\sin^2 x}\right)\sin 2x\,dx = 0\ .$$

Aplicând teorema de medie există $c \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ astfel încât

$$\frac{\pi}{4}\left(f(c) - \frac{2}{2-\sin^2 2c}\right)\sin 2c = 0 \Leftrightarrow f(c) = \frac{2}{2-\sin^2 2c}\ .$$

Dar $\frac{2}{2-\sin^2 2c} \in (1,2)$ pentru $c \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$, adică $f(c) \in (1,2)$.

XII.43. *Să se arate că*

$$1 - \frac{\ln a}{3} \leq \int_0^1 a^{-x^2}dx \leq \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\ln a}}{\sqrt{\ln a}}, \quad \forall a > 1.$$

Petru Răducanu, Iaşi

Soluţie. Se arată că $a^x \geq x\ln a + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall a > 1$. Obţinem astfel

$$-x^2\ln a + 1 \leq a^{-x^2} = \frac{1}{a^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2\ln a + 1}, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

Integrând între 0 şi 1, obţinem inegalităţile cerute.

XII.44. *Să se afle numărul rădăcinilor reale ale polinomului* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *de grad minim, care admite rădăcina* $\alpha^2 + \alpha$, *unde* α *verifică ecuaţia* $x^3 - x + 1 = 0$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

Soluţie. Polinomul în y care se cere, apare prin eliminarea lui x între ecuaţiile $x^3 - x + 1 = 0$ şi $y = x^2 + x$. Deoarece $x^2 = y - x$, găsim $x(y-x) - x + 1 = 0$ şi înlocuind din nou x^2 găsim $x = \frac{y-1}{y}$ (evident $y \neq 0$). Deducem $y = \frac{(y-1)^2}{y^2} + \frac{y-1}{y}$ şi, în final, $P(y) = y^3 - 2y^2 + 3y - 1$. Folosind şirul lui Rolle, polinomul $P(y)$ admite o singură rădăcină reală $y \in (0,1)$.

XII.45. *Fie* $\sigma \in S_5$. *Să se arate că* σ^2 *are puncte fixe dacă şi numai dacă* σ^3 *are puncte fixe.*

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Folosind descompunerea unei permutări în produs de cicli disjuncţi, se poate observa că, dacă σ^k, $1 \leq k \leq 5$, are puncte fixe, atunci σ conţine în descompunerea sa cicli de lungime l, cu $l \mid k$.

Presupunem că σ^2 are puncte fixe. Atunci σ conţine în descompunerea sa cicli de lungime 1 (puncte fixe) sau 2. Dacă σ are puncte fixe, σ^3 are de asemenea puncte fixe. Dacă σ conţine în descompunerea sa cicli de lungime 2, fără a avea puncte fixe, atunci σ conţine în descompunerea sa şi un ciclu de lungime 3. Elementele acestui ciclu vor fi toate puncte fixe pentru σ^3. Implicaţia reciprocă se demonstrează analog.

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 2 / 2003

A. Nivel gimnazial

G46. *Determinaţi ultimele cinci cifre ale numărului*

$$A = 7^{2000} + 7^{2001} + 7^{2002} + 7^{2003}.$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţia I. Scriem $A = 7^{2000} \cdot 400$. Se constantă că $7^{20} = \mathcal{M}1000 + 1$. Ca urmare, $7^{2000} = \mathcal{M}1000 + 1$ şi $A = (\mathcal{M}1000 + 1) \cdot 400 = \mathcal{M}100000 + 400$, deci ultimele cinci cifre ale lui A sunt 00400.

Soluţia II (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi)**.** Conform teoremei lui Euler, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$ pentru $(a, n) = 1$. Considerând $a = 7$, $n = 1000$, avem $\varphi(1000) = 400$, deci $7^{400} \equiv 1 (\operatorname{mod} 1000)$, adică $7^{2000} = \left(7^{400}\right)^5 \equiv 1 (\operatorname{mod} 1000)$, de unde $A = 7^{2000} \cdot 400 \equiv 400 (\operatorname{mod} 100000)$, deci numărul A se termină cu 00400.

