Soluţiile problemelor propuse în nr. 2 / 2002

Clasele primare

P.33. *Care este cel mai mare număr pe care îl spunem atunci când numărăm crescător din doi în doi, din trei în trei sau din cinci în cinci, pornind de la* 1 *şi fără să depăşim* 100*?*

(*Clasa I*) **Raluca Popa, elevă, Iaşi**

Soluţie. Sunt spuse şirurile de numere $(1, 3, 5, \ldots, 97, 99)$, $(1, 4, 7, \ldots, 97, 100)$ şi $(1, 6, 11, \ldots, 91, 96)$. Numărul 100 îndeplineşte cerinţa problemei.

P.34. *Numărul merelor de pe o farfurie este cu* 3 *mai mare decât cel mai mare număr natural scris cu o cifră. Numărul perelor de pe aceeaşi farfurie nu depăşeşte numărul merelor, dar este mai mare decât jumătate din numărul acestora. Câte pere pot fi pe farfurie?*

(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Numărul merelor este $9 + 3 = 12$. Jumătatea lui 12 este 6. Pe farfurie pot fi: 7, 8, 9, 10, 11 sau 12 pere.

P.35. *Care dintre numerele* 3132*,* 8182*,* 3435*,* 3932*,* 2021*,* 5960 *este intrusul?*

(*Clasa a II-a*) **Matei Luca, elev, Iaşi**

Soluţie. Toate numerele, cu excepţia lui 3932, sunt formate cu cifrele a două numere consecutive. Intrusul este 3932.

P.36. *Cum putem realiza egalităţile*

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 28 \quad \text{şi} \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 28$$

înserând între cifrele 4 *de mai sus semnele grafice* $+$, $-$, $\times$, $:$, $(\ )$*?*

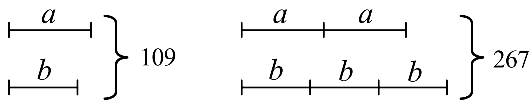
(*Clasa a II-a*) **Alexandru-Gabriel Tudorache, elev, Iaşi**

Soluţie. Pentru prima egalitate avem $(4 + 4) \times 4 - 4 = 28$. Pentru a doua egalitate avem $(4 + 4) \times 4 - 4 : (4 : 4) = 28$ sau $(4 + 4) \times 4 - 4 + 4 - 4 = 28$.

P.37. *Suma a două numere naturale este* 109*. Dacă îl dublăm pe primul şi îl triplăm pe al doilea, suma devine* 267*. Care sunt numerele?*

(*Clasa a II-a*) **Înv. Galia Paraschiva, Iaşi**

Soluţie.



Dublul sumei numerelor a şi b este $109 \times 2 = 218$. Al doilea număr este $267 - 218 = 49$ iar primul număr este $109 - 49 = 60$.

P.38. *Câte înmulţiri de tipul* $\overline{abc} \times 9 = \overline{8d1e}$ *sunt posibile?*

(*Clasa a III-a*) **Sergiu Diaconu, elev, Iaşi**

Soluţie. Avem $\overline{abc} = \overline{8d1e} : 9 = \left(8010 + \overline{d0e}\right) : 9 = 890 + \overline{d0e} : 9$. Distingem cazurile: $d = 1$, $e = 8$; $d = 2$, $e = 7$; $\ldots$; $d = 8$, $e = 1$; $d = 9$, $e = 0, 9$; în total, 10 cazuri. Adăugând şi cazul $d = 0$, $e = 0, 9$, obţinem 12 înmulţiri posibile.

P.39. *Scrieţi cel mai mic număr natural de şase cifre care îndeplineşte, în acelaşi timp, condiţiile: a) nu are cifre care se repetă; b) suma cifrelor sale este* 30*; c) este* *mai mare decât* 900000.

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

Soluţie. Cel mai mare număr natural scris cu şase cifre distincte este 987654 care are suma cifrelor 39. Numărul căutat este 987510.

P.40. *Emilia are de rezolvat un număr de probleme. A hotărât să rezolve câte* 4 *probleme pe zi. Ea lucrează însă mai mult cu* 2 *probleme pe zi şi termină de rezolvat cu* 5 *zile mai devreme. Câte probleme a avut de rezolvat şi în câte zile le-a terminat?*

(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

Soluţie. Emilia rezolvă câte $4+2=6$ probleme pe zi. În ultimele 5 zile trebuia să rezolve $5\times 4=20$ probleme. Emilia a terminat de rezolvat problemele în $20:2=10$ zile şi a rezolvat $10\times 6=60$ probleme.

P.41. *Ştiind că data de* 1 *Decembrie din anul* 2001 *a fost într-o zi de sâmbătă, să se afle care va fi următorul an în care ziua de* 1 *Decembrie se va sărbători într-o zi de duminică.*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

Soluţie. De la 1.12.2001 până la 30.11.2002 sunt 365 zile. Deoarece $365 = 7\times 52+1$, ziua de 30.11.2002 este într-o sâmbătă. Ziua de 1.12.2002 se va sărbători într-o zi de duminică.

P.42. *Dănilă Prepeleac i-a propus dracului să se întreacă la trântă, dar pentru a-l pune la încercare i-a spus că are un unchi, moş Ursilă, bătrân de* 999 *ani şi* 52 *săptămâni, şi de-l va putea trânti pe dânsul, se vor întrece apoi amândoi . Dacă* $\frac{1}{4}$ *din vârsta lui moş Ursilă depăşeşte cu* 220 *ani* $\frac{5}{8}$ *din vârsta nepotului, ce vârstă are Dănilă?*

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Valerica Beldiman, Iaşi**

Soluţie. Vârsta lui moş Ursilă este 999 ani +52 săptămâni = 1000 ani. O pătrime din vârsta lui moş Ursilă este $1000:4=250$ ani. Cinci optimi din vârsta nepotului reprezintă $250-220=30$ ani. Vârsta nepotului este $30:5\times 8=6\times 8=48$ ani.

P.43. *Primele douăsprezece numere dintr-un şir de numere sunt:* 1*,* 2*,* 0*,* 3*,* 4*,* 1*,* 5*,* 6*,* 2*,* 7*,* 8*,* 0*.*

a) *Scrieţi următoarele* 6 *numere din şir;*

b) *Calculaţi suma primelor* 111 *numere din şir.*

(*Clasa a IV-a*) **Alina Stan, elevă, Iaşi**

Soluţie. *a*) Observăm că: $(1+2):3=1$ (rest 0); $(3+4):3=2$ (rest 1); $(5+6):3=3$ (rest 2). După fiecare grupă de două numere naturale consecutive a fost pus restul împărţirii sumei lor la 3. Următoarele şase numere sunt: $9, 10, 1, 11, 12, 2$.

b) Avem $111:3=37$ grupe de câte trei numere în care intră primele 74 numere naturale cu suma $S_1=(1+74)\times 74:2=2775$. În trei grupe consecutive avem resturile 0, 1, 2 care au suma 3. Cum $37=3\times 12+1$, înseamnă că suma resturilor $S_2=12\times 3=36$. Suma celor 111 numere este $S=S_1+S_2=2775+36=2811$.

Clasa a V-a

V.31. *Să se arate că* $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}>\frac{7}{12}$.

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Grupând termenii din sumă obţinem

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}=\left(\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{150}\right)+\left(\frac{1}{151}+\ldots+\frac{1}{200}\right)>$$
$$>\frac{50}{150}+\frac{50}{200}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

V.32. *Determinaţi numerele prime a,b,c pentru care $5a+4b+7c=107$.*

Mihai Crăciun, Paşcani

Soluţie. Deoarece $5a+7c$ trebuie să fie impar, a şi c au parităţi diferite; fiind prime, unul dintre ele este egal cu 2. Dacă $a=2$, atunci $4b+7c=97$, cu soluţiile $b=19$, $c=3$ şi $b=5$, $c=11$. Dacă $c=2$, atunci $5a+4b=93$, cu soluţiile $a=5$, $b=17$; $a=13$, $b=7$ şi $a=17$, $b=2$.

V.33. *Un număr natural scris în baza* 10 *are suma cifrelor* 603. *Este posibil ca succesorul său să aibă suma cifrelor* 1*? Dar ca acesta să aibă suma cifrelor* 3*?*

Matei Luca, elev, Iaşi

Soluţie. Numărul $\underbrace{99\ldots9}_{67\text{ cifre}}$ are suma cifrelor 603, iar succesorul său este $\underbrace{10\ldots0}_{68\text{ cifre}}$, cu suma cifrelor 1. La a doua întrebare, răspunsul este negativ, deoarece nu este posibil ca atât numărul cât şi succesorul său să fie multipli de 3.

V.34. *Aflaţi numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abc}=2^n\cdot\overline{ab}+3^n\cdot\overline{bc}+5^n\cdot\overline{ca}$, unde $n\in\mathbb{N}$.*

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie. În mod evident, $a,b,c\geq 1$. Pentru $n=0$, obţinem că $89a=b+10c$, şi cum $b+10c\leq 99$, rezultă că $a=1$. De aici, $b+10c=89$ şi deci $b=9$, $c=8$.

Pentru $n=1$ obţinem că $75a=22b+52c$, de unde $25\mid 25(b+2c)+(2c-3b)$, şi deci $25\mid 2c-3b$. Cum $2c-3b<25$ şi $2c-3b\geq -25$, obţinem $2c-3b=0$ sau $2c-3b=-25$. Dacă $2c=3b$, atunci $3\mid c$. Cum $3\mid 75a$ şi $3\mid 52c$, rezultă că $3\mid 22b$, deci $3\mid b$ şi de fapt c este multiplu de 9. Obţinem deci $c=9$, $b=6$, $a=8$. Dacă $2c-3b=-25$, atunci $c=1$, $b=9$ şi atunci $75a=250$, deci a nu este întreg.

Pentru $n=2$ obţinem că $25a=84b+258c$. Cum $25a\leq 225$ şi $84b+258c\geq$ ≥ 342, ecuaţia nu are soluţie în acest caz.

Pentru $n\geq 3$, $2^n\overline{ab}+3^n\overline{bc}+5^n\overline{ca}\geq 11\,(2^n+3^n+5^n)\geq 1760$, deci ecuaţia nu are soluţie. În final, $\overline{abc}\in\{198,869\}$.

V.35. *Se dă numărul $N=\overline{77\ldots7}$ cu* 2002 *cifre. Cercetaţi dacă N se poate scrie ca suma a două sau trei pătrate perfecte impare.*

Tamara Culac, Iaşi

Soluţie. $N=a\cdot 100+77$, deci $N=M_4+1$. Dacă $N=x^2+y^2+z^2$, cu $x,y,z\in\mathbb{N}$ impare, atunci $N=(2k+1)^2+(2l+1)^2+(2n+1)^2=M_4+3$, contradicţie. Dacă $N=x^2+y^2$, cu $x,y\in\mathbb{N}$ impare, se obţine în mod analog că $N=M_4+2$, contradicţie.

Clasa a VI-a

VI.31. *Fie $S=\underbrace{\overline{a_1a_1\ldots a_1}}_{k_1\text{ cifre}}+\underbrace{\overline{a_2a_2\ldots a_2}}_{k_2\text{ cifre}}+\ldots+\underbrace{\overline{a_na_n\ldots a_n}}_{k_n\text{ cifre}}$, unde $k_1,k_2,\ldots,$ $k_n\geq 2$. Arătaţi că S se divide cu* 4 *dacă şi numai dacă $a_1+a_2+\ldots+a_n$ se divide cu* 4.

Dumitru Gherman, Paşcani

Soluţie. Deoarece $\underbrace{\overline{a_1a_1\ldots a_1}}_{k_1 \text{ cifre}} = a_1 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{k_1 \text{ cifre}} = a_1\left(\overline{11\ldots 100}+12-1\right) = M_4 - a_1$ şi analoagele, obţinem că $S = M_4 - (a_1+a_2+\ldots+a_n)$, de unde concluzia.

VI.32. *Aflaţi* $\overline{ab}$ *ştiind că* $\overline{ab} = (a-b)! \cdot \left(\overline{ba}-3\right)$ (*unde* $0! = 1$, *iar* $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $\forall n \geq 1$).

Nicolae Stănică, Brăila

Soluţie. Pentru $a-b=0$ sau $a-b=1$ obţinem $\overline{ab} = \overline{ba}-3$, deci $9a = 9b-3$, contradicţie. Pentru $a-b=2$ obţinem $\overline{ab} = 2\overline{ba}-6$, deci $8a = 19b-6$. Cum $a-b=2$, rezultă, că $a=4$, $b=2$. Pentru $a-b=3$, avem $\overline{ab} = 6\overline{ba}-18$, adică $55b = 30$, absurd. Pentru $a-b \geq 4$ obţinem că $(a-b)!\left(\overline{ba}-3\right) \geq 24\left(\overline{ba}-3\right) \geq 24\,(10b+b+4-3)$, deci $(a-b)!\left(\overline{ba}-3\right) \geq 264b \geq 264$, contradicţie. În final $\overline{ab} = 42$.

VI.33. *Într-o urnă sunt bile albe, roşii, negre şi albastre. Numărul bilelor albe este* $\dfrac{3}{5}$ *din numărul celorlaltor bile; bilele roşii reprezintă jumătate din celelalte bile, iar bilele negre a treia parte din numărul celorlaltor bile. Dacă extragem o bilă, calculaţi probabilitatea ca aceasta să fie roşie sau albastră.*

Marcel Rotaru, Bârlad

Soluţie. Notăm numărul total de bile cu n. Cu ajutorul proporţiilor derivate obţinem că numărul bilelor roşii este $\dfrac{n}{3}$, al bilelor albe este $\dfrac{3n}{8}$, iar al bilelor negre este $\dfrac{3n}{4}$. De aici rezultă că numărul bilelor albastre este $\dfrac{n}{24}$. Probabilitatea cerută este atunci $p = \dfrac{n/3+n/24}{n} = \dfrac{3}{8}$.

VI.34. *În* $\triangle ABC$, *fie* M *mijlocul laturii* $[BC]$. *Dacă* $d\,(M,AC) = \dfrac{AB}{2}$, *arătaţi că* $m(\widehat{A}) = 90°$.

N. N. Hârţan, Iaşi

Soluţie. Fie $MN \perp AC$ şi $BA' \perp AC$, $M, A' \in AC$. Atunci $MN = d\,(M,AC)$ şi MN este linie mijlocie în $\triangle BA'C$, deci $MN = \dfrac{BA'}{2}$. Rezultă de aici că $BA' = BA$ şi deoarece $BA' \perp AC$, rezultă că $m(\widehat{A}) = 90°$.

VI.35. *În* $\triangle ABC$, $m(\widehat{A}) = 60°$ *şi* $m(\widehat{C}) = 45°$. *Bisectoarea* $[AD$ *şi înălţimea* $[BE]$ *se intersectează în* M (*cu* $D \in [BC]$, $E \in [AC]$). *Să se arate că* $\dfrac{AM}{EC} = \dfrac{2}{3}$.

Romeo Cernat, Iaşi

Soluţie. În $\triangle ABC$, $m(\widehat{EBC}) = 180° - 90° - 45° = 45°$, deci $\triangle EBC$ este isoscel cu $EC = BE$. Deoarece $m(\widehat{ABM}) = 75° - 45° = 30° = m(\widehat{BAM})$, $\triangle ABM$ este isoscel cu $AM = BM$. În $\triangle AEM$, $m(\widehat{AEM}) = 90°$ şi $m(\widehat{EAM}) = 30°$, deci $ME = \dfrac{AM}{2}$. De aici, $\dfrac{AM}{EC} = \dfrac{AM}{EB} = \dfrac{AM}{BM+ME} = \dfrac{AM}{AM+AM/2} = \dfrac{2}{3}$.

Clasa a VII-a

VII.31. *Să se rezolve ecuaţia* $1 + a^{2x} + b^{2x} = a^x + b^x + a^x b^x$, *cu* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$.

Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţie. Înmulţind egalitatea cu 2 obţinem, după gruparea convenabilă a termenilor, $(a^x-1)^2-(b^x-1)^2+(a^x-b^x)^2=0$, de unde $a^x=b^x=1$, deci $x=0$.

VII.32. *Fie a şi b,c lungimile ipotenuzei şi respectiv catetelor unui triunghi dreptunghic. Să se arate că* $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10$.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Deoarece $a^2=b^2+c^2$, obţinem că

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10 \Leftrightarrow 2\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}\right)\geq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(b^2+c^2\right)^2}{b^2c^2}\geq 4 \Leftrightarrow \left(b^2-c^2\right)^2\geq 0,$$

ultima inegalitate fiind evidentă.

VII.33. *Triunghiul ABC are unghiul A obtuz şi semiperimetrul p. Cercurile de diametre $[AB]$ şi $[AC]$ delimitează o suprafaţă comună S. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: "Există $P\in S$ astfel încât $d_1+d_2+d_3=p$", unde d_i sunt distanţele de la P la laturile triunghiului ABC.*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Este cunoscut că într-un triunghi dreptunghic mediana ce pleacă din vârful unghiului drept este jumătate din ipotenuză, în timp ce într-un triunghi obtuzunghic mediana ce pleacă din vârful unghiului obtuz este mai mică strict decât jumătate din latura ce se opune unghiului obtuz.

Fie $P\in S$ şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Atunci $d_1+d_2+d_3\leq$ $\leq PA_1+PB_1+PC_1$. Cum $m(\widehat{APB})\geq 90°$, $m(\widehat{APC})\geq 90°$, $m(\widehat{BPC})\geq 90°$, iar cel puţin una din inegalităţi este strictă, prin aplicarea rezultatului menţionat anterior obţinem că $d_1+d_2+d_3<\frac{c}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, deci $d_1+d_2+d_3<p$ şi propoziţia din enunţ este falsă.

VII.34. *Fie ABC un triunghi, iar I un punct interior lui. Dacă cercurile înscrise în triunghiurile AIB, BIC şi CIA sunt congruente şi tangente două câte două, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie $\mathcal{C}_1(O_1,r)$, $\mathcal{C}_2(O_2,r)$, $\mathcal{C}_3(O_3,r)$ cercurile înscrise în $\triangle BIC$, $\triangle CIA$, $\triangle AIB$ şi notăm $T_1=\mathcal{C}_2\cap\mathcal{C}_3$, $T_2=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_3$, $T_3=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$; evident, $T_1\in AI$, $T_2\in BI$, $T_3\in CI$. Atunci $O_1O_2=O_1T_3+T_3O_2=2r$ şi analog $O_1O_3=O_2O_3=2r$, deci $\triangle O_1O_2O_3$ este echilateral. În patrulaterul $IT_1O_3T_2$,

$$m(\widehat{T_1IT_2})=360°-90°-90°-60°=120°,$$

adică $m(\widehat{AIB})=120°$ şi analog demonstrăm că $m(\widehat{BIC})=m(\widehat{CIA})=120°$. În $\triangle AIB$,

$$m(\widehat{AIB})=180°-m(\widehat{IAB})-m(\widehat{IBA})=180°-\frac{m(\widehat{A})+m(\widehat{B})}{2}=90°+\frac{m(\widehat{C})}{2},$$

de unde $m(\widehat{C})=60°$ şi analog $m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=60°$, de unde obţinem că $\triangle ABC$ este echilateral.

VII.35. *Fie $ABCD$ un paralelogram, O centrul cercului circumscris $\triangle ABD$, iar H ortocentrul $\triangle BCD$. Să se arate că punctele A,O,H sunt coliniare.*

Constantin Cocea şi Dumitru Neagu, Iaşi

Soluţie. Deoarece $BH \perp CD$ şi $AB \parallel CD$, $BH \perp AB$ şi deci $m(\widehat{ABH}) = 90°$; analog obţinem că $m(\widehat{HDA}) = 90°$. De aici rezultă că $ABHD$ este inscriptibil şi cum $m(\widehat{ABH}) = 90°$, $[AH]$ este diametru pentru cercul circumscris triunghiului ABD, deci îl conţine pe O.

Clasa a VIII-a

VIII.31. *Să se determine mulţimea* $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \dfrac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}\right\}$.

A. V. Mihai, Bucureşti

Soluţie. Deoarece $\dfrac{4n-1}{mn+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $4n-1 \geq mn+1$. De aici, $n(4-m)-2>0$ şi deci $m < 4$, adică $m \in \{1,2,3\}$. Pentru $m = 1$ obţinem că $\dfrac{4n-1}{mn+1} = 4 - \dfrac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$, ceea ce implică $n = 4$. Pentru $m = 2$, avem că $\dfrac{4n-1}{mn+1} = 2 - \dfrac{3}{2n+1} \in \mathbb{N}$, deci $n = 1$. Pentru $m = 3$ obţinem că $\dfrac{4n-1}{mn+1} = 1 + \dfrac{n-2}{3n+1}$. Cum $3n+1 > n-2$, este necesar ca $n - 2 = 0$, deci $n = 2$. În final, $A = \{(1,4), (2,1), (3,2)\}$.

VIII.32. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2002}{x^2-x+2002} = 2002.$$

Mihaela Predescu, Piteşti

Soluţie.

$$\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2002}{x^2-x+2002} = 2002 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2-x+1} - 1\right) + \left(\frac{2}{x^2-x+2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{2002}{x^2-x+2002} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - x^2\right)\left(\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{1}{x^2-x+2002}\right) = 0.$$

Cum $x^2-x+1, x^2-x+2, \ldots, x^2-x+2002 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x \in \{0,1\}$.

VIII.33. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pentru care*

$$1 + f(x+y) \leq f(x) + f(y) \leq x + y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Pentru $x = y = 0$ obţinem $1 + f(0) \leq 2f(0) \leq 2$, de unde $f(0) = 1$. Fiindcă $f(x) + f(y) \leq x + y + 2$, pentru $y = 0$ găsim că $f(x) \leq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f(x) + f(y) \geq 1 + f(x+y)$, pentru $y = -x$ obţinem că $f(x) \geq 2 - f(-x)$. Dar $f(-x) \leq -x + 1$, de unde $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce implică $f(x) = 1 + x$.

VIII.34. *Fie AB dreapta soluţiilor ecuaţiei* $x - y = 5$ *şi CD dreapta soluţiilor ecuaţiei* $x + y = 3$, *cu* $A, C \in Ox$, $B, D \in Oy$. *a) Arătaţi că* $AB \perp CD$; *b) Calculaţi aria şi perimetrul triunghiului BCD; c) Arătaţi că* $AD \perp BC$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

Soluţie. *a)* Printr-un calcul imediat se deduce că $A(5,0)$, $B(0,-5)$, $C(3,0)$, $D(0,3)$. Fie $AB \cap CD = \{E\}$ şi $EF \perp BD$, $F \in Oy$. Atunci $E(4,-1)$, $F(0,-1)$.

Deoarece $EF = BF = FD = 4$ şi $EF \perp BD$, $\triangle BEF$ şi $\triangle FED$ sunt dreptunghice isoscele şi $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{FED}) = 45°$, de unde $m(\widehat{BED}) = 90°$ şi deci $AB \perp CD$.

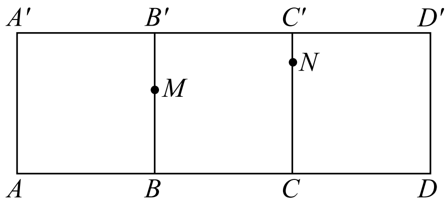
b) $S_{BCD} = 12$, $P_{BCD} = \sqrt{34} + 3\sqrt{2} + 8$.

c) Deoarece AO şi DE sunt înălţimi în $\triangle BAD$ şi $AO \cap DE = \{C\}$, C este ortocentrul $\triangle BAD$ şi deci BC este de asemenea înălţime în $\triangle BAD$.