G47. *Determinaţi valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care soluţiile sistemului*

$$x = a \frac{y}{y+1}\ ; \quad y = b \frac{x}{x+1}$$

sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Fie M mulţimea perechilor $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pentru care este îndeplinită cerinţa problemei. Observăm că $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este soluţie a sistemului şi că aceasta este unica soluţie dacă $a = 0$ sau $b = 0$. Ca urmare, $(a, 0) \in M$, $\forall a \in \mathbb{Z}$ şi $(0, b) \in M$, $\forall b \in \mathbb{Z}$.

Pe $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ sistemul dat, dacă facem abstracţie de soluţia $(0, 0)$, este echivalent cu

$$(b+1)\, x = ab - 1, \quad (a+1)\, y = ab - 1. \tag{1}$$

I. $a \neq -1$, $b \neq -1$. Obţinem $x = \dfrac{ab-1}{b+1}$, $y = \dfrac{ab-1}{a+1}$. Atunci $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Leftrightarrow b + 1 \mid ab - 1$ şi $a + 1 \mid ab - 1$. Cum $ab - 1 = (a+1)(b+1) - (a+1) - (b+1)$, deducem că $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Leftrightarrow b + 1 \mid a + 1$ şi $a + 1 \mid b + 1 \Leftrightarrow b + 1 = a + 1$ sau $b + 1 = -(a+1)$. Prin urmare $(a, a) \in M$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq -1$ şi $(a, -a-2) \in M$, $\forall \in \mathbb{Z}$, $a \neq -1$.

II. $a = b = -1$. Cum rezultă $ab - 1 = 0$, sistemul (1) are o infinitate de soluţii şi nu toate sunt în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Deci $(-1, 1) \notin M$.

III. $a = -1$, $b \neq -1$ (analog $a \neq -1$, $b = -1$). Avem $ab - 1 \neq 0$, deci (1) nu are soluţii, iar sistemul dat are $(0, 0)$ ca unică soluţie. Aşadar, $(a, -1) \in M$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq -1$ şi $(-1, b) \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{Z}$, $b \neq -1$.

În concluzie:

$$\begin{aligned} M = {} & \{(a,0), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,b), b \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a,-1), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1,b), b \in \mathbb{Z}\} \cup \\ & \cup \{(a,a), a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a,-a-2), a \in \mathbb{Z}\} \setminus \{(-1,-1)\}. \end{aligned}$$

G48. *Fie $A \subset (0, \infty)$ o mulţime care conţine $\dfrac{2002}{2003}$ şi având proprietatea că, dacă $\dfrac{a}{b} \in A$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\dfrac{a+1}{b} \in A$ şi $\dfrac{a}{2b} \in A$. Să se arate că $A \supseteq \mathbb{Q}_+^*$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Considerăm transformările
$$\frac{a}{b} \in A \Rightarrow \frac{a+1}{b} \in A \tag{1}$$
şi
$$\frac{a}{b} \in A \Rightarrow \frac{a}{2b} \in A. \tag{2}$$
Avem:
$$\frac{2002}{2003} \in A \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1001}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1002}{2003} \in A \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{501}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{502}{2003} \in A \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{251}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \cdots \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2003} \in A.$$
$$\frac{1}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2}{2003} \in A \overset{(1)}{\Rightarrow} \cdots \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2003}{2003} \in A, \quad \text{deci} \quad \frac{1}{1} \in A.$$
Fie $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$. Cum $\frac{1}{1} \in A \Rightarrow \frac{b}{b} \in A \Rightarrow \frac{1}{b} \in A \Rightarrow \frac{a}{b} \in A$, rezultă că $\frac{a}{b} \in A$, adică $\mathbb{Q}_+^* \subseteq A$.

G49. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} \leq (n+2)\,m$, iar $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \leq \frac{n+4}{4} M^2$, unde $m = \min x_i$, $M = \max x_i$. Să se arate că exact n dintre numerele date sunt egale.*

Eugen Jecan, Dej

Soluţie. Dacă toate numerele ar fi egale, relaţia a doua din enunţ ar fi $(n+1)\,M^2 \leq \frac{n+4}{4} M^2$, imposibil. Există cel puţin un număr egal cu M, fie acesta x_{n+1}. Deducem că $(n+2)\,m \geq x_1 + \cdots + x_n + M$ deci $2m \geq M$. De asemenea, $\frac{n+4}{4} M^2 \geq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + M^2 \geq nm^2 + M^2$ sau $M \geq 2m$. Rezultă $M = 2m$ şi prima relaţie devine $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 2m \leq (n+2)\,m$, deci $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq nm$ sau încă $(x_1 - m) + \cdots + (x_n - m) \leq 0$. Cum $x_1 - m \geq 0$, $x_2 - m \geq 0, \ldots, x_n - m \geq 0$, deducem că $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m$, valori care verifică şi a doua condiţie.