VIII.35. *Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie a. Determinaţi poziţiile punctelor $M \in (BB')$ şi $N \in (CC')$ pentru care perimetrul patrulaterului strâmb $AMND'$ este minim; aflaţi această valoare minimă.*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. $P_{AMND'} = AM + MN + ND' + AD'$ este minim $\Leftrightarrow AM + MN + ND'$ este minimă. Desfăşurând suprafaţa laterală a cubului ca în figură, $S = AM + MN + ND'$ este minimă $\Leftrightarrow A, M, N, D'$ sunt coliniare. Atunci $S_{\min} = AD' = a\sqrt{10}$, iar valoarea minimă a $P_{AMND'}$ este $AD' + S_{\min} = a\sqrt{2} + a\sqrt{10}$.



Clasa a IX-a

IX.31. *Fie mulţimile $A = \{x^2 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x^3 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x^4 + x^3 + x^2 + x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{2x^4 \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$. Determinaţi $A \cap C$, $B \cap D$, $A \cap D$, $A \cap B$.*

Andrei Nedelcu, Iaşi

Soluţie. Fie $u = n^2 + n = m^4 + m^3 + m^2 + m \in A \cap C$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $(2n+1)^2 = 4m^4 + 4m^3 + 4n^2 + 4m + 1$, şi grupând în două moduri termenii din membrul drept obţinem

$$(2n+1)^2 = (2m^2 + m)^2 + (3m^2 + 4m + 1), \tag{1}$$

respectiv

$$(2n+1)^2 = (2m^2 + m + 1)^2 + 2m - m^2. \tag{2}$$

Folosind semnul funcţiei de gradul al doilea, obţinem

$$(1) \Rightarrow (2n+1)^2 > (2m^2 + m)^2 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\},$$

$$(2) \Rightarrow (2n+1)^2 < (2m^2 + m + 1)^2 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

Urmează că dacă $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1, 2\}$, atunci $(2n+1)^2$ se află între pătratele a două numere întregi consecutive, ceea ce este imposibil.

Pentru $m = -1$, obţinem $n = 0$ sau $n = -1$ şi $u = 0$. Pentru $m = 0$ obţinem din nou $n = 0$ sau $n = -1$ şi $u = 0$. Pentru $m = 1$ nu există n cu proprietatea căutată, iar pentru $m = 2$ obţinem $n = 5$ sau $n = -6$ şi $u = 30$. În concluzie, $A \cap C = \{0, 30\}$.

Fie acum $u = n^3 + n = 2m^4 \in B \cap D$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci $(n+1)^4 - (n-1)^4 = (2m)^4$, ecuaţie care nu are soluţii nebanale, conform teoremei lui Fermat. Atunci $n - 1 = 0$, deci $m = 1$ sau $m = -1$, de unde $u = 2$, sau $2m = 0$, deci $n = 0$, de unde $u = 0$. În concluzie, $B \cap D = \{0, 2\}$.

Analog se tratează $A \cap D$ şi $A \cap B$.

IX.32. *Fie $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, funcţii care păstrează semnul variabilei. Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x_1 + f_1(x_1) + g_1(x_1) = x_2 \\ x_2 + f_2(x_2) + g_2(x_1 + x_2) = x_3 \\ \dots \\ x_n + f_n(x_n) + g_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_1. \end{cases}$$

Obţineţi sisteme diverse prin particularizarea funcţiilor!

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Pentru $x_1 > 0$, deducem din prima ecuaţie că $x_2 > x_1 > 0$. În mod asemănător, $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_1$, contradicţie. Pentru $x_1 < 0$, obţinem analog că $0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_1$. De aici, $x_1 = 0$ şi analog $x_2 = \dots = x_n = 0$. Exemple de funcţii care păstrează semnul variabilei: $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ etc.

IX.33. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}$ *ecuaţia* $n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] = 11 \cdot \left[\frac{n}{36}\right]$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] - 11\left[\frac{n}{36}\right]$. Avem că $f(n+36) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci f periodică de perioadă 36. De asemenea, $f(0) = 0$, iar pentru $n = 1, 2, \dots, 35$, $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \le \frac{n}{2} + \frac{n}{3} = \frac{5n}{6} < n$, iar $\left[\frac{n}{36}\right] = 0$, deci $1, 2, \dots, 35$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei. În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = \{36k;\ k \in \mathbb{N}\}$.

IX.34. *Fie* $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. *Să se determine* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ *ştiind că*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \frac{n+1}{2} = 2\left(x_1 \sin\frac{\pi}{n+1} + x_2 \sin\frac{2\pi}{n+1} + \dots + x_n \sin\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Vladimir Martinuşi, Iaşi

Soluţie. Egalitatea din enunţ revine la

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1} - \frac{n+1}{2}.$$

Ţinând seama de formulele $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ka = \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$, obţinem că $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k - \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^2 = 0$, de unde $x_k = \sin\frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1,n}$.

IX.35. *Arătaţi că* $\sin(\cos x) + \sin(\cos y) < 2\cos\frac{x+y}{2}$, $\forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie. Ţinând seama că $\sin x < x$ şi $0 < \cos x < 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obţinem

$$\sin(\cos x) + \sin(\cos y) < \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \le 2\cos\frac{x+y}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a X-a

X.31. *Considerăm şirurile* $(F_n)_{n\ge 0}$, $(L_n)_{n\ge 0}$ *definite prin* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \ge 0$, *respectiv* $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \ge 0$. *Să se arate că* $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} L_k^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k-1}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} F_{k+1}^2}$.

Mihail Bencze, Braşov

Soluţie. Se arată (prin inducţie) că $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Conform inegalităţii lui Minkowski, urmează concluzia.

X.32. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi pozitive. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se notează cu P_n graficul funcţiei $f_n(x) = a_n x^2 + a_{n+1}x + a_{n+2}$. Determinaţi legea de definire a şirului ştiind că parabolele P_n au vârfurile pe axa Ox.*

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Condiţia ca parabolele să fie cu vârfurile pe Ox revine la $\Delta_n = a_{n+1}^2 - 4a_n a_{n+2} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin logaritmare, obţinem $2\ln a_{n+1} = \ln a_n + \ln a_{n+2} + \ln 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$, sau $t_{n+1} = t_n - \ln 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $t_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$. Aşadar, t_n este o progresie aritmetică cu raţia $r = -\ln 4$, şi deci $t_n = t_0 + nr$, ceea ce implică $a_{n+1} = e^{t_0+nr}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a_n = e^{n\ln\frac{a_1}{a_0} - n(n-1)\ln 2}a_0$, de unde $a_n = \dfrac{a_0}{2^{n(n-1)}}\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)^n$.

X.33. *Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$, unde $a \in (1,\infty)$, $b \in (0,1)$, $ab \neq 1$. Să se arate că există o infinitate de paralelograme cu vârfurile pe reuniunea graficelor celor două funcţii.*

Petru Asaftei, Iaşi

Soluţie. Fie $x_1 > 0$ şi $B(x_1, g(x_1))$. Deoarece $f((-\infty,0)) = (0,1)$, $\exists x_2 < 0$ astfel încât $f(x_2) = g(x_1)$ şi atunci şi $f(-x_2) = g(-x_1)$. Construim $A(x_2, f(x_2))$, $A'(-x_2, f(-x_2))$, $B'(-x_1, g(-x_1))$. Deoarece $ab \neq 1$ rezultă că $x_2 \neq -x_1$ şi $ABA'B'$ este nedegenerat. Segmentele AA' şi BB' au mijloacele $M\left(0, \dfrac{f(x_2)+f(-x_2)}{2}\right)$, respectiv $N\left(0, \dfrac{g(x_1)+g(-x_1)}{2}\right)$, deci $M \equiv N$ şi $ABA'B'$ este paralelogram. Cum x_1 a fost arbitrar, problema este rezolvată.

X.34. *Să se arate că ecuaţiile $4\cdot 9^x + (4x-45)\cdot 3^x + 11 - x = 0$ şi $4\cdot 18^x - 3\cdot 6^x - 128\cdot 3^x + 2^x + 32 = 0$ sunt echivalente.*

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Soluţie. Din prima ecuaţie obţinem că $\left(3^x - \dfrac{1}{4}\right)(3^x - 11 + x) = 0$, deci $3^x = \dfrac{1}{4}$, cu soluţia $x_1 = -2\log_3 2$, sau $3^x = 11 - x$, cu soluţia $x_2 = 2$, unică deoarece $f_1 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f_1(x) = 3^x$ este strict crescătoare, iar $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 11 - x$ este strict descrescătoare. Din cea de-a doua ecuaţie obţinem că $(4\cdot 3^x - 1)(6^x - 2^x - 32) = 0$, deci $3^x = \dfrac{1}{4}$, cu soluţia $x_3 = -2\log_3 2$ sau $6^x = 2^x + 32$, echivalentă cu $3^x = 1 + \dfrac{32}{2^x}$. Cum $f_3 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f_3(x) = 3^x$ este strict crescătoare iar $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = 1 + \dfrac{32}{2^x}$ este strict descrescătoare, ecuaţia $f_3(x) = f_4(x)$ are o singură soluţie, anume $x_4 = 2$.

X.35. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ de module egale astfel încât $\dfrac{z_k}{z_t} \in \mathbb{C}\setminus\{\pm 1, \pm i\}$ $\forall\, 1 \leq k \neq t \leq n$. Notăm $a_j = \dfrac{1}{z_j}\prod\limits_{k\neq j} z_k + z_j^2$, $\forall j = \overline{1,n}$. Arătaţi că dacă două dintre numerele a_j sunt reale, atunci toate sunt reale. În plus, dacă $n \neq 4$, atunci $\prod\limits_{k=1}^{n} z_k = 1$ (în legătură cu problema X.86 din R.M.T. nr. 3-4/2000).*

Daniel Jinga, Piteşti

Soluţie. Fie $P=\prod\limits_{k=1}^{n} z_k$ şi $r=|z_k|$, $k=\overline{1,n}$. Atunci $a_j=z_j^2+\dfrac{P}{z_j^2}$, $\forall j=\overline{1,n}$. Fie $p,q\in\overline{1,n}$ astfel încât a_p, $a_q\in\mathbb{R}$ şi notăm $b_p=\dfrac{P}{z_p^2}-\overline{z_p}^2$, $b_q=\dfrac{P^2}{z_q^2}-\overline{z}_q^2$. Atunci $a_p=z_p^2+\overline{z_p}^2+b_p$ şi cum $z_p^2+\overline{z_p}^2\in\mathbb{R}$, avem că $b_p\in\mathbb{R}$. Analog obţinem că $b_q\in\mathbb{R}$. Din definiţiile lui b_p şi b_q obţinem că

$$b_pz_p^2=b_qz_q^2=P-r^4, \tag{1}$$

de unde, prin trecere la module, deducem că $|b_p|=|b_q|$.

Dacă $b_p\neq 0$, atunci $b_p=\pm b_q$ şi conform (1) obţinem că $z_p^2=\pm z_q^2$, de unde $\left(\dfrac{z_p}{z_q}\right)^4=1$. De aici, $\dfrac{z_p}{z_q}\in\{\pm1,\pm i\}$, contradicţie. Atunci $b_p=0$ şi din (1) deducem că $P=r^4$, de unde $\forall j=\overline{1,n}$, $a_j=z_j^2+\dfrac{|z_j|^4}{z_j^2}=z_j^2+\overline{z_j}^2\in\mathbb{R}$. Fie acum $n\neq 4$. Deoarece $P=r^4$, prin trecere la module obţinem că $r^n=r^4$, deci $r=1$ şi atunci $P=1$.