În concluzie exact n numere sunt egale cu m şi unul egal cu $M = 2m$.

G50. *Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$. Să se arate că*
$$\left[\sqrt{an+1}\right] = \left[\sqrt{an+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{an+a-1}\right], \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \{3, 4\}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Pentru $n = 0$ relaţia din enunţ devine $\left[\sqrt{1}\right] = \left[\sqrt{2}\right] = \cdots = \left[\sqrt{a-1}\right]$, deci $\left[\sqrt{a-1}\right] = 1$, echivalent cu $2 \leq a < 5$, şi cum $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 3$, avem $a \in \{3, 4\}$.

Reciproc, arătăm că, dacă $a \in \{3, 4\}$, au loc egalităţile din enunţ. Fie $a = 3$; trebuie arătat că $\left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pentru un număr $n \in \mathbb{N}$ există $k \in \mathbb{N}$ (k depinde de n) astfel încât $k^2 \leq 3n+1 < (k+1)^2$. Considerând numărul $3n+2$ avem $3n+2 < (k+1)^2$ sau $3n+2 = (k+1)^2$. Cum $3n+2$ nu este pătrat perfect, deducem că $k^2 \leq 3n+1 < 3n+2 < (k+1)^2$, de unde rezultă $k \leq \sqrt{3n+1} < \sqrt{3n+2} < k+1$, deci $\left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right]$.

Pentru $a = 4$, trebuie demonstrat că $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considerând $k = \left[\sqrt{4n+1}\right]$ avem $k^2 \leq 4n+1 < (k+1)^2$ şi cum $4n+2$, $4n+3$ nu sunt pătrate perfecte pentru nici un $n \in \mathbb{N}$, deducem $k^2 \leq 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 < (k+1)^2$ şi atunci $\left[\sqrt{4n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+3}\right] = k$.

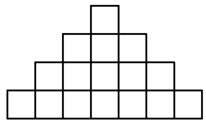
G51. *Fie* $a,b,c\in\left[\dfrac{3}{10},\infty\right)$ *cu* $a+b+c=1$. *Să se arate că*
$$\frac{2}{3}\le a\sqrt{a+bc}+b\sqrt{b+ca}+c\sqrt{c+ab}<\frac{3}{4}\,.$$

Gabriel Dospinescu, elev, Oneşti

Soluţia. Avem $\sqrt{a+bc}=\sqrt{(a+b)\,(a+c)}\le\dfrac{a+b+a+c}{2}=\dfrac{1+a}{2}$ şi atunci $\sum a\sqrt{a+bc}\le\sum\dfrac{a^2+a}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\sum a^2\right)$. Cum $a=1-(b+c)<1-\dfrac{6}{10}=\dfrac{2}{5}$ etc., rezultă că $\dfrac{1}{2}\left(1+\sum a^2\right)<\dfrac{1}{2}\left(1+3\cdot\dfrac{4}{25}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{37}{25}<\dfrac{3}{4}$.

Pentru inegalitatea din stânga avem: $a+bc=(a+b)\,(a+c)\ge\left(a+\sqrt{bc}\right)^2$ şi atunci $\sum a\sqrt{a+bc}>\sum a\left(a+\sqrt{bc}\right)=1-2\sum ab+\sum a\sqrt{bc}$. Rămâne să arătăm că $\dfrac{1}{3}-2\sum ab+\sum a\sqrt{bc}\ge 0$ sau, echivalent, $\sum\dfrac{(a-b)^2}{3}\ge\sum c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$. Este suficient să arătăm că $\dfrac{(a-b)^2}{3}\ge c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$, echivalentă cu $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\ge 3c$ sau cu $a+b+2\sqrt{ab}\ge 3-3a-3b$. Ultima inegalitate se scrie $4a+4b+2\sqrt{ab}\ge 3$ şi este adevărată în condiţia $a,b\in\left[\dfrac{3}{10},\infty\right)$.

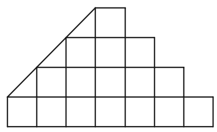
G52. *Se consideră o piramidă formată din pătrate* 1×1, *având* n *trepte, pe treapta* k *existând* $2k-1$ *pătrate (în figură,* $n=4$*). Aflaţi numărul minim de dreptunghiuri, fiecare alcătuit numai din căsuţe întregi, în care poate fi împărţită tabla.*



Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţia I (a autorului). Colorăm căsuţele tablei alternativ în alb şi negru (căsuţa din vârf este neagră). Cum modulul diferenţei dintre numărul de căsuţe albe şi numărul de căsuţe negre dintr-un dreptunghi este cel mult 1 şi cum sunt cu n căsuţe negre mai multe decât albe, trebuie să avem cel puţin n dreptunghiuri. Acest număr poate fi obţinut tăind pe nivele. Aşadar, răspunsul este n.

Soluţia II (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi)**.** Unim, ca în figură, vârfurile din stânga sus ale pătratelor marginale din stânga; se observă că deasupra acestei drepte nu mai există vârfuri ale piramidei. Oricare două pătrate marginale din stânga nu pot aparţine aceluiaşi dreptunghi, deoarece ar însemna că acel dreptunghi va avea colţul din stânga sus deasupra dreptei considerate; prin urmare, numărul minim de dreptunghiuri este n, minim atins pentru împărţirea pe trepte.



Soluţia III (**Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi)**.** Prin inducţie completă.

G53. *Fie* $ABCD$ *un pătrat de latură* 70. *Să se arate că există o mulţime de pătrate* $\mathcal{P}_k=\left\{A_iB_iC_iD_i\mid A_iB_i=i,\ i=\overline{1,k}\right\}$ *care să aibă suma ariilor egală cu aria pătratului dat. Putem acoperi pătratul* $ABCD$ *cu elementele mulţimii* $\mathcal{P}_k$*?*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Trebuie să avem $1^2+2^2+\cdots+k^2=70^2$, echivalent cu $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}=$

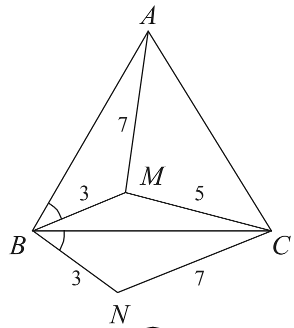
$= 70^2$, de unde $k = 24$. Soluţia este unică deoarece $k > 24$ implică $1^2+2^2+\cdots+k^2 > 70^2$ iar $k < 24$, $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 < 70^2$.

Arătăm că mulţimea $\mathcal{P}_k$ nu poate acoperi pătratul $ABCD$. Pentru aceasta, să observăm că pătratele $A_iB_iC_iD_i$, pentru a acoperi $\mathcal{P}_k$, nu au puncte comune, excepţie făcând laturile (altfel aria acoperită de acestea este mai mică decât $1^2+2^2+\cdots+24^2 = 70^2$); de asemenea, pătratele $A_iB_iC_iD_i$ nu lasă "spaţii goale" între ele (altfel aria acoperită de ele plus ariile "spaţiilor goale" este mai mare ca $1^2+2^2+\cdots+24^2 = 70^2$).

Analizând poziţia pătratului de latură 1 în pătratul $ABCD$, observăm că rămâne o suprafaţă ce nu mai poate fi acoperită (rămîne o suprafaţă dreptunghiulară de laturi 1 şi $l \geq 1$ în care nu "încape" nici unul din pătratele rămase, care au laturile mai mari sau egale cu 2).

G54. *Să se arate că nu putem alege nici un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC de latură $l \leq 10$, care să aibă distanţele la vârfuri numere prime distincte.*

Doru Buzac, Iaşi



Soluţie. Presupunem, prin absurd, că există $M \in \operatorname{Int}(ABC)$ astfel încât MA, MB, MC să fie numere prime.

Cum $MA, MB, MC < l$ şi MA, MB, MC pot fi laturile unui triunghi (teorema lui Pompeiu), deducem că $AM, BM, CM \in \{3, 5, 7\}$. Fie $AM = 7$, $BM = 3$, $CM = 5$.