Clasa a XI-a

XI.31. *Fie* $A,B\in M_n(\mathbb{Q})$. *Dacă* $\det A\neq\det B$, *demonstraţi că* $\det(A+\pi B)\neq$ $\neq\det(B+\pi A)$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Fie $P(\lambda)=\det(A+\lambda B)-\det(B+\lambda A)$. Evident, $P\in\mathbb{Q}[\lambda]$. Presupunem prin reducere la absurd că $\det(A+\pi B)=\det(B+\pi A)$. Atunci $P(\pi)=0$ şi cum π nu este algebric, $P\equiv 0$. De aici, $\det(A+\lambda B)=\det(B+\lambda A)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Pentru $\lambda=0$ obţinem $\det A=\det B$, contradicţie.

XI.32. *Fie* $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2+k+1\right)\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p(k-p)^k\right]$. *Calculaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}\right).$$

Ştefan Alexe, Piteşti

Soluţie. Suma $\alpha_k=\sum\limits_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p(k-p)^k$ reprezintă numărul funcţiilor surjective $f:A\to A$, unde A are k elemente. Cum orice asemenea funcţie este şi injectivă rezultă că $\alpha_k=k!$ şi deci

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+1\right)k!=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2-k\right]k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!\ .$$

De aici, $s_n=(n+1)(n+1)!-1$. Notăm $u_n=\sqrt[n+1]{1+s_n}-\sqrt[n]{1+s_{n-1}}$. Atunci

$$u_n=\sqrt[n+1]{(n+1)(n+1)!}-\sqrt[n]{n\cdot n!}=$$

$$=\sqrt[n+1]{n+1}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)+\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right)-\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\sqrt[n+1]{n+1}\ .$$

Este cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=\dfrac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. De asemenea se poate demonstra uşor că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}\right]=1$ (de exemplu, aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$

pe intervalul $[n, n+1]$ şi estimând cantităţile obţinute). De aici, limita din enunţ este egală cu $\dfrac{1}{e}$.

XI.33. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că există $p \in N^*$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$ astfel încât $x_n = a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+2} + \ldots + a_p x_{n+p}$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $\inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = 0$.*

Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Deoarece $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există $m = \inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $m \geq 0$. Din ipoteză şi din faptul că $x_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că $x_n \geq a_1 m + a_2 m + \ldots + a_p m = am$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde am notat $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_p > 1$. În continuare, $x_n \geq a_1 am + a_2 am + \ldots + a_p am = a^2 m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi prin inducţie urmează imediat că $x_n \geq a^k m$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă am presupune prin absurd că $m > 0$, am obţine că $x_n \geq \lim\limits_{k\to\infty} ma^k = +\infty$, contradicţie. Rămâne că $m = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

XI.34. *Fie $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ şi b un număr între $-\sqrt{2}\ln a$ şi $\sqrt{2}\ln a$. Stabiliţi semnul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x}) - bx$.*

Gheorghe Costovici, Iaşi

Soluţie. Arătăm mai întâi că

$$\frac{a^x + a^{-x}}{2} \geq \frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1. \tag{1}$$

Deoarece $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ şi $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{x^2(\ln a)^2}{2} + 1$ sunt funcţii pare, este suficient să demonstrăm (1) doar pentru $x \in [0, \infty)$. Atunci

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^{x/2} - a^{-x/2}\right)^2 \geq (x \ln a)^2, \ \forall x \geq 0 \Leftrightarrow a^{x/2} - a^{-x/2} \geq x \ln a, \ \forall x \geq 0.$$

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^{x/2} - a^{-x/2} - x \ln a$. Atunci $g'(x) = a^{x/2}\dfrac{\ln a}{2} + a^{-x/2}\dfrac{\ln a}{2} - \ln a \geq 0$, $\forall x \geq 0$, deci g este crescătoare şi $g(x) \geq g(0) = 0$, $\forall x \geq 0$.

De asemenea, $\dfrac{x^2(\ln a)^2}{2} + 1 - bx = \dfrac{x^2}{4}\left[2(\ln a)^2 - b^2\right] + \left(\dfrac{b}{2}x - 1\right)^2$, deci

$$\frac{x^2 (\ln a)^2}{2} + 1 - bx > 0, \quad \forall x \geq 0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem că $\dfrac{a^x + a^{-x}}{2} > bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict pozitivă.

XI.35. *Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ progresii geometrice astfel încât $a_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. Dacă $f(a_1 a_2 \cdots a_n) < 1$ şi $f(b_1 b_2 \cdots b_n) > 1$, arătaţi că există $(c_k)_{k=1}^n$ progresie geometrică, $c_k \in (a_k, b_k)$ astfel încât $f(c_1 c_2 \cdots c_n) = 1$.*

Doru - Dumitru Buzac, Iaşi

Soluţie. Notăm $p_a = a_1 a_2 \ldots a_n$, $p_b = b_1 b_2 \ldots b_n$. Considerăm $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f\left(p_a^t p_b^{1-t}\right)$; observăm că $g(0) = f(p_b) > 1$, iar $g(1) = f(p_a) < 1$. Deoarece g este continuă, $\exists t_0 \in (0,1)$ astfel că $g(t_0) = 1$.

Fie $(c_k)_{k=1}^n$ definit prin $c_k = a_k^{t_0} b_k^{1-t_0}$. Se observă că $(c_k)_{k=1}^n$ este de asemenea progresie geometrică şi $a_k < c_k < b_k$, $\forall k = \overline{1,n}$. În plus, deoarece $g(t_0) = 1$, rezultă că $f(c_1 c_2 \ldots c_n) = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Clasa a XII-a

XII.31. *Fie* $M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I_2\right\}$. *Determinaţi toate subgrupurile lui* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ *conţinute în* M.

Angela Ţigăeru şi Cătălin Ţigăeru, Suceava

Soluţie. Prin calcul direct observăm că $M = M_1 \cup M_2$, cu $M_1 = \{I_2, -I_2\}$ şi $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a^2 + bc = 1,\ a, b, c \in \mathbb{C}\right\}$. În plus, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Demonstrăm acum următorul rezultat auxiliar:

Lemă. *a*) Dacă $A_1, A_2 \in M$ astfel încât $A_1A_2 \in M$, atunci $A_1A_2 = A_2A_1$.

b) Dacă $A_1, A_2 \in M_2$ astfel încât $A_1A_2 \in M$, atunci $A_1 = A_2$ sau $A_1 = -A_2$.

Demonstraţie. *a*) Fie $A_1, A_2 \in M$ astfel ca $A_1A_2 \in M$. Atunci $A_1^2 = A_2^2 = I_2$ şi de asemenea $A_1A_2A_1A_2 = I_2$. Înmulţind ultima relaţie la stânga cu A_1 şi la dreapta cu A_2 obţinem egalitatea cerută.

b) Fie $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \in M_2$. Deoarece $A_1A_2 \in M$, din $A_1A_2 = A_2A_1$, obţinem că $b_1c_2 = b_2c_1$, $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_1c_2 = a_2c_1$, de unde $A_1A_2 = (a_1a_2 + b_1c_2) I_2$. Cum $A_1A_2 \in M$ şi $(a_1a_2 + b_1c_2) I_2 \notin M_2$, obţinem că $A_1A_2 \in M_1$, deci $A_1A_2 = \pm I_2$, de unde *b*).

Singurele subgrupuri H conţinute în M_1 sunt $H_1 = I_2$, $H_2 = \{I_2, -I_2\}$. Fie acum H un subgrup al lui M, $H \cap M_2 \neq \emptyset$. Există atunci $A_1 \in H \cap M_2$; pentru o altă matrice $A_2 \subset H \cap M_2$ obţinem că $A_1A_2 \in H \subset M$ deci, conform *b*), $A_1 = A_2$ sau $A_1 = -A_2$. Obţinem de aici că, alături de H_1 şi H_2, singurele subgrupuri ale lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ conţinute în M sunt cele de tipurile $H_3 = \{I_2, A\}$ şi $H_4 = \{I_2, -I_2, A, -A\}$, cu $A \in M_2$.

XII.32. *Fie* $(G, \cdot)$ *grup, iar* $a \in G \backslash \{e\}$ *fixat. Arătaţi că numărul morfismelor surjective de la* G *la* $(\mathbb{Z}_3, +)$ *cu proprietatea că* $f(x) = \widehat{2} \Leftrightarrow x = a$ *este egal cu numărul subgrupurilor* H *ale lui* G *care nu-l conţin pe* a *şi care au proprietatea că* $x^3 \in H$, $\forall x \in G$.

Dana Stan, elevă, Iaşi

Soluţie. A se vedea **Nota** de la p. 17 din acest număr al revistei.

XII.33. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie monotonă al cărei grafic are un centru de simetrie ce nu aparţine graficului. Arătaţi că* f *nu admite primitive.*

Oana Marangoci, elevă, Paşcani

Soluţie. Deoarece $A(x_0, y_0)$ este centrul de simetrie al graficului lui f, are loc egalitatea $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Presupunem prin reducere la absurd că f este continuă în x_0. Trecând la limită în egalitatea de mai sus obţinem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(2x_0 - x) = \lim\limits_{x \to x_0} (2y_0 - f(x))$, deci $f(x_0) = y_0$, contradicţie. De aici, f nu este continuă în x_0 şi, deoarece f este monotonă, x_0 este punct de discontinuitate de speţa întâi. De aici rezultă că f nu admite primitive.

XII.34. *Fie* $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ *o funcţie care admite primitive şi fie* F *o primitivă a sa cu* $F(1) = 0$. *Arătaţi că există* $c \in (0, 1)$ *astfel încât* $F(c) > -\frac{c}{2} e^{c^2} f(c)$.

Rodica Luca Tudorache, Iaşi

Soluţie. Fie $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \left(1 - e^{-x^2}\right) F(x)$. Se observă că G este continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$, iar $G(0) = G(1) = 0$. Conform teoremei lui

Rolle, există $c \in (0,1)$ astfel încât $G'(c) = 0$, ceea ce înseamnă că $-2ce^{-c^2} F(c) + \left(e^{-c^2} - 1\right) f(c) = 0$. Deoarece $e^{-x^2} - 1 > -x^2$, $\forall x \in (0,1)$, obţinem imediat inegalitatea din enunţ.

XII.35. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde f este o funcţie injectivă şi $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} \times [f(x)]^{2k+1} + \sin f(x)$, cu $a_1 \in [1, \infty)$ şi $a_{2k+1} \in (0, \infty)$, $\forall k = \overline{1, n}$. Arătaţi că f admite primitive dacă şi numai dacă g admite primitive.*

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \sin x$. Atunci $h'(x) = a_1 + 3a_2 x^2 + \ldots + (2n+1) a_{2n+1} x^{2n} + \cos x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare h este strict crescătoare şi deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} = +\infty$ şi h este continuă, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, deci h este surjectivă şi în final bijectivă.

Atunci $g = h \circ f$, deci g este injectivă. Cum o funcţie injectivă admite primitive dacă şi numai dacă este continuă, cu această observaţie cerinţa problemei se rescrie sub forma "f este continuă $\Leftrightarrow$ g este continuă". Dar acest lucru este imediat, ţinând seama că $h = g \circ f$, cu h continuă şi bijectivă.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **popagabriel@go.com**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Soluţiile problemelor pentru pregătirea concursurilor din nr. 2 / 2002

A. Nivel gimnazial

G21. *Să se afle restul împărţirii prin* 43 *a numărului* 6^{2002^n}, $n \in \mathbb{N}$.

Cătălin - Cristian Budeanu, Iaşi

Soluţie. Avem că $2002^n = (2001+1)^n = 3k+1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $6^{2002^n} = 6 \cdot 6^{3k} = 6 \cdot (5 \cdot 43 + 1)^k$, de unde restul împărţirii lui 6^{2002^n} la 43 este 6.