Fie N astfel încât $BN = 3$ şi $m(\widehat{MBN}) = 60°$. Evident, triunghiul BMN este echilateral. Din congruenţa triunghiurilor AMB şi CNB deducem $NC = 7$. Atunci $\cos\widehat{NMC} = \dfrac{MN^2+MC^2-NC^2}{2\,MN\cdot MC} = -\dfrac{1}{2}$, deci $m(\widehat{NMC}) = 120°$ şi $m(\widehat{BMC}) = 180°$, fals. Prin urmare, nu există $M \in \operatorname{Int}(ABC)$ cu proprietatea cerută.

G55. *Printr-un punct situat în interiorul unui tetraedru se duc planele paralele cu feţele tetraedrului. Dacă V_1, V_2, V_3, V_4 sunt volumele tetraedrelor unic determinate de aceste plane, iar V este volumul tetraedrului dat, să se arate că*

$$27V \leq 16\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right).$$

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie. Notăm cu x_i distanţa de la punctul considerat la faţa tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ opusă vârfului A_i şi cu h_i înălţimea corespunzătoare acestei feţe. Fie $a_i = \sqrt[3]{V_i/V}$, $i = \overline{1,4}$. Avem $a_i = \dfrac{h_i - x_i}{h_i} = 1 - \dfrac{x_i}{h_i}$, $i = \overline{1,4}$, deci $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 4 - \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{x_i}{h_i} = 4 - \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{S_i x_i}{S_i h_i} = 4 - \dfrac{1}{V}\sum\limits_{i=1}^{4} V_i = 4 - 1 = 3$.

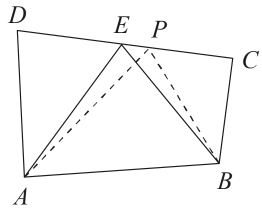
Relaţia de demonstrat se scrie $27 \leq 16\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3\right)$ şi decurge din faptul că $\dfrac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3}{4} \geq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^3 = \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{27}{64}$.

B. Nivel liceal

L46. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$ se* *intersectează într-un punct situat pe latura* $[CD]$. *Să se arate că* $CD = AD + BC$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

Soluţia I (**Irina Mustaţă**, elevă, Iaşi). Fie $m(\widehat{A}) = 2\alpha$, $m(\widehat{B}) = 2\beta$, iar $P \in (CD)$ astfel încât $AD = DP$; avem că $m(\widehat{APD}) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - m(\widehat{D})\right) = \beta$. Deosebim două cazuri, după cum $E \in (DP)$ sau $E \in (PC)$; ne plasăm în prima situaţie. Deoarece $\widehat{EPA} \equiv \widehat{EBA}$, patrulaterul $ABPE$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{CPB}) = \alpha$. Atunci $m(\widehat{CBP}) = 180^\circ - m(\widehat{C}) - \alpha = \alpha$, deci $\triangle CPB$ este isoscel cu $CP = CB$, de unde concluzia.



Soluţia II. Folosind teorema sinusurilor în triunghiurile ADE, BEC şi AEB, obţinem:

$$DE = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}} \cdot AB, \quad CE = \frac{\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2}} \cdot AB,$$

$$AD = \frac{\sin\left(B - \frac{A}{2}\right)}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}} \cdot AB, \quad BC = \frac{\sin\left(A - \frac{B}{2}\right)}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A+B}{2}} \cdot AB,$$

din care deducem

$$CD = DE + CE = AD + BC = \frac{\sin A + \sin B}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}} \cdot AB.$$

Notă. S-a mai primit soluţie corectă de la **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L47. *Dacă un triunghi are pătratele laturilor în progresie aritmetică, atunci simetricul centrului de greutate faţă de latura mijlocie se află pe cercul circumscris triunghiului.*

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC, $c < a < b$ cu $2a^2 = b^2 + c^2$. Simetricul cercului circumscris triunghiului ABC faţă de BC este cercul circumscris triunghiului BHC şi atunci simetricul lui G faţă de BC este pe cercul circumscris dacă şi numai dacă $BHGC$ este patrulater inscriptibil, echivalent cu faptul că $m(\widehat{BGC}) = m(\widehat{BHC}) = \pi - m(\widehat{A})$.

În triunghiul BGC se determină $\cos\widehat{BGC} = -\frac{a^2}{2bc}$ (se foloseşte relaţia $2a^2 = b^2 + c^2$ şi formula medianei). Cum $\cos A = \frac{a^2}{2bc}$, deducem că avem $\cos\widehat{BGC} = -\cos A$, deci $m(\widehat{BGC}) + m(\widehat{A}) = \pi$, ceea ce încheie soluţia.