G22. *Să se arate că între* n *şi* $n!$ *există cel puţin un număr prim, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

***

Soluţie. Fie p un divizor prim al numărului $n!-1$ (care evident există, eventual fiind $n!-1$). Dacă $p \leq n$, atunci $p \mid n!$, şi cum $p \mid n!-1$ rezultă că $p \mid 1$, absurd. În concluzie $p > n$.

G23. *Să se rezolve în* $\mathbb{Z}^2$ *ecuaţia* $x^2 + 10x + y! = 2002$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţia I (a autorului). Evident, trebuie impusă condiţia $y \geq 0$. Deoarece $x(x+1)$ nu poate fi decât de forma $3k$ sau $3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, de asemenea $x^2 + 10x = x(x+1) + 9x$ este de una din aceste forme. Dacă $y \geq 3$, atunci $3 \mid y!$ şi $x^2 + 10x + y!$ este tot de forma $3k$ sau $3k+2$, dar $2002 = 3 \cdot 667 + 1$, absurd. În concluzie, $y \in \{0,1,2\}$. Dacă $y=0$ sau $y=1$, obţinem că $x^2+10x = 2001$, ecuaţie care nu are soluţii în $\mathbb{Z}$. Dacă $y=2$, atunci $x^2+10x=2000$, cu soluţiile $x_1 = 40$ şi $x_2 = -50$. În concluzie, $(x,y) \in \{(40,2), (-50,2)\}$.

Soluţia a II-a (dată de Alexandru Bejinariu, elev, Iaşi). Pentru $y \geq 5$, u. c. $(y!) = 0$. În plus, u. c. $\left(x^2+10x\right) =$ u. c. $\left(x^2\right) \in \{0,1,4,5,6,9\}$, deci u. c. $\left(x^2+10x+y!\right)$ nu ar fi 2. Rămâne că $y < 5$ şi considerând pe rând cele cinci cazuri, obţinem soluţiile de mai sus.

Soluţia a III-a. Deoarece $7! = 5040 > 2002$, avem că $y < 7$; problema se reduce la rezolvarea a şapte ecuaţii de grad II.

G24. *Aflaţi câte numere de* 4 *cifre au proprietatea că cifrele citite de la stânga spre dreapta sunt invers proporţionale cu cifrele citite de la dreapta spre stânga. Aceeaşi problemă pentru numerele de* 3*, respectiv* 5 *cifre.*

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie. Pentru a putea vorbi despre inversa proporţionalitate, este necesar în fiecare caz ca toate cifrele să fie nenule.

(i) Dacă $\overline{abcd}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, atunci $\dfrac{a}{1/d} = \dfrac{b}{1/c} = \dfrac{c}{1/b} = \dfrac{d}{1/a}$, deci $ad = bc$. Dacă $\{a,d\} = \{b,c\}$ iar $a = d$, obţinem 9 numere. Dacă $\{a,d\} = \{b,c\}$ iar $a \neq d$, obţinem $4 \cdot 36 = 144$ numere (36 este numărul perechilor de cifre nenule (a,d) cu $a < d$, iar corespunzător fiecărei perechi se pot obţine 4 numere $\overline{abcd}$ distincte prin diverse permutări). Dacă $\{a,d\} \neq \{b,c\}$, atunci $\{\{a,d\},\{b,c\}\} \in \underline{\{\{1,4\},\{2,2\}\}}$, $\{\{1,6\},\{2,3\}\}$, $\{\{1,8\},\{4,2\}\}$, $\{\{2,6\},\{3,4\}\}$, $\underline{\{\{2,8\},\{4,4\}\}}$, $\underline{\{\{2,9\},\{3,6\}\}}$, $\{\{3,8\},\{4,6\}\}$, $\underline{\{\{4,9\},\{6,6\}\}}$. Obţinem $3 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 52$ numere (pentru fiecare element subliniat obţinem 4 numere $\overline{abcd}$, iar în celelalte cazuri câte 8). În total obţinem $9 + 144 + 52 = 205$ numere.

(ii) Dacă $\overline{abc}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, deducem că $ac = b^2$. Dacă $a = c$, obţinem 9 numere. Dacă $a \neq c$, atunci $b = 2$, $\{a, c\} = \{1, 4\}$; $b = 3$, $\{a, c\} = \{1, 9\}$; $b = 4$, $\{a, c\} = \{2, 8\}$; $b = 6$, $\{a, c\} = \{4, 9\}$. Obţinem $4 \cdot 2 = 8$ numere. În total obţinem $9 + 8 = 17$ numere.

(iii) Dacă $\overline{abcde}$ este un număr cu proprietatea din enunţ, deducem că $ae = bd = c^2$. Dacă $a = b = c = d = e$, obţinem 9 numere. În caz contrar,

$$\begin{aligned}
c = 2, &\quad \{\{a, e\}, \{b, d\}\} \in \{\{\{1, 4\}, \{2, 2\}\}, \{\{1, 4\}, \{1, 4\}\}\};\\
c = 3, &\quad \{\{a, e\}, \{b, d\}\} \in \{\{\{1, 9\}, \{3, 3\}\}, \{\{1, 9\}, \{1, 9\}\}\};\\
c = 4, &\quad \{\{a, e\}, \{b, d\}\} \in \{\{\{2, 8\}, \{4, 4\}\}, \{\{2, 8\}, \{2, 8\}\}\};\\
c = 6, &\quad \{\{a, e\}, \{b, d\}\} \in \{\{\{4, 9\}, \{6, 6\}\}, \{\{4, 9\}, \{4, 9\}\}\}.
\end{aligned}$$

Obţinem $4\,(4 + 4) = 32$ numere. În total, obţinem $9 + 32 = 41$ numere.

G25. *Să se arate că pentru orice $x, y, x \in \mathbb{R}$, există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq \frac{3}{4}$. Generalizare.*

Vladimir Martinuşi, Iaşi

Soluţie. Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, este funcţia de rotunjire, atunci $|\varphi(x) - x| \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $a = \varphi(x)$, $b = \varphi(y)$, $c = \varphi(z)$, obţinem concluzia problemei. Cu acelaşi raţionament obţinem că dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, atunci există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ astfel ca $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leq \frac{n}{4}$.

G26. *Dacă suma, produsul şi câtul a două numere iraţionale sunt numere raţionale, calculaţi suma cuburilor celor două numere.*

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

Soluţie. Dacă $\frac{a}{b} + 1 \neq 0$, atunci $a + b = b\left(\frac{a}{b} + 1\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deoarece $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Rămâne că $\frac{a}{b} + 1 = 0$, deci $a = -b$ şi $a^3 + b^3 = 0$.

Observaţie. Ipoteza "$ab \in \mathbb{Q}$" nu este necesară.

G27. *Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ minim pentru care $2^n - 1$ este divizibil cu 125.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie. Fie $n = 4q + r$, $q, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 4$. Atunci $2^n - 1 = 2^r \cdot 2^{4q} - 1 = 2^r \cdot 16^q - 1$. Cum ultima cifră a lui 16^q este 6 ($q = 0$ nu convine), ca $2^n - 1$ să se dividă cu 5 e necesar $r = 0$, în caz contrar ultima cifră a lui $2^n - 1$ fiind 1, 3 sau 7.

Atunci $2^n - 1 = 2^{4q} - 1 = 15\left(16^{q-1} + 16^{q-2} + \cdots + 1\right)$ şi deci ca $2^n - 1$ să se dividă cu 125 este necesar şi suficient ca $25 \mid 16^{q-1} + 16^{q-2} + \cdots + 1$. Cum $16^p = (15 + 1)^p = M_5 + 1$ pentru $p \geq 0$, ca suma să se dividă cu 5 este necesar şi suficient ca numărul termenilor să se dividă cu 5, deci $q = 5k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$2^n - 1 = 2^{20k} - 1 = 1024^{2k} - 1 = 1048576^k - 1 = 1048575\left(1048576^{k-1} + \cdots + 1\right).$$

Cum 1048575 este divizibil cu 25, dar nu şi cu 125, este necesar şi suficient ca 5 să dividă al doilea factor. Deoarece $1048576^p = M_5 + 1$ pentru $p \geq 0$, este necesar şi suficient ca numărul termenilor să se dividă cu 5, deci $k = 5m$, $m \in \mathbb{N}^*$ şi $n = 100m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Numărul n minim este 100.

G28. *Să se arate că ecuaţia*

$$x^4-(a+b)x^3+(a+b+ab-2)x^2-\left(a^2+b^2-a-b\right)x+(a-1)(b-1)=0$$

are cel puţin două soluţii reale pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

Marian Teler, Costeşti (Argeş)

Soluţie. Ecuaţia dată se descompune în $\left(x^2-ax+b-1\right)\left(x^2-bx+a-1\right)=0$. Se obţin ecuaţiile $x^2-bx+a-1=0$ şi $x^2-ax+b-1=0$. Atunci

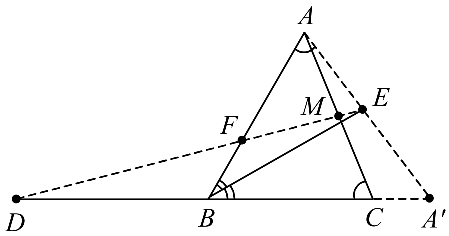
$$\Delta_1+\Delta_2=b^2-4a+4+a^2-4b+4=(a-2)^2+(b-2)^2\geq 0,$$

deci $\Delta_1\geq 0$ sau $\Delta_2\geq 0$ şi cel puţin una dintre cele două ecuaţii are soluţii reale.

G29. *Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A})<m(\widehat{C})$. Pe bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B}$ luăm un punct E astfel încât $\widehat{EAB}\equiv\widehat{ACB}$. Se prelungeşte latura $[BC]$ cu segmentul $[BD]\equiv[AB]$, B între C şi D. Să se arate că mijlocul M al segmentului $[AC]$ se află pe dreapta DE.*

Constantin Chirilă, Iaşi

Soluţia I (a autorului). Construim prin E o dreaptă paralelă cu AC care intersectează AD şi CD în P şi Q. În $\triangle EBA$ şi EQB, $\widehat{EBA}\equiv\widehat{EBQ}$ şi $\widehat{EAB}\equiv$ $\equiv\widehat{EQB}$ $(\equiv\widehat{ACB})$. Cum $[EB]\equiv[EB]$, $\triangle AEB\equiv\triangle BEQ$ (ULU), deci $[EA]\equiv[EQ]$. Deoarece $\triangle ABD$ este isoscel, $\widehat{BAD}\equiv\widehat{BDA}$. Cum $\widehat{EAB}\equiv\widehat{ACB}$, obţinem că $\widehat{EAP}\equiv\widehat{CAD}$, şi deoarece $\widehat{CAD}\equiv\widehat{EPA}$, $\triangle EAP$ este isoscel, deci $[EA]\equiv[EP]$. Urmează că $[EP]\equiv[EQ]$, adică $[DE]$ este mediană în $\triangle DPQ$ şi atunci dreapta DE înjumătăţeşte segmentul $[AC]$ paralel cu "baza" PQ.



Soluţia a II-a. Fie $\{A'\}=BC\cap AE$ şi $\{F\}=AB\cap DE$. Deoarece $\triangle ABC\sim$ $\sim\triangle A'BA$, putem scrie: $\dfrac{c}{A'B}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{A'A}$, de unde $A'A=\dfrac{bc}{a}$ şi $A'B=\dfrac{c^2}{a}$. Conform teoremei lui Menelaus, avem: $\dfrac{DB}{DA'}\cdot\dfrac{EA'}{EA}=$ $=\dfrac{FB}{FA}$ ($\triangle ABA'$ şi DE). Cum $\dfrac{DB}{DA'}=\dfrac{c}{c+c^2/a}$ şi $\dfrac{EA'}{EA}=\dfrac{BA'}{BA}=\dfrac{c}{a}$ (teorema bisectoarei), rezultă că $\dfrac{FB}{FA}=\dfrac{c}{a+c}$. Pentru a dovedi că $M\in DE$, arătăm că punctele D, M, E sunt coliniare utilizând reciproca teoremei lui Menelaus relativ la $\triangle ABC$; într-adevăr, avem $\dfrac{DB}{DC}\cdot\dfrac{MC}{MA}\cdot\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{c}{c+a}\cdot 1\cdot\dfrac{a+c}{c}=1$.

G30. *Fie triunghiul AB_0B_1 dreptunghic în B_0 şi triunghiurile AB_iB_{i+1} cu $B_iB_{i+1}\perp AB_i$, $\forall i\in N^*$, iar $m(\widehat{B_iAB_{i+1}})=30°$, $\forall i\in N$.*

a) Demonstraţi că punctele A, B_q şi B_r sunt coliniare, unde $q=2\left(n^3-n+1\right)$, $r=3^{2002}-3^{2000}+3^{1998}-3^{1996}+\ldots+3^2-3^0$.

b) Aflaţi aria triunghiului $AB_{2001}B_{2002}$ funcţie de $a=B_0B_1$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

Soluţie. $a)$ Observăm mai întâi că dacă $i\in\mathbb{N}$, $i=12q_1+r_1$, $q_1,r_1\in\mathbb{N}$, $0\leq r_1<12$, atunci $B_{r_1}\in[AB_i]$. Deoarece $q=2n(n+1)(n-1)+2$, $q=M_{12}+2$ şi $B_2\in[AB_q]$. În plus, $r=8\left(3^{2000}+3^{1996}+\cdots+3^0\right)=M_{12}+8$ şi $B_8\in[AB_r]$. Cum B_2, A, B_8 sunt coliniare, B_r, A şi B_q sunt de asemenea coliniare.

b) Observăm că $\triangle AB_iB_{i+1} \sim \triangle AB_{i+1}B_{i+2}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, raportul de asemănare fiind $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Atunci $S_{AB_{2001}B_{2002}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{2\cdot 2001} \cdot S_{AB_0B_1} = \frac{2^{4001}}{3^{2001}}\, a^2\sqrt{3}$.

G31. *Se consideră un triunghi isoscel ABC cu baza $BC = 2\sqrt{2}$ cm. Fie punctele variabile $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [CN]$. Fie O mijlocul segmentului $[MN]$ şi P intersecţia dreptelor AO şi BC. Aflaţi perimetrul $\triangle ABC$ ştiind că aria minimă a reuniunii suprafeţelor triunghiulare $[MBP]$ şi $[NCP]$ este $\sqrt{3}$ cm^2.*

Adriana Maxiniuc, Botoşani

Soluţie. Fie $NQ \parallel AB$, $Q \in (BC)$. Atunci $\widehat{NQC} \equiv \widehat{ABC}$ şi cum $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$, $\triangle NQC$ este isoscel, deci $[NC] \equiv [NQ]$. Deoarece $[NC] \equiv [AM]$, rezultă că $[NQ] \equiv [AM]$ şi cum $NQ \parallel AM$, $ANQM$ este paralelogram. Notăm $AQ \cap MN = \{O'\}$. Atunci O' înjumătăţeşte $[MN]$, deci $O' \equiv O$ şi atunci $P \equiv Q$, deci $AMPN$ este paralelogram.

Deoarece $S_{MBP} + S_{NCP} + S_{AMNP} = S_{ABC} =$ constant, aria din enunţ este minimă când S_{AMNP} este maximă. Cum $S_{AMNP} = AM \cdot AN \sin\widehat{BAC} = AM\,(AC - AM) \times \times \sin\widehat{BAC}$, iar $AM\,(AC - AM)$ este maxim când $AM = \frac{AC}{2}$, rezultă că S_{AMNP} este maximă atunci când M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, cu valoarea $\frac{S_{ABC}}{2}$. Atunci minimul ariei din enunţ este de asemenea $\frac{S_{ABC}}{2}$, deci lungimea înălţimii din A este $\sqrt{6}$ cm. Rezultă $AB = 2\sqrt{2}$ cm, iar $P_{ABC} = 6\sqrt{2}$ cm.

G32. *Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90°$, M un punct pe dreapta AD, iar $N \in BC$ astfel încât $MN \perp BC$. Arătaţi că $S_{CMB} \geq S_{AND}$.*

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Soluţie (Constantin Tonu, elev, Iaşi). Patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi sau trapez dreptunghic. Fie N' proiecţia lui N pe AD; atunci $S_{CMB} = \frac{1}{2} MN \cdot BC$, $S_{AND} = \frac{1}{2} NN' \cdot AD$. Însă $MN \geq NN'$, iar $BC \geq AD$, de unde concluzia.

G33. *În triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 2\alpha$, fie $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{A}$, iar M, N puncte pe (AB) respectiv (AC). Dacă $\{P\} = AD \cap MN$, demonstraţi că $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2\cos\alpha}{AP}$ (în legătură cu C:2402 din G.M. 5-6/2001).*

Mihaela Bucătaru, Iaşi

Soluţie. Relaţia se scrie $AP = \frac{2\,AM \cdot AN}{AM + AN} \cos\frac{A}{2}$, egalitate adevărată, deoarece $[AP]$ este bisectoare în triunghiul AMN.

G34. *În triunghiul ABC având $m(\widehat{BAC}) = 135°$ se înscrie pătratul $MNPQ$ cu $M, N \in (BC)$, $P \in (CA)$ şi $Q \in (AB)$. Arătaţi că:*

1° $\frac{AM}{AN} = \frac{b + c\sqrt{2}}{c + b\sqrt{2}}$; 2° $\frac{BM}{CN} = \frac{c}{b} \cdot \frac{AM}{AN}$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Soluţie. Deoarece $m(\widehat{BAC}) = 135°$, A este pe cercul circumscris pătratului. Observăm de aici că $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{NAC}) = 45°$. Notăm $l = MN$.

1° Deoarece $APMQ$ este inscriptibil, $AM \cdot PQ = AP \cdot MQ + AQ \cdot MP$, deci

$AM = l\left(\dfrac{AP}{PQ} + \sqrt{2}\dfrac{AQ}{PQ}\right)$. Deoarece $\triangle AQP \sim \triangle APC$, $\dfrac{AP}{PQ} = \dfrac{b}{a}$ şi $\dfrac{AQ}{PQ} = \dfrac{c}{a}$. Atunci $AM = \dfrac{l}{a}\left(b + \sqrt{2}\,c\right)$. Analog obţinem că $AN = \dfrac{l}{a}\left(\sqrt{2}\,b + c\right)$, de unde rezultă concluzia.

2° Utilizând teorema sinusurilor în $\triangle ABM$ şi $\triangle ACN$, $\dfrac{BM}{\sin 45^\circ} = \dfrac{AM}{\sin B}$ şi $\dfrac{CN}{\sin 45^\circ} = \dfrac{AN}{\sin C}$. Atunci $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AM}{AN}\cdot\dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{AM}{AN}$.

G35. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru. În planele (ABC), (ADC), (ADB) considerăm tangentele în A la cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, ADC respectiv ADB, care intersectează dreptele BC, CD, DB în M, N respectiv P. Notăm $x = \dfrac{MB}{MC}$, $y = \dfrac{NC}{ND}$, $z = \dfrac{PD}{PA}$. Să se arate că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq 1$.*

Marian Ionescu, Piteşti

Soluţie. În planul (ABC), observăm că $\triangle AMB \sim \triangle CMA$, deci $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MA}{MC}$. Atunci $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MB}{MA}\cdot\dfrac{MA}{MC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$, deci $x = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ şi analog deducem că $y = \dfrac{AC^2}{AD^2}$, $z = \dfrac{AD^2}{AB^2}$, prin urmare $xyz = 1$. Observăm că $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+yz} = 1$, deci inegalitatea de demonstrat se reduce la $\dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} \geq \dfrac{1}{1+yz}$, care se obţine prin calcul direct.

B. Nivel liceal

L21. *Rezolvaţi în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $a^2 + 3b^2 = 2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este fixat.*

Gheorghe Iurea, Iaşi

Soluţie (dată de Andrei Nedelcu, Iaşi). Dacă a şi b au parităţi diferite, atunci $n = 0$ şi avem soluţia $a = 1$, $b = 0$. Dacă $n > 0$, atunci a, b au aceeaşi paritate şi atunci fie $a + b = 2x$, $x \in \mathbb{N}^*$ şi $a - b = 2y$, $y \in \mathbb{Z}$. Înlocuind, obţinem $4\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2^n$, de unde $n \geq 2$. Fie $d = (x, y)$; avem că $d = 2^s$, $2s \leq n - 2$, iar $x = 2^s x_1$, $y = 2^s y_1$, cu $(x_1, y_1) = 1$. Înlocuind din nou, găsim $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = 2^{n-2-2s}$ şi cum membrul stâng este impar, $n = 2(s+1)$ este număr par, iar $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = 1$. Fiindcă $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, cu $x_1 \neq 0$, obţinem că $x_1 = y_1 = 1$ sau $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, cu soluţiile corespunzătoare $a = 2^{n/2}$, $b = 0$, respectiv $a = b = 2^{\frac{n-2}{2}}$.

Cu această tehnică putem aborda rezolvarea ecuaţiei în $\mathbb{Q}^2$. Să observăm mai întâi că este suficient să găsim soluţiile $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^2$, celelalte soluţii fiind de forma $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$. Fie $a = \dfrac{x}{z}$, $b = \dfrac{y}{w}$, cu $x, y, z, w \in \mathbb{N}$, $(x, z) = (y, w) = 1$. Se observă uşor că $z = w$ şi ecuaţia devine $x^2 + 3y^2 = 2^n \cdot z^2 \quad (*)$. Pentru $n = 0$, putem scrie $x^2 - y^2 = z^2 - 4y^2$, i. e. $(x - y)(x + y) = (z - 2y)(z + 2y)$. Dacă $x = y$, atunci $z = 2y$, deci $a = b = \dfrac{1}{2}$. Dacă $x \neq y$, atunci $\dfrac{x - y}{z - 2y} = \dfrac{z + 2y}{x + y} = \dfrac{m}{n}$, de unde $x = k\left(m^2 - 4mn + n^2\right)$, $y = k\left(m^2 - n^2\right)$, $z = 2k\left(m^2 - mn + n^2\right)$, cu $k, m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x, y, z \geq 0$.

Fie $n \neq 0$; atunci x, y au aceeaşi paritate şi fie $x + y = 2\alpha$, $x - y = 2\beta$. Prin înlocuire în $(*)$, obţinem $4\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = 2^n z^2$. Dacă n impar, această ecuaţie nu are soluţii, deoarece în membrul stâng şi în z^2 factorul 2 apare numai la puteri pare. Dacă n este par, fie $(\alpha, \beta) = 2^s$, $z = 2^r z_1$ cu z_1 impar şi atunci $4 \cdot 2^{2s}\left(\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2\right) = 2^n \cdot 2^{2r} z_1^2$, deci $2s + 2 = n + 2r$, iar $\alpha_1^2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 = z_1^2$, cu soluţia $z_1 = k\left(m^2 - mn + n^2\right)$, iar $(\alpha_1, \beta_1) = \left(k\left(m^2 - n^2\right), k\left(2mn - n^2\right)\right)$ sau invers etc.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L22. *Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr scris în baza* 10*. Acestui număr îi adăugăm la sfârşit* 147*, numărului obţinut îi adăugăm din nou la sfârşit* 147 *şi aşa mai departe. Arătaţi că printre numerele astfel obţinute există numere compuse.*

Adrian Zanoschi, Iaşi

Soluţie. Avem $n_1 = 1000n + 147 = 37(27n + 4) + n - 1$, de unde obţinem că $n_1 \equiv n - 1 \pmod{37}$. Apoi $n_2 = 1000n_1 + 147 = 37(27n_1 + 4) + n_1 - 1$, deci $n_2 \equiv n_1 - 1 \pmod{37} \equiv n - 2 \pmod{37}$ şi aşa mai departe. Astfel obţinem că numerele din şirul construit sunt congruente, modulo 37, cu $n-1, n-2, \ldots, n-37, \ldots$, deci există printre ele numere divizibile cu 37, adică numere compuse.