Notă. Soluţii corecte au dat **Irina Mustaţă** şi **Marius Pachiţariu**, elevi, Iaşi.

L48. *Fie* R, r, R_1 *raza cercului circumscris* $\triangle ABC$, *raza cercului înscris* $\triangle ABC$, *respectiv raza cercului circumscris* $\triangle DEF$ *determinat de picioarele bisectoarelor interioare ale* $\triangle ABC$. *Să se arate că* $R/2 \geq R_1 \geq r$.

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie (**Titu Zvonaru**, Comăneşti (Bacău)). Inegalitatea $r \leq R_1$ este adevărată oricare ar fi punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ (**Liliana Niculescu -**

O metodă de demonstrare a unor inegalităţi geometrice, GM - 2-3/1993; Teorema 1, p. 51). Într-adevăr, fie Q centrul cercului circumscris $\triangle DEF$ şi d_1, d_2, d_3 distanţele de la Q la laturile BC, CA, AB. Cum fiecare dintre dreptele BC, CA şi AB este secantă sau tangentă cercului circumscris $\triangle DEF$, avem $d_1 \leq R_1$, $d_2 \leq R_1$, $d_3 \leq R_1$, deci

$$pr = \mathcal{A}_{[ABC]} = \mathcal{A}_{[QBC]} + \mathcal{A}_{[QCA]} + \mathcal{A}_{[QAB]} = \frac{ad_1}{2} + \frac{bd_2}{2} + \frac{cd_3}{2} \leq \frac{aR_1}{2} + \frac{bR_1}{2} + \frac{cR_1}{2} = pR_1,$$

adică $r \leq R_1$.

Inegalitatea $R_1 \leq R/2$ este adevărată, dacă punctele D, E, F aparţin segmentelor determinate de picioarele înălţimilor şi mijloacele laturilor respective (aşa cum se întâmplă cu picioarele bisectoarelor). În acest caz aceste puncte sunt în interiorul cercului lui Euler al $\triangle ABC$, a cărui rază este $R/2$, şi rezultă $R_1 \leq R/2$.

L49. *Într-un pătrat* 10×10 *se înscriu numerele* $1, 2, 3, \ldots, 100$ *în aşa fel încât oricare două numere consecutive să se afle în căsuţe vecine. Demonstraţi că există o linie sau o coloană ce conţine măcar două pătrate perfecte.*

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

Soluţie. Observăm că avem 10 pătrate perfecte dintre care 5 sunt pare. Presupunem că pătratele perfecte sunt situate pe linii şi coloane diferite. Colorăm tabla ca pe o tablă de şah în alb şi negru. Numerele pare vor fi situate pe căsuţe de aceaşi culoare, la fel numerele impare.

Fie (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{10}, y_{10}) coordonatele căsuţelor în care sunt situate pătratele perfecte. Datorită presupunerii că pătratele perfecte sunt pe linii şi coloane diferite, numerele x_i, $i = \overline{1, 10}$ sînt diferite două câte două şi $\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\} = \{1, 2, \ldots, 10\}$; la fel pentru numerele y_i, $i = \overline{1, 10}$. Obţinem $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_{10} + y_{10}) = 2\,(1 + 2 + \cdots + 10) =$ număr par şi rezultă că un număr par de perechi are suma pară. Cum perechile cu suma combinaţiilor pară au aceaşi culoare, deducem că există un număr par de pătrate perfecte pare, absurd.

Notă. Soluţie corectă a dat **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L50. *Fie* $(a_n)_{n \geq 1}$ *o progresie aritmetică având* $a_1 = 5$, $r = 2002$. *Pentru un element* b *al progresiei, să se arate că* b^m *aparţine progresiei dacă şi numai dacă* $60 \mid m - 1$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

Soluţie. Să demonstrăm mai întâi următoarea

Lemă. *Dacă* a, m, n *sunt numere naturale nenule astfel încât* $n \mid a^m - 1$ *şi* m *este cel mai mic număr cu această proprietate, atunci* $n \mid a^k - 1$ *dacă şi numai dacă* $m \mid k$.