L23. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă principală T astfel încât pe $[0, T]$ f se anulează de un număr finit de ori şi fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale nenule. Arătaţi că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(\alpha x_n) \cdot f(\alpha + x_n) \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Paul Georgescu şi Iuliana Georgescu, Iaşi

Soluţie. Fie $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ mulţimea pe care f se anulează în $[0, T]$ şi fie

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{x_n} + \frac{T}{x_n}\mathbb{Z}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k}(a_i - x_n + T\mathbb{Z})\right).$$

Însă $\dfrac{a_i}{x_n} + \dfrac{T}{x_n}\mathbb{Z}$ şi $a_i - x_n + T\mathbb{Z}$ sunt mulţimi numărabile, $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şi A este numărabilă. Cum $\mathbb{R}$ este nenumărabilă, $\mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$. Atunci $\alpha \notin \dfrac{a_i}{x_n} + \dfrac{T}{x_n}\mathbb{Z}$, $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\alpha x_n \notin a_i + T\mathbb{Z}$, $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că $f(\alpha x_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Analog deducem că $f(\alpha + x_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă concluzia problemei.

L24. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice nesingulare cu $\det A + \det B = 0$. Există $\alpha > 0$ astfel încât $A^2B - B^2A = \alpha A$?*

Cătălin Calistru, Iaşi

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că există $\alpha > 0$ astfel ca $A^2B - B^2A = \alpha A$. Înmulţind la dreapta cu A^{-1}, obţinem că $A^2BA^{-1} = B^2 + \alpha I_n$. Însă

$$\det\left(B^2 + \alpha I_n\right) = \det\left(B + i\sqrt{\alpha}I_n\right)\det\left(B - i\sqrt{\alpha}I_n\right) = \left|\det\left(B + i\sqrt{\alpha}I_n\right)\right|^2,$$

iar $\det\left(A^2BA^{-1}\right) = \det A \det B = -(\det A)^2 < 0$, contradicţie.

L25. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$, astfel încât $A^{m+1} - \alpha A^m - \alpha A + I_n = O_n$. Să se arate că $|\det A| = 1$.*

Lucian Georges Lăduncă, Iaşi

Soluţie. Fie $P_A(X) = \det(XI - A) = (X - x_1)^{k_1}(X - x_2)^{k_2}\ldots(X - x_l)^{k_l}$ polinomul caracteristic al matricei A. Cum $x_1, x_2, \ldots, x_l$ sunt rădăcini şi ale lui m_A, polinomul minimal al matricei A peste $\mathbb{C}$, iar m_A divide $X^{m+1} - \alpha X^m - \alpha A + 1$, rezultă că $x_1, x_2, \ldots, x_l$ au modulele egale cu 1, deoarce ultimul polinom are toate rădăcinile de modul 1. Dar $P_A(0) = \det(-A) = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_l^{k_l}$. Atunci $\det(-A) = (-1)^n \det A = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_l^{k_l}$, de unde $|\det A| = 1$.

L26. *Fie $f : S_n \to S_n$ endomorfism astfel încât există $\tau \in S_n$ pentru care $(f \circ f)(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$. Arătaţi că f are un punct fix (i.e. $\exists \omega \in S_n$, $f(\omega) = \omega$).*

Ovidiu Munteanu, Braşov

Soluţie. Fie $\tau \in S_n$ cu proprietatea din enunţ. Este uşor de observat că funcţia $\varphi : S_n \to S_n$, $\varphi(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$ este bijectivă. Relaţia din enunţ se scrie sub forma $f \circ f = \varphi$, de unde rezultă că f este bijectivă.

Pentru $\sigma \in S_n$, $(f \circ f \circ f)(\sigma) = f(\varphi(\sigma)) = f(\tau\sigma\tau^{-1}) = f(\tau) f(\sigma) f(\tau^{-1})$ şi, de asemenea, $(f \circ f \circ f)(\sigma) = \varphi(f(\sigma)) = \tau f(\sigma) \tau^{-1}$. Rezultă de aici că $f(\tau) f(\sigma) f(\tau^{-1}) = \tau f(\sigma) \tau^{-1}$, $\forall \sigma \in S_n$ şi, deoarece f este surjectivă, $f(\tau) \rho f(\tau^{-1}) = \tau\rho\tau^{-1}$, $\forall \rho \in S_n$. Deci $[\tau^{-1} f(\tau)] \rho = \rho [\tau^{-1} f(\tau)]$, $\forall \rho \in S_n$ şi cum $\tau^{-1} f(\tau)$ comută cu toate elementele lui S_n, $\tau^{-1} f(\tau) = e$. Obţinem că $f(\tau) = \tau$.

L27. *Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu unitate şi $n, k \in \mathbb{N}^*$, k impar, astfel încât $x^{n+k} = x^n$, $\forall x \in A$. Să se arate că $x^{k+1} = x$, $\forall x \in A$ (în legătură cu C: 1896 din G.M. nr.1/1997).*

Dragoş Deliu şi Marian Tetiva, Bârlad

Soluţie. Dacă $n = 1$, nu avem nimic de demonstrat. Fie acum $n \geq 2$. Deoarece $(-1)^{n+k} = (-1)^n$, iar n şi $n + k$ au parităţi diferite, avem că $-1 = 1$, deci $1 + 1 = 0$ şi în concluzie $2a = a + a = 0$, $\forall a \in A$.

Demonstrăm acum că în inelul A este valabilă implicaţia $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Într-adevăr, fie $x \in A$ astfel ca $x^2 = 0$. Atunci $x^s = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ şi aplicând formula binomială rezultă că $(1 + x)^p = 1 + px$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Cum $(1 + x)^{n+k} = (1 + x)^n$ din ipoteză, obţinem că $1 + (n - k)x = 1 + nx$, de unde $kx = 0$. Deoarece k este impar şi $2x = 0$, rezultă imediat că $x = 0$, deci implicaţia este dovedită.

Din ipoteză, $x^{n+k} = x^n$, $\forall x \in A$, deci şi $x^{m+k} = x^m$, $\forall x \in A$, pentru $m \geq n$. Vom avea atunci

$$\left(x^{n+k-1} - x^{n-1}\right)^2 = \left(x^{2n+k-2+k} - x^{2n+k-2}\right) - \left(x^{2n-2+k} - x^{2n-2}\right) = 0,$$

ceea ce implică $x^{n+k-1} - x^{n-1} = 0$. Am obţinut că $x^{n+k-1} = x^{n-1}$; repetând raţionamentul obţinem că $x^{n+k-2} = x^{n-2}, \ldots, x^{k+1} = x$, q.e.d.

L28. *Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri ascuţitunghice. Dacă*

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^2 \geq \left(\frac{b}{b'}\right)^2 \geq \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \geq \frac{S}{S'},$$

arătaţi că triunghiurile sunt asemenea.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Notăm cu $x = \dfrac{\sin A}{\sin A'}$, $y = \dfrac{\sin B}{\sin B'}$, $z = \dfrac{\sin C}{\sin C'}$. Folosind teorema sinusurilor şi formula $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, obţinem că $x^2 \geq y^2 \geq z^2 \geq xyz$. De aici, $x \geq y \geq z$ şi $xy \leq z$. Atunci şi $xy \leq y$, de unde $x \leq 1$ şi deci $z \leq y \leq x \leq 1$. Deoarece $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$ sunt ascuţitunghice, iar funcţia sinus este crescătoare pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, din $x \leq 1$, $y \leq 1$, $z \leq 1$ obţinem că $m(\widehat{A}) \leq m(\widehat{A'})$, $m(\widehat{B}) \leq m(\widehat{B'})$, $m(\widehat{C}) \leq m(\widehat{C'})$. Cum $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) = 180°$, rezultă că $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A'})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B'})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{C'})$, deci cele două triunghiuri sunt asemenea.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L29. *Fie ABC un triunghi, iar $\mathcal{C}$ un cerc tangent laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ în F, respectiv E şi care intersectează latura $[BC]$ în M şi N. Fie X un punct interior triunghiului astfel încât există un cerc $\mathcal{C}_1$ tangent laturilor $[XB]$ şi $[XC]$ în Z, respectiv Y şi care taie $[BC]$ tot în M şi N. Demonstraţi că patrulaterul $EFZY$ este inscriptibil.*

Neculai Roman, Mirceşti, (Iaşi)

Soluţie. Dacă $[AB] \equiv [AC]$, punctul X va fi în mod necesar pe axa triunghiului ABC (altfel $\mathcal{C}_1$ n-ar exista). Ca urmare, patrulaterul $EFZY$ este trapez isoscel, deci este inscriptibil. Fie acum $[AB] \not\equiv [AC]$ şi fie $\{K\} = FE \cap BC$, $\{K'\} = ZY \cap BC$ (K' există deoarce triunghiul XBC nu va fi nici el isoscel). Aplicând teorema lui Menelaus pentru $\triangle ABC$ cu transversala KFE obţinem $\frac{KB}{KC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$, deci $\frac{KB}{KC} = \frac{FB}{EC}$. Aplicând teorema lui Menelaus pentru $\triangle XBC$ cu transversala KZY obţinem $\frac{K'B}{K'C} \cdot \frac{YC}{YX} \cdot \frac{ZX}{ZB} = 1$, deci $\frac{K'B}{K'C} = \frac{ZB}{YC}$. Dar $FB = ZB$ şi $YC = EC$ (deoarece B şi C aparţin axei radicale a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$), prin urmare $\frac{KB}{KC} = \frac{K'B}{K'C}$, de unde $K = K'$. Deoarece K se află pe axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}$, avem $KE \cdot KF = KY \cdot KZ$, deci punctele E, F, Y, Z sunt conciclice.

Notă. Soluţie corectă s-a primit de la *Alin Iacob*, elev, Iaşi.

L30. *Fie ABC un triunghi echilateral, iar P un punct în planul triunghiului. Notăm cu A_1, B_1, C_1 simetricele lui P faţă de BC, CA şi respectiv AB. Să se arate că se poate forma un triunghi având lungimile laturilor egale cu AA_1, BB_1, CC_1.*

Constantin Cocea, Iaşi

Soluţie. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $P(p)$ şi fie $O(0)$ centrul cercului circumscris $\triangle ABC$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a = 1$, $b = \omega$, $c = \omega^2$. Avem $\lambda_{BC} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = \frac{b-c}{1/b-1/c} = -bc$, de unde $\lambda_{PA_1} = bc$, deoarece $PA_1 \perp BC$. Fie $\{A'\} = PA_1 \cap BC$. Ecuaţia dreptei BC este $z - b = -bc\left(\overline{z} - \overline{b}\right)$ şi poate fi rescrisă sub forma $z + bc\overline{z} = b + c$. Ecuaţia dreptei PA_1 este $z - p = bc(\overline{z} - \overline{p})$. De aici obţinem că afixul a' al punctului A' este dat de egalitatea $a' = \frac{1}{2}(b + c + p - bc\overline{p})$. Cum $a' = \frac{p + a_1}{2}$, unde a_1 este afixul punctului A_1, urmează că $a_1 = b + c - bc\overline{p}$ şi în mod similar, $b_1 = c + a - ca\overline{p}$, $c_1 = a + b - ab\overline{p}$.