Într-adevăr, dacă $m \mid k$, atunci $k = sm$ şi din $n \mid a^m - 1 \mid a^{sm} - 1$ rezultă $n \mid a^k - 1$. Presupunem $n \mid a^k - 1$. Conform teoremei împărţirii cu rest, există c şi r numere naturale astfel încât $k = mc + r$, $r < m$. Din $n \mid a^k - 1$, rezultă $n \mid a^{mc+r} - 1 = a^r\,(a^{mc} - 1) + a^r - 1$ şi deducem $n \mid a^r - 1$. Cum $r < m$, pe baza minimalităţii lui m rezultă $r = 0$, deci $m \mid k$.

Revenim la problema dată. Evident, b^m aparţine progresiei dacă şi numai dacă $2002 \mid b^m - b$. Cum $b = 5 + 2002p$, rezultă că 2002 este prim cu b şi atunci b^m aparţine progresiei dacă şi numai dacă $2002 \mid b^{m-1} - 1$. Din $b^{m-1} - 1 = (5 + 2002p)^{m-1} -$

$-5^{m-1}+5^{m-1}-1$, urmează că $2002 \mid b^{m-1}-1$ dacă şi numai dacă $2002 \mid 5^{m-1}-1$. Avem $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ şi 6, 10, 4 sunt minime cu proprietăţile $7 \mid 5^6-1$, $11 \mid 5^{10}-1$, $13 \mid 5^4-1$. Deci, pe baza lemei, $2002 \mid 5^{m-1}-1$ dacă şi numai dacă $6 \mid m-1$, $10 \mid m-1$, $4 \mid m-1$, adică dacă şi numai dacă $60 \mid m-1$.

Notă. Soluţie corectă a dat **Marius Pachiţariu**, elev, Iaşi.

L51. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice care comută şi pentru care* $\det\left(A^2+B^2\right) < (\det A + \det B)^2$. *Să se arate că $xA+yB$ este matrice nesingulară, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Se arată cu uşurinţă că

$$\det(xA+yB) = x^2 \det A + y^2 \det B + xy\left[\det(A+B) - \det A - \det B\right],\ \forall x, y \in \mathbb{C},$$

prin urmare

$$\det(A+iB)\det(A-iB) = (\det A - \det B)^2 + \left[\det(A+B) - \det A - \det B\right]^2.$$

Cum $AB = BA$, avem $(A+iB)(A-iB) = A^2+B^2$ şi relaţia anterioară devine

$$\det\left(A^2+B^2\right) = (\det A - \det B)^2 + (\det(A+B) - \det B - \det A)^2.$$

Condiţia din enunţ se rezumă la a arăta că $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, avem $\det(xA+yB) \neq 0$, deci ecuaţia $x^2 \det A + y^2 \det B + xy\left[\det(A+B) - \det A - \det B\right] = 0$ nu admite soluţii reale nebanale. Într-adevăr, discriminantul acestei ecuaţii este

$$\Delta = \left[\det(A+B) - \det A - \det B\right]^2 - 4\det A \det B = \det\left(A^2+B^2\right) -$$
$$-(\det A - \det B)^2 - 4\det A\det B = \det\left(A^2+B^2\right) - (\det A + \det B)^2 < 0.$$

L52. *Fie $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad m având rădăcinile distincte. Să se determine cardinalul mulţimii*

$$E = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ a. î. } Q(A) = O_n \text{ şi } P(X) = \det(XI_n - A)\right\}.$$

Ovidiu Munteanu, Braşov

Soluţie. Fie $P \in E$. Există $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Q(A) = O_n$ şi $P(x) = \det(xI_n - A)$. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o rădăcină a lui P. Rezultă că sistemul $AX = \lambda X$ are şi o soluţie nebanală, notată X_0. Este uşor de văzut că $Q(A)X_0 = Q(\lambda)X_0$ şi prin urmare $Q(\lambda) = 0$, deci rădăcinile lui P sunt n numere din mulţimea $\{\lambda_1,\ \lambda_2 \ldots \lambda_m\}$, unde λ_i sunt rădăcinile lui Q. Prin urmare, P este determinat de n numere, nu neapărat distincte, α_1, α_2, $\ldots$, α_n din mulţimea $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.

Invers, dând un polinom P care are ca rădăcini n numere α_1, α_2, $\ldots$, α_n ca mai sus, fie A matricea care are pe diagonala principală α_1, α_2, $\ldots$, α_n şi 0 în rest. Evident, $\det(xI_n - A) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) = P(x)$, iar $Q(A)$ este o matrice care are pe diagonala principală $Q(\alpha_i) = 0$ şi 0 în rest, deci $Q(A) = O_n$. Rezultă că $P \in E$. Prin urmare, numărul de elemente al lui E este egal cu numărul de posibilităţi de a alege n numere oarecare dintr-o mulţime cu m elemente, fără a conta ordinea, adică C_m^n.

L53. *Fie $n \geq 2$ şi $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu n^2 elemente, care are cel mult $n-2$ divizori ai lui zero. Să se arate că A este corp.*

Gabriel Dospinescu, elev, Oneşti

Soluţie. Presupunem că A nu este corp. Fie T mulţimea divizorilor lui zero; urmează că $T \neq \emptyset$. Presupunem că T are k elemente, $1 \leq k \leq n-2$. Considerăm

$x \in T$ şi $a \in A^* \backslash T$. Există $d \neq 0$ încât $xd = dx = 0$. Atunci $(ax)\, d = d\,(ax) = 0$, deci $ax = 0$ sau $ax \in T$. Dacă $ax = 0$, avem $a \in T$, fals. Deci $ax \in T$ şi prin urmare putem defini $f : A^* \backslash T \to T$, $f(a) = ax$. Cum $A^* \backslash T$ are $n^2 - k - 1$ elemente, T are k elemente şi $\dfrac{n^2 - k - 1}{k} > n$, există elementele diferite $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in A^* \setminus T$ astfel încât $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Deducem că $(a_{n+1} - a_i)\, x = x\,(a_{n+1} - a_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Deci $a_{n+1} - a_i \in T$ pentru $i = \overline{1,n}$. Aşadar T are cel puţin n elemente, contradicţie.

L54. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă pentru care $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$. Să se determine funcţiile continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac identitatea*

$$f(x)\left[\int_0^y \varphi(t)\, dt - \frac{1}{a}\varphi(y)\right] = f(y)\left[\int_0^x \varphi(t)\, dt - \frac{1}{a}\varphi(x)\right], \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

unde $a \neq 0$ este o constantă dată.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Relaţia dată pote fi scrisă sub forma

$$\frac{\int_0^y \varphi(t)\, dt - \frac{1}{a}\varphi(y)}{f(y)} = \frac{\int_0^x \varphi(t)\, dt - \frac{1}{a}\varphi(x)}{f(x)}, \quad \forall x, y \neq 0.$$

Prin urmare, $\dfrac{\int_0^x \varphi(t)\, dt - \frac{1}{a}\varphi(x)}{f(x)} = c$, $c \in \mathbb{R}$, deci $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\, dt - \frac{1}{a}\varphi(x) = cf(x)$, egalitatea având loc şi pentru $x = 0$, în baza continuităţii. Pentru $x = 0$ rezultă $\varphi(0) = -acf(0)$.

Prin derivare obţinem ecuaţia $\varphi(x) - \dfrac{1}{a}\varphi'(x) = cf'(x)$, ce are soluţia $\varphi(x) = e^{ax}\left(k + \displaystyle\int_0^x e^{-at}\left(-acf'(t)\right) dt\right)$, unde $k = \varphi(0) = -acf(0)$. Aşadar, $\varphi(x) = -ace^{ax}\left(f(0) + \displaystyle\int_0^x e^{-at} f'(t)\, dt\right)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

L55. *Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Definim şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin $x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$; $x_n = \dfrac{a}{\ln a} - \dfrac{n}{\ln a}\, x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Prin inducţie matematică se arată că $x_n = \displaystyle\int_0^1 a^x x^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = \dfrac{a-1}{\ln a}$. Pentru $a \in (0,1)$ avem $x^n a \leq x^n a^x \leq x^n$, $\forall x \in [0,1]$; integrând, obţinem $\dfrac{a}{n+1} \leq \displaystyle\int_0^1 a^x x^n dx \leq \dfrac{1}{n+1}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Pentru $a \in (1, \infty)$, din $x^n \leq x^n a^x \leq x^n a$, $\forall x \in [0,1]$, deducem $\dfrac{1}{n+1} \leq x_n \leq \dfrac{a}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

În concluzie, pentru orice $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Din relaţia de recurenţă rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n x_{n-1} = a$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = a$.