De aici, $(a - a_1) + (b - b_1) + (c - c_1) = 0$ şi se obţine că $|a - a_1| + |b - b_1| \geq |c - c_1|$, de unde $AA_1 + BB_1 \geq CC_1$. Analog obţinem că $AA_1 + CC_1 \geq BB_1$ şi $BB_1 + CC_1 \geq AA_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

L31. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 = a > 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p}$ (în legătură cu C:1463 din G.M. nr.11/1993).*

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie. Deoarece $a > 1$, putem demonstra prin inducţie că $a_n > 1$, $\forall n \geq 1$, de unde, ţinând seama că $a_{n+1} - a_n = \sqrt[p]{a_n^{p-1}} - 1$, obţinem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ ar fi mărginit superior, atunci ar avea o limită finită

l. Trecând la limită în relaţia de recurenţă s-ar obţine că $l = l + \sqrt[p]{l^{p-1}} - 1$, deci $l = 1$, contradicţie. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Împărţind acum în relaţia de recurenţă prin a_1 obţinem că $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt[p]{\dfrac{1}{a_n}} - \dfrac{1}{a_n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Calculăm acum limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[p]{a_n}}{n}$ cu ajutorul lemei lui Cesaro - Stolz. Observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{a_{n+1}} - \sqrt[p]{a_n}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}} + \sqrt[p]{a_{n+1}^{p-2} a_n} + \ldots + \sqrt[p]{a_n^{p-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt[p]{\dfrac{1}{a_n^{p-1}}}}{\sqrt[p]{\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-1}} + \sqrt[p]{\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-2}} + \ldots + 1} = \frac{1}{p}\,.$$

De aici, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[p]{a_n}}{n} = \dfrac{1}{p}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^p} = \dfrac{1}{p^p}$.

L32. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale care satisface condiţia $\left[\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right] = x_n$, $\forall n \geq 1$, iar $x_1 = 2$. Să se arate că există $\alpha > 1$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\alpha^{2^n}} = 1$.*

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluţie. Avem că $x_n \leq \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < x_n + 1$, deci $x_n^2 \leq x_{n+1} < x_n^2 + x_n$; în particular, putem deduce prin inducţie că $x_n \geq 2^{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 1$. Notăm $y_n = \dfrac{\ln x_n}{2^n}$. Atunci $y_{n+1} - y_n = \dfrac{\ln\left(x_{n+1}/x_n^2\right)}{2^{n+1}}$, deci $0 \leq y_{n+1} - y_n < \dfrac{\ln\left(1 + 1/x_n\right)}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{x_n\, 2^{n+1}}$.

Se obţine că $(y_n)_{n\geq 1}$, este monoton crescător şi, în plus,

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{k=1}^{n} (y_{k+1} - y_k) \leq y_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}},$$

de unde $y_{n+1} < y_1 + 1/2$, adică $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Deducem că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi fie $\ln \alpha$ limita sa, $\alpha > 1$. Deoarece

$$y_{n+p} - y_n = \sum_{k=0}^{p-1} (y_{n+k+1} - y_{n+k}) < \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{x_{n+k} 2^{n+k+1}},$$

obţinem că $y_{n+p} - y_n < \dfrac{1}{x_n\, 2^n}$. Cum $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător, pentru $p \to \infty$ obţinem că $0 \leq \ln \alpha - y_n \leq \dfrac{1}{x_n\, 2^n}$. De aici, $0 \leq \ln \alpha - \dfrac{\ln x_n}{2^n} \leq \dfrac{1}{x_n\, 2^n}$, deci $0 \leq \ln \dfrac{\alpha^{2^n}}{x_n} \leq \dfrac{1}{x_n}$. Pentru $n \to \infty$ obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{\alpha^{2^n}}{x_n} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\alpha^{2^n}} = 1$.

L33. *Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fixat. Arătaţi că soluţiile continue ale ecuaţiei funcţionale*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) + \sum_{1\leq i<j\leq m} f\left(x_i - x_j\right) = m\left(\sum_{i=1}^{m} f\left(x_i\right)\right),\ \forall x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m},$$

sunt funcţiile de forma $f(x)=cx^2$, cu $c\in\mathbb{R}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Soluţie. Pentru $x_1=x_2=\ldots=x_m=0$, obţinem că $f(0)+C_m^2 f(0)=m^2 f(0)$, deci $f(0)=0$. Pentru $x_1=x_2=\ldots=x_{m-1}=0$ şi $x_m=x$, obţinem că $f(x)+(m-1)f(-x)=mf(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi f este funcţie pară. Este deci suficient să determinăm f pe $(0,\infty)$.

Notăm $f(1)=c$. Pentru $x_1=x_2=1$ şi $x_3=\ldots=x_m=0$, obţinem că $f(2)+(m-2)f(1)=2mf(1)$, deci $f(2)=4c=c\cdot 2^2$. Pentru $x_1=n$, $x_2=1$ şi $x_3=\ldots=x_m=0$, obţinem că $f(n+1)+(m-2)f(n)+f(n-1)+(m-2)f(1)=$ $=m(f(n)+f(1))$ şi deci $f(n+1)=2f(n)-f(n-1)+2f(1)$. De aici se demonstrează uşor prin inducţie că $f(n)=cn^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Pentru $x_1=x_2=\ldots=x_m=x\in\mathbb{R}_+^*$ obţinem că $f(mx)=m^2 f(x)$. De aici, $f\left(\dfrac{x}{m}\right)=\dfrac{f(x)}{m^2}$ şi, prin inducţie, $f\left(\dfrac{x}{m^k}\right)=\dfrac{f(x)}{m^{2k}}$, de unde $f\left(\dfrac{n}{m^k}\right)=c\left(\dfrac{n}{m^k}\right)^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Notăm $M=\left\{\dfrac{n}{m^k};\ n,k\in\mathbb{N}\right\}$. Din cele demonstrate mai sus, $f(x)=cx^2$, $\forall x\in M$. Demonstrăm că $\forall x>0$ şi $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_\varepsilon\in M$ astfel ca $|x-x_\varepsilon|<\varepsilon$. Fie $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel ca $\dfrac{1}{m^{k_\varepsilon}}<\min\{x,\varepsilon\}$. Conform axiomei lui Arhimede, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel ca $\dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}\le x<\dfrac{n_\varepsilon+1}{m^{k_\varepsilon}}$, deci $0\le x-\dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}<\dfrac{1}{m^{k_\varepsilon}}<\varepsilon$, de unde $\left|x-\dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}\right|<\varepsilon$. Rezultă că putem alege $x_\varepsilon=\dfrac{n_\varepsilon}{m^{k_\varepsilon}}$. Pentru $\varepsilon=\dfrac{1}{l}$, $l\in\mathbb{N}$, obţinem că $\exists (x_l)_{l\ge 1}\subset M$ astfel ca $|x-x_l|<\dfrac{1}{l}$, $\forall l\ge 1$, deci $x_l\to x$ pentru $l\to\infty$. Cum $f(x_l)=cx_l^2$, iar f este continuă, obţinem că $f(x)=cx^2$. În concluzie, $f(x)=cx^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

L34. *Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n:[-2,\infty)\to\mathbb{R}$ definit prin $f_0(x)=$ $=x$, $f_n(x)=\sqrt{2+f_{n-1}(x)}$, $\forall n\ge 1$. Notăm*

$$f(x)=\begin{cases} 1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f_n(x)}{2}\right)^{4^n}, & \text{dacă } x\in[-2,2]\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[3-f_n(x)\right]^{4^n}, & \text{dacă } x\in(2,\infty)\end{cases}.$$

Arătaţi că $f(x)$ defineşte o funcţie pe $[-2,\infty)$ şi cercetaţi dacă această funcţie admite primitive.

Ştefan Alexe, Piteşti

Soluţie. Fie mai întâi $x\in[-2,2]$. Se observă că funcţia $g:[0,\pi]\to[-1,1]$, $g(x)=\cos x$ este bijectivă. În concluzie, există un unic $t=t(x)\in[0,\pi]$, $t=\arccos\dfrac{x}{2}$, astfel încât $\cos t=\dfrac{x}{2}$, deci $f_0(x)=2\cos t$. Atunci $f_1(x)=\sqrt{2+2\cos t}=2\cos\dfrac{t}{2}$ şi se demonstrează prin inducţie că $f_n(x)=2\cos\dfrac{t}{2^n}$.

Fie acum $x\in(2,+\infty)$. Se observă că funcţia $h:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $h(x)=$ $=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$ este bijectivă. În concluzie, există un unic $t=t(x)\in(0,\infty)$, $t=\ln\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{ch}t=\dfrac{x}{2}$. Atunci $f_1(x)=\sqrt{2+2\operatorname{ch}t}=$ $=\sqrt{2+e^t+e^{-t}}$, deci $f_1(x)=e^{t/2}+e^{-t/2}=2\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}$ şi se demonstrează prin inducţie că $f_n(x) = 2\,\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{2^n}$.

Găsirea expresiei funcţiei f se reduce la calculul unor limite elementare. Se obţine că $f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{2}\arccos^2\frac{x}{2}}$, dacă $x \in [-2, 2]$, respectiv $f(x) = e^{-\ln^2\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}$, dacă $x \in (2, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 2$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 1$, $x = 2$ este punct de discontinuitate de speţa întâi pentru f, deci f nu admite primitive pe $[-2, +\infty)$.

L35. *Să se arate că există şi este unic* $\alpha > 1$ *astfel încât*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx = \frac{\pi^2}{64\alpha}$$

(se ştie că $0,45 < e^{-\pi/4} < 0,46$*).*

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

Soluţie. Notăm $I = I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx$, $J = J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx$; se deduce imediat că $I + \alpha J = \dfrac{\pi}{4}$, $\forall\alpha > 0$. Observăm că

$$IJ = \frac{\pi^2}{64\alpha} \Leftrightarrow I \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{4} - I\right) = \frac{\pi^2}{64}\alpha \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{8}.$$

Rămâne să demonstrăm că există un unic $\alpha > 1$ astfel ca $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{8}$. Fie $0 < \alpha_1 < < \alpha_2 < \infty$. Deoarece

$$I(\alpha_1) - I(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)\int_0^{\pi/4} \frac{e^x \sin x}{(e^x + \alpha_1\sin x)(e^x + \alpha_2\sin x)}\,dx,$$

obţinem că $I(\alpha_1) > I(\alpha_2)$ şi $|I(\alpha_1) - I(\alpha_2)| \le \dfrac{\pi}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)$, deci $\alpha \to I(\alpha)$ este o funcţie continuă strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

Fie $\alpha > 0$ şi $f_\alpha : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = \dfrac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}$. Atunci

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha\sqrt{2}e^x \sin(x - \pi/4)}{(e^x + \alpha\sin x)^2} < 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right),$$

deci f_α este strict descrescătoare pe $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Aplicând teorema de medie integralei $I(1)$, obţinem că există $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ astfel ca

$$I(1) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^c}{e^c + \sin c} > \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\pi/4}}{e^{\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} > \frac{\pi}{7}\ . \tag{1}$$

Fie acum $\delta \in \left[0, \dfrac{\pi}{8}\right]$. Atunci

$$I(\alpha) = \int_0^{\delta} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx + \int_{\delta}^{\pi/4} \frac{e^x}{e^x + \alpha\sin x}\,dx \le \delta + \left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\frac{e^\delta}{e^\delta + \alpha\sin\delta}.$$

Pentru $\alpha \to \infty$ obţinem că $\lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha) \le \delta < \dfrac{\pi}{8}$. Ţinând seama de (1), de continuitatea lui $I(\alpha)$ şi de stricta sa monotonie, obţinem că există un unic $\alpha > 1$ astfel ca $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{8}$, de unde obţinem concluzia problemei.